356,181/C
N III
10/W

CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII, CONSILIARII REGIMINIS, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ PROFESSORIS PRIMARII IN ACADEMIA MARBURGENSI, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS QUINTUS,

QUI COMMENTATIONEM DE PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS, COMMENTATIONEM DE STUDIO MATHEMATICO RECTE INSTITUENDO, & INDICES IN TOMOS QUINQUE MATHESEOS UNIVERSÆ CONTINET.

EDITIO NOVISSIMA,

MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.

GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.

M DCCLII.

WELLCOME HISTORICAL MEDICAL LIBRARY

PRÆFATIO.

PRODIT tandem Tomus Quintus novæ Editionis Elementorum noſtrorum Matheſeos univerſæ, qui dudum lucem adſpexiſſet, niſi alii labores aliaque impedimenta indeclinabilia moram injeciſſent. Equidem nihil reſtabat quam recenſio Autorum, qui Matheſin vel ſuis inventis, vel ſcriptis illuſtrarunt, quam adjeceramus tam Germanicæ Elementorum Matheſeos, quam primæ Latinæ Editioni; una cum Indice in quatuor Elementorum horum Tomos: ne tamen nimis ſterilis judicaretur Tomus quintus, addere lubuit Commentationem de Studio mathematico recte inſtituendo. Primo igitur loco ſiſtitur brevis Commentatio de præcipuis Scriptis mathematicis. Omnia recenſere nec potuimus, nec recenſeri conſultum fuit. Recenſuimus

ſuimus ea, quæ ipſimet poſſidemus, & pauca quædam, quæ aliunde nobis nota ſunt. Hanc Autorum notitiam abunde ſufficere credimus ei, qui vel ſe totum Matheſi dare, vel ejus aliquam partem ſibi quaſi propriam reddere decreverit. Et quoniam ſingulis adhuc annis ſcripta mathematica prodeunt, unusquiſque, cui volupe fuerit, hanc recenſionem facile continuabit. Qui vero Matheſi tantummodo operam navare voluerit, ut non modo divinæ hujus ſcientiæ compos fiat, verum etiam intellectus eum perfectionis gradum conciliet, ut eodem in omni cognitione reliqua rite ac prompte utatur; ei abunde ſatisfacient ſola Elementa noſtra, ut nullo alio librorum apparatu indigeat. Quodſi autem quis in aliqua ejus parte ulterius progredi voluerit; ex commentatione noſtra facile videbit, quem vel quosnam ſibi eligere debeat duces, ut voti ſui compos reddatur. Ceterum cum nemo Autorum ſibi propoſuerit, ut eam omni perſpicuitate explicaret, quam tyro merito deſideravit, ac demonſtrationes daret conſummatas, quas in Logica appellamus; ſuademus ſerio ne quis ad lectionem aliorum Autorum accedat, antequam noſtra ſibi familiaria reddiderit. Verendum enim, ne confundatur, & perplexitate deſertor ſtudii utiliſſimi efficiatur. Si quis, ſolius intellectus perficiendi gratia, ad Matheſin animum appellit, is vel in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ Elementaris & Trigonometriæ plane ſubſiſtere, vel ex ceteris addere poteſt, quæ maxime ſunt ad ipſius palatum; modo ſibi caveat, ne negligat eas diſciplinas, ex quibus demonſtrandi principia petuntur, niſi hæc tanquam certa ſumere voluerit, etſi eorum evidentiam non perceperit. Et quænam hic obſervan-

ſervanda ſint, ex Commentatione de Studio mathematico recte inſtituendo haud difficulter addiſcet.

Secundo loco hic comparet Commentatio de Studio mathematico recte inſtituendo. Non omnes, qui eidem ſeſe dedunt, eodem fine ad ipſum accedunt. Quamobrem noſtrum fuit, non idem ſingulis dare conſilium; ſed potius pro diverſitate finis diverſa. Equidem Elementa noſtra eo modo concinnavimus, ut ſingulis ſatisfaciant, quocunque tandem animo ad Matheſin accedant; cum tamen omnibus non conveniant omnia, indicandum omnino erat, quænam omittenda ſint, quænam prætermitti minime debeant, & quomodo in iis percipiendis ſit verſandum, prouti unusquiſque hunc vel alium finem ſibi propoſuerit; quamvis iis, qui ſciendi cupidine flagrant, & in Philoſophia aliiſque ſcientiis cum laude verſari voluerint, commendanda ſit lectio integrorum noſtrorum Elementorum. Ea ſane hoc modo conſcripſimus, ut haud multo temporis ſpatio integram Matheſin addiſcere liceat, ac deinde qualibet ejus parte ulterius progredi detur, quantum libuerit. Cognitu nimirum utiliſſima & quæ ad ulteriora viam ſternunt, cum primis principiis ita connexa ſunt, ut ideas maxime adæquatas ex his Elementis haurire & ex aliis operibus petenda cum iiſdem connectere liceat: id quod etiam in operibus noſtris philoſophicis eadem methodo conſcriptis intendimus. Neque enim alia datur via, qua ad certam & ſolidam rerum cognitionem perveniatur. Etſi autem Matheſis multas afferat utilitates ad felicitatem generis humani promovendam, ut adeo digna ſit, quæ excolatur; non tamen hinc recte infertur, eam omnibus omnino eſſe addiſcendam, qui

ſtudiis literariis operam navant. Sufficit enim eſſe aliquos, qui eidem, vel uni alterive parti, ſe conſecrant, ut humanum genus utilitates iſtas conſequatur. Enim vero quatenus Studium mathematicum perficit intellectum, ea ejus utilitas eſt, ut nemo ad ſcientias alias tractandas admitti debeat niſi in Matheſi verſatus. Hæc ipſa utilitas omni ævo agnita, ex quo ſcientiæ honos fuit. Semper enim unanimi conſenſu aſſertum, ac hodienum aſſeritur; ſtudio Matheſeos perfici intellectum. Non tamen defuere, qui utilitatem iſtam in dubium vocarunt, cum viderent viros in Matheſi præſtantes nihil agere, ubi extra eandem demonſtrationes dare audent. Immo hinc enata eſt opinio, quaſi ſolius Matheſeos ſit ea, quæ affirmantur vel negantur, demonſtrare; in Philoſophia vero & facultatibus, quæ vocantur ſuperioribus ad demonſtrationes perveniri non poſſe. Ex hoc labyrintho patet egrediendi via, ſi paulo intimius inſpicias, cur Matheſis acuat intellectum. Memini jam alias plus ſimplici vice me monuiſſe, methodo tribuendum eſſe, ut Matheſeos ſtudio perficiatur intellectus. Ut vero methodum diſtincte cognoſcas, eamque in poteſtatem tuam redigas, non quælibet tractatio ſufficit, ſed legitimo quodam modo tractanda eſt Matheſis. Quinam igitur ſit modus, a quo tam præclara utilitas unice ſperanda, in Commentatione noſtra ex inſtituto docemus. Neque enim hactenus ſatis hoc animadverſum ab aliis; unde accidit, ut Mathematici ſummi, qui divinis prorſus inventis ſcientiam nobiliſſimam ditarunt, genuinam demonſtrationis formam non perſpexerint, quemadmodum in ipſa Commentatione clariſſime oſtendi. Quicquid igitur alii ſentiant de Tomo hoc quinto Elementorum

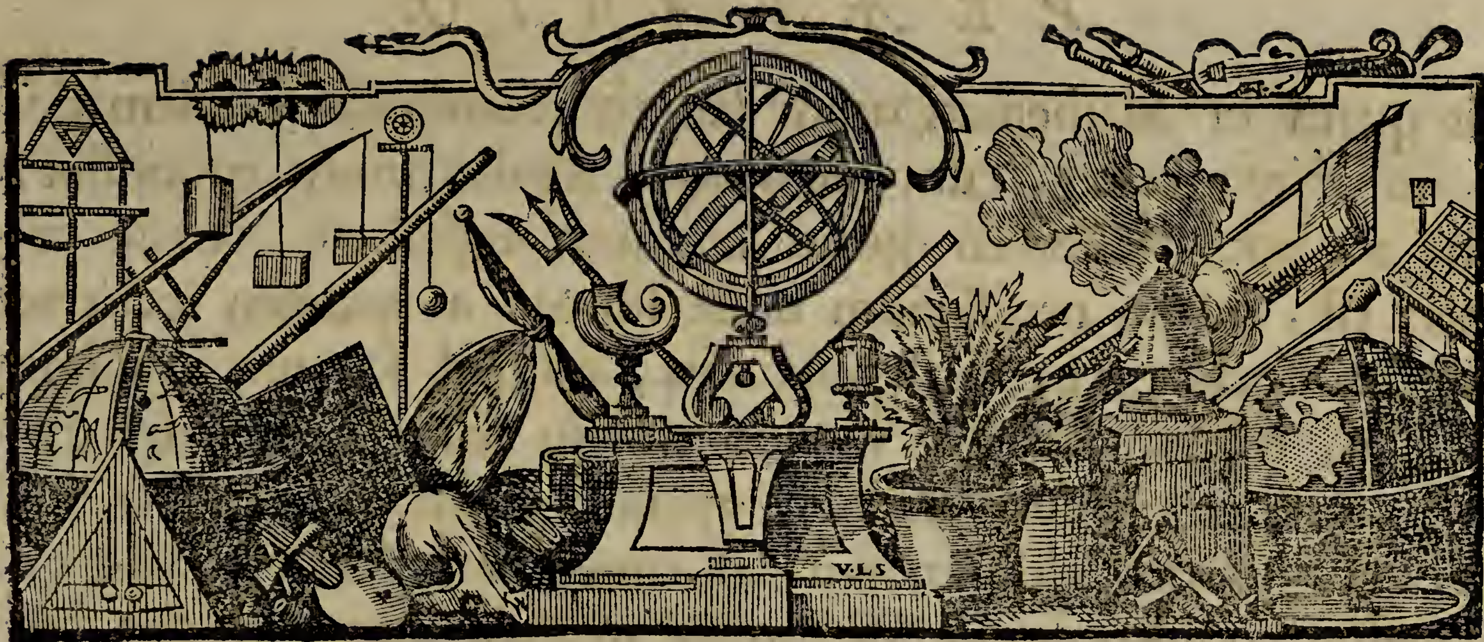
rum Matheſeos, quorum unicuique liberum ſuum relinquimus judicium; ego hoc nomine eundem maximi facio, quod genuinum facultatum mentis noſtræ uſum hinc addiſcere liceat, quo ad ſolidam rerum cognitionem pervenitur. Non nego eundem uſum regulis comprehendi in Logica & a nobis in opere præſertim Latino majore, quod de Logica conſcripſimus, demonſtrari. Monui tamen jam alias, ſtudio Matheſeos rite inſtituto eum acquirendum eſſe. Quomodo igitur id ipſum rite inſtituatur, ut in omni cognitionis genere facultatum humanarum rectum facere addiſcas uſum, in Commentatione noſtra tanta perſpicuitate docuimus, ut, quid amplius deſiderari poſſit, non videamus. Quamobrem, ſi quis conſilio noſtro uti voluerit, is in ſe ipſo experietur, quod non modo regulas logicas, quas in opere noſtro expoſuimus, nunc penitus intelligat, & nihil in iis ſuperſit obſcuri; verum etiam quod iiſdem prompte ac ſine ulla aberratione ſatisfacere poſſit, modo attentionem ſuam in ſe deſiderari minime patiatur. Dari aliquam Artem inveniendi, quæ hactenus abſque regulis exercetur, Mathematici exemplo ſuo abunde confirmant, qui noſtro præſertim ævo novis indies inventis Matheſin augent. Nemo diffitebitur, qui vel ad ea animum advertit, quæ ſpeciminis loco in Arithmetica (*) tradidimus, ab exemplis abſtrahi poſſe regulas. Quoniam igitur ſumma intellectus perfectio eſt, eum facere facultatum noſtrarum uſum, qui ad veritatem latentem inveſtigandam requiritur; id quoque egimus in Commentatione noſtra ut oſtenderemus, quomodo verſandum ſit in Matheſi, ut uſum iſtum conſequamur. Hactenus

(*) §. 123.

tenus Ars inveniendi regulis comprehenſa non eſt, quæ enim ſub hoc titulo proſtant, auguſtum iſtud nomen non merentur. Demus autem mox affore tempus, quo Ars inveniendi omnibus ſuis numeris abſoluta exactiſque regulis comprehenſa in publicum proſtet; minime tamen hinc ſequitur, ea, quæ in Commentatione noſtra in uſum hujus Artis acquirendæ præcipiuntur, nullius fore utilitatis: valent enim de hac Arte eadem quo modo de Logica annotavimus. Quid, quod etiam conſilium noſtrum de ſtudio Matheſeos in uſum Artis inveniendi acquirendæ inſtituendo ei prodeſſe poſſit, qui eam regulis comprehendere voluerit?

Ultimo demum loco ſequuntur Indices, de quibus ut multa dicam opus non eſt. Unicum tantummodo moneri conſultum duxi. Initio conſtitueram Indices omnes rerum & verborum in Elementis noſtris contentorum in unum compingere. Enimvero cum conſultiſſimum videretur in iis citari paragraphos, literis autem alphabeti ſingulæ partes non commode diſtingui poſſent; potius viſum eſt ſingulos ſingulorum Tomorum Indices ſigillatim conficere. Quoniam enim in ſeparato Tomo leguntur, abſque ulla opera, quæ in uno non inveniuntur, in alio quæruntur. Ac ita tandem Elementa noſtra Matheſeos univerſæ ad umbilicum perduximus; nil magis in votis habentes, quam ut iiſdem in addiſcenda Matheſi utentes eum conſequantur uſum, quem Commentatio noſtra promittit. Dabam Marburgi Cattorum d. 17. Septembr. A. O. R. 1740.

PRÆ-



PRÆFATIO.

NOn nobis propoſitum eſt condere Hiſtoriam Matheſeos univerſæ, ut ortus ejus pateat atque progreſſus ad noſtra uſque tempora. Opus enim hoc arduum eſt ac difficile, quod infinitam propemodum requirit lectionem & Bibliothecam libris omnibus tam antiquis, quam recentioribus inſtructiſſimam. Noſtrum jam non eſt in hunc campum deſcendere. Quod ordinaria negotia nobis relinquunt otium, in Philoſophia reformanda totum conſumendum, etiamſi alia non obſtarent, de quibus in præſenti dicere nil attinet. Neque etiam nobis animus eſt recenſendi Autores omnes, qui vel de Matheſi integra, vel de una aut altera ejus parte, vel etiam de particularibus quibuſdam argumentis commentati ſunt: Sufficit recenſuiſſe ſcripta præcipua, quorum lectione in ſtudio Matheſeos feliciter progredi licet. Etſi enim hodie reperiantur plurimi, qui in hiſtoria literaria induſtriam ſuam exercent: nullibi tamen

gis quam in Mathematicorum ſcriptis recenſendis eandem deficere animadvertes, cum plerumque Mathematum rudes ſint, qui ad hoc ſtudiorum genus animum appellunt. Utile tamen eſt, immo neceſſarium noſſe libros, a quorum lectione recedas doctior, ne in legendis iis, qui ad ſcopum minime faciunt, tempus fallas & magno conatu parum aut nihil diſcas. Me igitur non inutilem operam præſtitiſſe confido iis, qui ad Matheſin addiſcendam ſeſe convertunt. Patebit hoc ex ſequente commentatione de ſtudio mathematico, in qua indicaturus ſum, quinam pro diverſo diſcentium ſcopo legendi ſint autores. Ceterum non dubito, hanc recenſionem Autorum etiam prodeſſe poſſe iis, qui ad Hiſtoriam Matheſeos condendam ſeſe accingent obſervaturi eas leges, quas præſcripſimus in opere noſtro Logico. Vix tamen eandem ab uno homine expectes. Rationes perſpicies ex iis, quæ de Hiſtoria ſcientiarum in Logica tradidimus. Optandum foret, ne pars eruditionis longe utiliſſima diutius negligeretur, & bene de humano genere merebitur, qui vel unius Matheſeos partis hiſtoriam exaſciatam dederit, exemplo ſuo excitaturus alios ad ſocias operas conferendas.

DE

DE

PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS BREVIS COMMENTATIO.

CAPUT PRIMUM.

De Curſibus, Operibus atque Lexicis Mathematicis.

§. 1.

PRimus *Curſum mathematicum* Latino & Gallico idiomate edidit PETRUS HERIGONIUS *Pariſiis* 1644. in 8. (10 Alph. 2 plag.). Conſtat Tomis ſex. Primo continentur 1. Elementa EUCLIDIS XV. 2. Data EUCLIDIS, 3. APOLLONII PERGÆI de determinata ſectione Geometria, a WILLEBRORDO SNELLIO reſtituta, 5. Ejuſdem APOLLONII inclinationum Geometria, a MARINO GHETALDO reſtituta, 6. Ejuſdem APOLLONII Tactionum Geometria, a FRANCISCO VIETA reſtituta, 7. Doctrina Sectionum angulorum. Tomus ſecundus complectitur 1. Arithmeticam practicam, & 2. Algebram tum vulgarem, tum ſpecioſam, una cum ratione componendi ac demonſtrandi per regreſſum ſive repetitionem veſtigiorum Analyſeos. Tomus tertius exhibet 1. Conſtructionem Canonum, Sinuum, atque Tangentium & Logarithmorum, 2. ipſos hos Canones, 3. Trigonometriam planam, 4. Geometriam practicam, 5. Architecturam militarem, 6. Tractatum de militia Græcorum, Romanorum, & hodierna, 7. Mechanicam. Tomus quartus continet 1. Doctrinam de Sphæra mundi, 2. Geographiam tam veterem, quam novam, 3. Hiſtiodromiam, ſeu Artem navigandi. In Tomo quinto extant, 1. Optica EUCLIDIS aucta & novis demonſtrationibus illuſtrata, 2. Catoptrica EUCLIDIS, 3. Dioptrica, 4. Perſpectiva, 5. THEODOSII Sphæricorum

libri tres, quibus additur quartus de triangulis ſphæricis & trigonometria ſphærica, 6. Theoricæ planetarum, 6. Gnomonica, 8. Muſica EUCLIDIS. Denique Tomus ſextus ſupplementis deſtinatur 1. in Algebram, 2. in Perſpectivam, 3. in Theoriam Planetarum: quibus additur introductio in Chronologiam. Apparet adeo, præter inventa recentiora, quæ Autor ſuo tempore tradere nondum potuit, deſiderari adhuc 1. Theoremata Archimedea, 2. Doctrinam Conicorum, 3. Staticam, 5. Hydraulicam, 6. Architecturam civilem, 7. Pyrotechniam. Quæ vero de ſingulis diſciplinis monenda ſunt, ea inferius ſuo loco annotabimus. Nunc in genere obſervamus, Autorem ubique accurata uti demonſtrandi methodo, eaque nova, per notas reales & univerſales, ita ut demonſtrationes ipſius ab eo, qui notarum vim animo comprehendit, citra uſum cujuſcunque idiomatis intelligi poſſint. Sed cum ſigna ſint Autori peculiaria & diverſa ab iis, quibus hodie in caſibus ſimilibus utimur; nonnihil difficultatis faceſſunt ſub initium lectionis, aliis præſertim ſignis jam adſueto. Ubi tamen ſigna familiaria evaſerint, multum facilitatis habet hæc demonſtrandi methodus: quia integra demonſtratio uno obtutu haud difficulter comprehenditur & una ſingulæ ejus partes diſtincte exhibentur. Ceterum HERIGONIUS theoriam magis, quam praxin cordi habet, & ab ejus tempore pleræque diſciplinæ mathematicæ multum mutationis ſubierunt, ad altius faſtigium evectæ, ita ut noſtro ævo non ſatisfaciat iis, qui ad Matheſin univerſam addiſcendam animum appellunt.

§. 2. Anno 1662, CASPARUS SCHOTTUS, e Societate Jeſu, *Curſum Mathematicum* edidit *Herbipoli* in fol. recuſum *Francofurti ad Mœnum* An. 1674, & denuo *Bambergæ* An. 1677, in fol. (7 Alph. 19 plag. una cum 2 Alph. 4. plag. figurarum æri inciſarum). Conſtat opus Libris 28, quorum primus Iſagogen continet ad Matheſin, in qua problemata facillima Geometriæ practicæ explicantur; ſecundus Arithmeticam; tertius Libros VI priores Elementorum EUCLIDIS, quartus & quintus Trigonometriam; ſextus Geometriam practicam ſecundum pantometron KIRCHERI; ſeptimus elementa Aſtronomiæ; octavus Theoricas planetarum; nonus problemata Aſtronomiæ practicæ; decimus Aſtrologiam judiciariam; undecimus Chronographiam; duodecimus Geographiam; decimus tertius Hydrographiam; decimus quartus Horographiam; decimus quintus Mechanicam; decimus ſextus Staticam; decimus ſeptimus Hydroſtaticam; decimus octavus Hydrotechniam; decimus nonus Opticam; vigeſimus Catoptricam; vigeſimus primus Dioptricam; vigeſimus ſecundus & tertius Architecturam militarem; vigeſimus quartus Tacticam hodiernam;

nam; vigeſimus quintus Muſicam; vigeſimus ſextus Algebram; vigeſimus ſeptimus Logarithmorum doctrinam; vigeſimus octavus Synopſin Matheſeos tradit. Deſiderantur adeo Pyrotechnia, Architectura civilis & Ars navigandi; pleræque diſciplinæ nimis breviter pertractantur, nec demonſtrativa methodus ubique adhibetur: deſunt etiam recentiora inventa, nec ſublimiora attingit Autor, ipſius præſertim ævo parum trita. Non ergo ſatisfacit, noſtro tempore, iis qui ad ſolidam Mathematum notitiam adſpirant.

§. 3. Anno 1681, *Londini* in 4. idiomate Anglico prodiit JONÆ MOORE Novum ſyſtema Mathematicum (*A new Syſteme of the Mathematicks*). Conſtat Tomis duobus, quorum primo continentur 1. Arithmetica tum decadica, tum decimalis, tum ſpecioſa, 2. ſex libri priores Elementorum EUCLIDIS, una cum undecimo & duodecimo, atque Geometrica practica, 3. Trigonometria plana & Sphærica, 4. Coſmographia, 5. Ars navigandi, 6. Doctrina Sphærica ſecundum hypotheſin terræ motæ: in altero autem extant Tabulæ aſtronomicæ, Sinuum verſorum & Logarithmorum, atque Geographia ſeu deſcriptio præcipuarum Regionum. Eorum potiſſimum conatibus inſervit hoc opus, qui Artem navigandi ſolidioribus fundamentis ſuperſtructam addiſcere geſtiunt. Commendatur quoque doctrina Sphærica talia continens, quæ alibi fruſtra quæſiveris.

§. 4. CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES, Camberienſis, e Societate Jeſu, An. 1674, edere cœpit *Curſum* ſeu *Mundum mathematicum*, tribus Tomis: ſed cum novam editionem multo auctiorem meditatus ante diem obiiſſet, AMATUS VARCINUS ex eadem Societate An. 1690, editionem ex MSC. Autoris auctam & emendatam dedit *Lugduni Gallorum* in fol. (32 Alph.) Editio poſthuma in 4 Tomos digeſta, quorum primo continentur 1. Tractatus de progreſſu Matheſeos & de illuſtribus Mathematicis, 2. EUCLIDIS Elementa XIV. 3. THEODOSII Sphærica, 4. Tractatus de ſectionibus Conicis, 5. Arithmetica practica, 6. Trigonometria, 7. Algebra, 8. Hypotheſium Carteſianarum refutatio: ſecundo 1. Geometria practica, 2. Mechanica, 3. Statica, 4. Geographia, 5. Tractatus de Magnete, 6. Architectura civilis, 7. Ars tignaria, 8. Tractatus de lapidum ſectione: tertio 1. Architectura militaris, 2. Hydroſtatica, 3. Tractatus de fontibus & fluviis, 4. Hydraulica, 5. Ars navigandi, 6. Optica, 7. Perſpectiva, 8. Catoptrica, 9. Dioptrica: quarto denique 1. Muſica, 2. Pyrotechnia, 3. Aſtrolabium, 4. Gnomonica, 5. Aſtronomia, 6. Aſtrologia, 7. Tractatus de Meteoris, 8. Calendarium. Autor, in Matheſi pura, antiqua & vulgaria bene explicat; recentiora vero inventa &

ſublimiora non attingit. De diſciplinis ad Matheſin mixtam ſpectantibus dicemus ſuo loco, id unice nunc annotaſſe contenti ſumus, quod ad diſcurſus phyſicos ſæpius digrediatur. In demonſtrando rigori veterum perſpicuitatem jungit. Curſuum Mathematicorum, qui hactenus lucem publicam adſpexerunt, abſolutiſſimus eſt.

§. 5. Anno 1690, WILHELMUS LEYBORN, Anglus, patrio idiomate publicavit Curſum Mathematicum ſub titulo: *Mathematical Siences in nine Books; Londini* in fol. (11 Alph. Tab. æn. 43). Liber primus explicat Arithmeticam, vulgarem pariter, ac decimalem, cum logarithmica; ſecundus Geometriam elementarem (cui appendicis inſtar ſubjungitur brevis ad Algebram ſpecioſam introductio); tertius doctrinam de primo mobili; quartus Coſmographiam, Geographiam & Chronologicam doctrinam de epochis; quintus Trigonometriam planam & ſphæricam; ſextus uſum inſtrumentorum Geometricorum in Geodæſia, Planimetria & Architectura tam civili, quam militari; ſeptimus Artem navigandi; octavus Gnomonicam; nonus librum ſecundum Inſtitutionum Aſtronomicarum NICOLAI MERCATORIS de theoria planetarum. Plurimas diſciplinas Mathematicas in hoc curſu deſiderari ſtatim apparebit, ſi quidem eam cum curſu præcedente conferre libuerit.

§. 6. ABRAHAMUS DE GRAAF, Batavus, idiomate patrio *Amſtelodami* An. 1694, in 4. (1 Alph. 21 plag. Tab. æn. 94.) ſub titulo *De gehee-le Matheſis of Wiskonſt* publici juris fecit Curſum Mathematicum, in quo reperiuntur 1. tractatus brevis de Proportione, 2. Arithmetica practica, 3. Geometria elementaris, 4. Trigonometria plana & ſphærica, 5. Aſtronomia, 6. Ars agrimenſoria cum Stereometria doliorum, 7. Ars navigandi, 8. Architectura militaris, 9. Gnomonica, 10. Perſpectiva, 11. Dioptrica cum Catoptrica, 12. Mechanica, 13. Algebra. In pleriſque nimis brevis, Algebra excepta.

§. 7. Anno 1697, OZANAM, Gallus, vir variis ſcriptis mathematicis ſuo loco commendandis celebris, in publicum emiſit Curſum Mathematicum, quatuor Tomis comprehenſum, ſub tit. *Cours de Mathematique, Pariſiis* in 8., recuſum *Amſtelodami* (quamvis Pariſiorum nomen præ ſe ferat) An. 1699. (4 Alph. 14 plag. Tab. æn. 155.). Tomus primus complectitur Elementa EUCLIDIS ſex priora, una cum undecimo & duodecimo, atque Arithmetica litterali; ſecundus Trigonometriam planam & Sphæricam, cum Tabulis Sinuum, Tangentium, atque Logarithmorum; tertius Geometriam practicam; quartus Mechanicam atque Perſpectivam; quintus Geographiam & Gnomonicam. Deſunt adeo diſciplinæ quam plurimæ. Ceterum in demonſtrando rigorem veterum pulchre obſervat Cl. Autor.

§. 8.

§. 8. JAC. TAYLOR in Theſaurario Mathematicæ, quod An. 1707, W. ALINGHAM *Londini* in 8. recudi fecit (1 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 18.) ſermone Anglico ſub Titulo *Treaſury of the Mathematicks*, explicat præcipua problemata Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Trigonometriæ utriuſque, Aſtronomiæ Sphæricæ, Geographiæ, Navigationis, Geodeſiæ, Stereometriæ, Gnomonicæ, Architecturæ militaris & Pyrotechniæ, ſuppoſitis terminorum definitionibus, & demonſtrationibus ſepoſitis. Adduntur Tabulæ Logarithmorum, & Tabulæ Sinuum atque Tangentium.

§. 9. Cum ſub finem An. 1706, munus docendi publice Matheſin in Academia Halenſi in me translatum eſſet; ſtatim animadverti, me eidem ex voto ſatisfacere non poſſe, quamdiu deſit liber, multiplici ſtudioſorum ad celeberrimam hanc Muſarum ſedem undiquaque confluentium ſcopo conveniens. Prælectiones mathematicæ in Academiis Germaniæ tum inſtituebantur in *Matheſin Compendiariam* JOANNIS CHRISTOPHORI STURMII, Philoſophiæ Naturalis & Matheſeos in Academia Altorfina Profeſſoris, paucis Tabulis comprehenſam. Sed cum in iis nonniſi prima Matheſeos rudimenta continerentur, ac inprimis deſideraretur methodus, qua intellectus juvenum ad reliqua ſtudia rectius abſolvenda formatur; meo, quem in docenda & diſcenda Matheſi mihi præfixeram, ſcopo eædem parum conveniebant. Equidem idem An. 1699, duobus Tomis *Norimbergæ* in 8. ediderat *Matheſin Juvenilem*, quorum prior Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, cum palmariis Geometriæ elementaris theorematis, Trigonometriam planam, Architecturam militarem atque civilem, & Staticam ſeu Artem mechanicam; poſterior Opticam, Catoptricam & Dioptricam, Aſtronomiam, Chronologiam, & Gnomonicam continet: in ea tamen nonniſi uberiori diſcurſu illuſtrantur, quæ in Tabulis conciſius proponuntur. Utitur Autor methodo erotematica, nec demonſtrationibus locum concedit, ut ipſe in præfatione moneat, non quærendam in hoc libro eſſe Matheſin ſuis numeris abſolutam, ac demonſtrationibus exactiſſimis ubique firmatam, ſed facilem, planam ac demonſtrationibus diſcentium captui accommodatis illuſtratam verius, quam corroboratam. (Tom. I. 2 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 52. Tom. II. 2 Alph. 9 plag. Tabb. æn. 57.)

§. 10. Filius ejus LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS, Francofurti ad Oderam Matheſeos Profeſſor, Compendium Matheſeos conſcripſit in uſum Prælectionum ſuarum, idiomate patrio, methodo erotematica, ad imitationem Matheſeos juvenilis parentis ſui, in quinque partes diviſam, quarum prima Matheſin univerſalem, Arithmeticam, Geometriam elemen-

elementarem, Phoronomiam, Algebram; ſecunda Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, Architecturam militarem & civilem, Pyrotechniam, Mechanicam; tertia Aſtronomiam, Geographiam & Chronologiam; quarta Gnomonicam, Opticam, Perſpectivam & Acuſticam, quinta Tabulas quaſdam mathematicas continet. Prodiit ſecunda vice *Francofurti ad Oderam*, 1710, in 8. ſub Titulo: *Kurtzer Begriff der geſammten Matheſis.* Autor totum ſe dederat ſtudio Architecturæ civilis ac militaris & Geometriæ practicæ, ut adeo in theoria elementari ceſpitet. In ceteris veſtigia parentis in Matheſi juvenili legit, quantum ipſi dabatur.

§. 11. Ut igitur ad verum Matheſeos ſtudium juventutem Academicam manuducerem, Univerſæ Matheſeos Elementa idiomate patrio conſcripſi, & quatuor Tomis *Halæ*, 1710, in 8. ſub Titulo: *Anfangs-Gründe der Mathematiſchen Wiſſenſchafften*, evulgavi (5 Alph. 10 plag. Tabb. æn. 111.) Tomus primus continet Commentationem de Methodo mathematica, Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam & Architecturam civilem; ſecundus Pyrotechniam, Architecturam militarem, Mechanicam, Hydroſtaticam, Aërometriam & Hydraulicam; tertius Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Chronologiam, Geographiam & Gnomonicam: quartus denique Algebram communem, Analyſin infiniteſimalem Illuſtris LEIBNITII, & appendicem de præcipuis ſcriptis mathematicis. Theoretica parcius expoſui, ut tempori ac loco ſervirem, quantum ad praxes, quas uberius tradidi, demonſtrandas ſufficere deprehendi, reliquis in parte quarta per Analyſin erutis. Ubivis tamen methodi rationem habui, ut verioris Logicæ praxis animis diſcentium inſinuaretur, & ad ſolidam doctrinam capiendam diſcentes apti efficerentur. Non inutilem fuiſſe huncce laborem, tum propria experientia me quotidie adhuc edocet, tum alii publice confeſſi ſunt. Videantur Acta Eruditorum An. 1711, pag. 279; An. 1713, pag. 222, 428; & An. 1714, p. 250. Quinta vice recuſa ſunt hæc Elementa An. 1738, in 8. (6 Alph. Tabb. æn. 121.) Prodeunt nunc *Amſtelodami* in linguam Batavorum translata & *Lauſannæ* in Latinum verſa eduntur.

§. 12. Quoniam hæc Elementa nonnullis prolixiora videbantur, quam ut tyronibus promiſcue proponerentur, & inprimis Algebra in parte quarta prolixius explicata eorum captui non convenire, nec ad omnium palatum eſſe judicaretur; deſiderio aliorum ſatisfacturus eadem in *Compendium* redegi & An. 1713, *Halæ* in 8. edidi (2 Alph. Tabb. æn. 45). Continetur in hoc compendio Commentatio de Methodo mathematica, Arithmetica, Geometria, Trigonometria

metria plana, Mechanica, Hydroſtatica, Aërometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Perſpectiva, Aſtronomia, Geographia, Chronologia, Pyrotechnia, Architectura militaris & civilis, Algebra ſpecioſa ad exempla arithmetica applicata. Editio ſexta prodiit *Halæ* An. 1737.

§. 13. Quid me impulerit, ut *Elementa Matheſeos* Latina a Germanicis diverſa ederem, in præfatione Tomi primi expoſui. An finem mihi propoſitum fuerim conſecutus, aliorum eſto judicium. Editio altera, quæ ab Anno 1730 prodiit & cui nunc Tomo quinto colophonem imponimus, recuſa eſt *Genevæ* in 4. ab Anno 1732 forma majore. Enimvero editionem nitidiſſimam & ab omnibus mendis expurgatam Veronæ parat JOSEPHUS SERERIUS, Medicinæ ac Philoſophiæ Doctor, in omni Matheſi ac Philoſophia verſatiſſimus. Ad commodiorem uſum figuræ ipſi textui inſeruntur. Eandem operam iiſdem impendit, quam orbi erudito in recudendis operibus noſtris philoſophicis Latinis abunde comprobavit. Ut Gallorum commodis inſerviat JOANNES THEOBALDUS BION, Elementa hæc noſtra quoad ſubſtantiam in linguam Gallicam transfundit; ſatis ingenue ac feliciter, quemadmodum ex ſpeciminibus ad me tranſmiſſis intellexi.

§. 14. Ab eo tempore, ex quo Elementa Matheſeos, tam patrio, quam Latino ſermone conſcripta edidi, plura in Germania paſſim prodiere Compendia Matheſeos, Noſtris ſatis nota & in bibliopolis noſtris ubivis obvia. Sed de ſingulis dicere nimis foret prolixum & a præſenti inſtituto alienum.

§. 15. CONRADUS DASIPODIUS, Mathematum Profeſſor Argentoratenſis, *Argentorati*, an. 1573, edidit *Dictionarium Mathematicum* Græce atque Latine conſcriptum in 8. (plag. 12.) Continentur in eo definitiones ac diviſiones Arithmeticæ, Logiſticæ, Geometriæ, Geodeſiæ, Aſtronomiæ, & Harmonicæ. Non ordinem Alphabeti ſequitur Autor, ſed diſciplinarum. In iis etiam diſciplinis, quas attingit, opera ejus eſt admodum imperfecta.

§. 16. HIERONYMI VITALIS, Capuani, Clerici Regularis Theatini, *Lexicon Mathematicum*, *Pariſiis* 1668, in 8. prodiit (1 Alph. 18 plag.) In eo tamen nonniſi voces Geometriæ elementaris, Aſtronomiæ & Aſtrologiæ explicantur. Idem An. 1690, *Romæ* in 4, recuſum & ex omnibus fere diſciplinis Mathematicis inſigniter auctum, multis inutilibus paſſim reſciſſis. (6 Alph. 3 plag.)

§. 17. OZANAM ſupra laudatus *Lexicon Mathematicum*, ſecundum ordinem diſciplinarum diſpoſuit, editum *Pariſiis* An. 1691, in 4. (4 Alph.) Explicat Cl. Autor terminos Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ ſpeculativæ & practicæ, Coſmographiæ, Aſtronomiæ,

nomiæ, Navigationis, Geographiæ tum aſtronomicæ, tum naturalis, tum hiſtoricæ, Opticæ, Perſpectivæ, Gnomonicæ, Catoptricæ, Dioptricæ, Artis pictoriæ, Mechanicæ, Staticæ, Hydroſtaticæ, Architecturæ civilis & militaris, atque Muſicæ.

§. 18. J. HARRIS in Lexico Technico magno, cujus Tomus primus *Londini* 1704, alter ibidem 1710, in fol. prodiit, præter alios terminos Artium & Scientiarum non modo Mathematicos terminos, verum etiam res ipſas explicat. Titulus operis eſt: *An univerſal English Dictionary of Arts and Sciences, explaining not only the Terms of Arts, but themſelves.*

§. 19. E. CHAMBERS *Londini* An. 1728, duobus Voluminibus in fol. forma majore edidit Lexicon Univerſale artium & ſcientiarum, ſub Titulo, *Cyclopædia, or an Univerſal Dictionary of Arts and Sciences* ordine alphabetico conſcriptum (Alph. 22. plag. 8. Tabb. æn. 28). In eo etiam explicantur, quæ ad Matheſin ſpectant, ita ut Lexici Mathematici nomen ſimul tueatur. Mathematica pleraque ex Elementis hiſce noſtris petuntur, quæ etiam paſſim citat.

§. 20. An. 1716, lucem publicam adſpexit *Lipſiæ* in 8. forma majore, *Lexicon Mathematicum*, (2. Alph. 5. plag. cum multis figuris textui inſertis) quod nonnullorum precibus fatigatus, idiomate vernaculo, ſecundum ordinem alphabeticum, ita digeſſi, ut non modo ſingulos terminos in diſciplinis Mathematicis paſſim obvios explicuerim, verum etiam Autores citaverim, qui vel primi res iiſdem notatas invenerunt, vel optima ratione expoſuerunt, ac præterea præcipua dogmata recenſuerim, ſingulorumque uſum indicaverim, ut ſcilicet uſui ſit illis, qui vel hiſtoricam Matheſeos cognitionem affectant, vel in lectione Autorum ob voces non intellectas hærent, vel denique ducem in cognoſcendo aliquo argumento deſiderant. In Italicum idioma idem tranſtulit JOSEPHUS SERERIUS ſupra laudatus (§. 13.)

§. 21. Cum bibliopola novam hujus Lexici editionem dare vellet, a me deſideravit, ut idem ad mentem ipſius reformarem aut alteri hunc laborem committerem, ſed paterer, ut nomen meum eidem præfigeretur. Quoniam non poſſideo calamum venalem, inſulſo petito deferre nec volui, nec potui. Bibliopola itaque, cum Lexicon iſtud diu deſideraretur, tandem aliud edidit An. 1734, (2. Alph. Tabb. æn. 26), de quo judicium meum lubens ſuſpendo. Sed quia vulgo pro meo Lexico venditur ac emitur; monendus eſt Lector, me iſtud pro meo non agnoſcere, nec mea facere, quæ in eodem immutata. Præfationem quoque, quæ eidem præfigitur, diverſam eſſe ab ea, quæ a me profecta fuerat, ipſa collatio utriuſque prodit. Nec tamen abuſui nominis mei locus daretur; Autor ejus nomen ſuum præfigere debuiſſet.

§. 22. In

§. 22. In gratiam eorum, qui caſtra ſequuntur, Lexicon militare, pyrotechnicum & navale conſcripſit JOANNES LUDOLPHUS FÆSCH, quod *Dreſdæ* An. 1735, in 8. forma majore (2. Alph. 8. plag. Tabb. æn. 21.) prodiit ſub titulo: *Kriegs-Ingenieur-Artillerie und See-Lexicon.* Explicantur in iis termini, qui in Architectura & re militari, Pyrotechnia, & Architectura navali ac navigatione occurrunt, figuriſque æri inciſis, ubi opus eſt, illuſtrantur.

§. 23. SIMON STEVINUS varia Opera mathematica conſcripſit, quæ ſub titulo: *Les Oeuvres Mathematiques de* SIMON STEVIN *de Bruges*, *Lugduni Batavorum* in fol. publicavit An. 1634, ALBERTUS GIRARDUS (1. Alph. 19. plag.) Continentur in iiſdem 1. Arithmetica tam rationalium, quam irrationalium cum regulis Algebræ; 2. Sex libri DIOPHANTI *Alexandrini*, quorum quatuor priores opera STEVINI, duo poſteriores a GIRARDO traducti, 3. Uſurarum computus, Logiſtica decimalis, & incommenſurabilium doctrina, ubi ſimul Elementum EUCLIDIS decimum illuſtratur; 4. Trigonometria plana & ſphærica, 5. Geographia, 6. Aſtronomia, 7. Geometria practica, 8. Statica, 9. Optica, 10. Caſtrametatio, 11. Ratio muniendi per cataractas, 12. Architectura militaris. Autor & in theoria, & in praxi cum laude verſatus.

§. 24. CHRISTOPHORI CLAVII, Bambergenſis, e Societate Jeſu, *Opera Mathematica* in quinque Tomos diſtributa, & ab Autore ipſo correcta, plurimiſque locis aucta, prodiere *Moguntiæ* An. 1612, in fol. (40 Alph. 9. plag.) Tomus primus complectitur XVI Elementa EUCLIDIS & Libros tres Sphæricorum THEODOSII, cum Commentariis CLAVII in utrumque Autorem, Sinuum, Tangentium & Secantium rationem & Canones; Tractationem triangulorum, tum rectilineorum, tum Sphæricorum. Tomus ſecundus Geometriam practicam, Arithmeticam, & Algebram, una cum refutatione Cyclometriæ JOSEPHI SCALIGERI. Tomus tertius JOANNIS DE SACRO BOSCO, libellum de Sphæra, cum prolixo Commentario CLAVII in eundem, atque libros tres de Aſtrolabio. Tomus quartus Gnomonicam, Fabricam & uſum inſtrumenti ad Horologiorum deſcriptionem peropportuni, Horologiorum novam deſcriptionem, Compendium breviſſimum deſcribendorum Horologiorum horizontalium ac declinantium, cum notis in idem. Tomus denique quintus Romani Calendarii a GREGORIO XIII P. M. reſtituti explicationem, Novi Calendarii Romani Apologiam adverſus MICHAELEM MÆSTLINUM, & Appendicem ad Novi Calendarii Romani Apologiam, in qua JOSEPHUS SCALIGER, GEORGIUS GERMANUS & FRANCISCUS VIETA, qui Calendarium aliter inſtaurandum eſſe contenderunt, ſeor-

ſim ſinguli confutantur. CLAVIUS inſtar veterum, EUCLIDIS, ARCHIMEDIS & APOLLONII, demonſtrator rigidus.

§. 25. FRANCISCI VIETÆ Galli, *Opera Mathematica* in unum volumen congeſta *Lugduni Batavorum*, in fol. An. 1646, edidit FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenſis, in Academia patria Mathematum Profeſſor (6 Alph.) Continentur in iiſdem 1. Iſagoge in Artem analyticam, 2. ad Logiſticen Specioſam Notæ priores, 3. Zeteticorum libri quinque, 4. De æquationum recognitione & emendatione Tractatus duo, 5. de numeroſa poteſtatum ad exegeſin reſolutione, 6. Effectionum Geometricarum Canonica recenſio, 7. Supplementum Geometriæ, 8. Pſeudo-Meſolabum & alia quædam adjuncta capitula, 9. Theoremata ad ſectiones angulares, 10. Reſponſum ad problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis conſtruendum propoſuit ADRIANUS ROMANUS, 11. Apollonius Gallus, 12. Variorum de rebus Mathematicis Reſponſorum Liber VIII, 13. Munimen adverſus nova Cyclometrica, 14. Ratio Calendarii vere Gregoriani, 15. Calendarium Gregorianum perpetuum, 16. Adverſus CHRISTOPHORUM CLAVIUM Expoſtulatio.

§. 26. PHILIPPI LANSBERGII *Opera omnia* prodiere, *Middelburgi in Selandia* A. 1663, in fol. (10 Alph.) Continentur in iiſdem 1. Triangulorum Geometriæ libri quatuor, 2. Cyclometriæ novæ libri duo, 3. Uranometriæ libri tres, 4. in quadrantem tum Aſtronomicum, tum Geometricum, nec non in Aſtrolabium Introductio, 5. Horologiographia plana, 6. Commentationes in motum Terræ diurnum & annuum, & in verum adſpectabilis cœli typum, 7. Tabulæ motuum cœleſtium perpetuæ, cum novis motuum cœleſtium Theoricis & Aſtronomicarum Obſervationum theſauro, 8. Chronologiæ Sacræ libri tres, in quibus annorum mundi ſeries, ab orbe condito ad everſa per Romanos Hieroſolyma, nova methodo oſtenditur.

§. 27. In *Opuſculis Mathematicis* GUILIELMI OUGHTRED, quondam Collegii Regalis in Cantabrigienſi Academia Socii, *Oxonii*, An. 1677, in 8. editis, habentur 1. Inſtitutiones Mechanicæ, 2. De variis corporum generibus, gravitate & magnitudine comparatis Tractatus ex MARINI GHETALDI *Archimede promoto* excerptus, 4. Tractatus alius de Automatis, 4. quæſtionum DIOPHANTI *Alexandrini* Libri tres, 5. de triangulis planis rectangulis, 6. de diviſione ſuperficierum Tractatus, 7. Muſicæ Elementa, 8. Architectura militaris, 9. Tractatus de ſectionibus angularibus (15 plag.)

§. 28. ANDREÆ TACQUET, Antverpienſis, e Societate Jeſu, *Opera Mathematica*, *Antverpiæ* An. 1669, in fol. publicavit SIMON LAURENTIUS VETERANUS ex Comitibus *Montis Calvi*, e Societate Jeſu (9 Alph. 15 plag.

plag. Tab. æn. 88.) Extant in iiſdem 1. Aſtronomiæ libri octo cum Appendice, 2. Geometriæ practicæ libri tres, 3. Opticæ libri tres, 4. Catoptricæ libri tres, 5. Architecturæ militaris liber unus, 6. Cylindricorum & Annularium libri quinque, 7. Diſſertatio Phyſico-Mathematica de Circulorum volutionibus.

§. 29. Anno 1692, prodiit *Pariſiis* in 12. Synopſis Tractatuum Mathematicorum, qui neceſſarii eſſe poſſunt Nobilibus terra marive operam militiæ daturis; auctore P. HOSTO, e Societate Jeſu, Mathematum Profeſſore Tulonenſi. Titulus operis; *Recueil des Traités de Mathématique, qui peuvent être néceſſaires à un Gentilhomme, pour ſervir par mer, ou par terre.* (Plag. 26, Tab. æn. 67.) Conſtat hæc ſynopſis tribus Tomis, quorum primus Elementa EUCLIDIS, Arithmeticam & Trigonometriam; ſecundus Geometriam practicam, Sphæricam, Mechanicam, Artem muniendi & Pyrotechniam; tertius denique Artem navigandi complectitur.

§. 30. Anno 1693, munificentia LUDOVICI MAGNI, Galliarum Regis, *Pariſiis* in fol. reg. lucem adſpexerunt *Veterum Mathematicorum Opera*, Græce & Latine, pleraque tum primum edita. (4 Alph. Fig. æn. 174.) Continentur in iſtorum numero ATHENÆUS de machinis; APOLLODORI Poliorcetica; PHILONIS liber quartus de telorum conſtructione, & quintus de rationibus tolerandæ inſtituendæque obſidionis; BITON de conſtructione machinarum bellicarum & catapultarum; HERONIS Belopoeeca, Spiritalia, & Automata, JULII AFRICANI Ceſti; Anonymi liber de toleranda obſidione. Adduntur BERNARDINI BALDI ſcholia in HERONIS Belopoeeca & nonnulla alia.

§. 31. Ex eadem typographia Regia An. 1693, in fol. prodiere, Varia Opera Mathematica & Phyſica, Autoribus Academicis Regiis ſcientiarum. Titulus operis: *Divers Ouvrages de Mathématique & de Phyſique par Meſſieurs de l'Académie Royale des ſciences* (Plag. 108.) Reperies in hoc Volumine 1. FRENICLII Tractatum de Excluſionibus; 2. ejuſdem compendium Combinationum; 3. ejuſdem Tractatus de quadratis magicis; 4. ROBERVALLI obſervationes ſuper compoſitionem motuum, quam ad tangentes curvarum ducendas applicat; 5. Delineatio libri Mechanici de motu compoſito; 6. de recognitione æquationum liber; 7. Tractatus de indiviſibilibus; 8. Liber de Trochoide; 9. Epiſtola ad MERSENNUM de TORRICELLII quibuſdam propoſitionibus; 10. TORRICELLII litteræ ad ROBERVALLIUM miſſæ occaſione præcedentis epiſtolæ; 11. ROBERVALLII Epiſtola, qua ſua ſibi inventa contra TORRICELLIUM alioſque Italos vindicat; 12. HUGENII opuſculum de cauſa gravitatis; 13. Æquilibrii in libra demonſtratio; 14. Potentiarum fila funeſque trahentium vires; 15.

Nova vis movens ope pulveris pyrii & aëris; 16. Conſtructio ingenioſa loci ad hyperbolam per aſymptotos; 17. Regula FERMATII de maximis & minimis demonſtrata & ad mirabilem brevitatem perducta; 18. Problema Opticum ſive 39 Prop. lib. 5. ALHAZENI, aut 22. lib. 6. VITELLIONIS conſtructum; 19. PICARDI praxis magnorum ſciatericorum per calculum abſolvenda; 20. Schediaſma de menſuris; 21. Menſuræ ab originalibus deſumptæ; 22. de menſura liquidorum & aridorum; 23. de proportione aquarum effluentium; 24. experimenta circa aquas effluentes, 25. Fragmenta dioptrica de vitrorum potiſſimum focis determinandis; 26. AUZOUT Tractatus de micrometro; 27. MARIOTTI Regulæ de aquæ jactibus; 28. ROEMERI Regulæ de craſſitie & viribus tuborum in aquæductibus ſecundum diverſas fontium altitudines diverſaſque tuborum diametros; 29. ejuſdem experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium.

§. 32. FRANCISCI MAUROLYCI, Abbatis Meſſanenſis, *Opuſcula Mathematica*, *Venetiis* 1575, in 4. edita (1. Alph. 18½ plag.) complectuntur 1. de Sphæra librum unum, in quo termini in hac doctrina obvii explicantur: 2. Computum Eccleſiaſticum: 3. Tractatum inſtrumentorum Aſtronomicorum, nempe de Quadrato Geometrico, Quadrante, Aſtrolabio, Armillis, Sphæra Solida: 4. De lineis horariis Tractatum Gnomonicum: 5. Propoſitiones libri decimi tertii Elementorum EUCLIDIS: 6. Muſicæ traditiones, continentes epitomen Muſicæ *Boëtianæ* & paucas de Muſica regulas: 7. De lineis horariis libros tres, Gnomonicæ uberiora fundamenta exponentes: 8. Arithmeticorum libros duos.

§. 33. *Opuſcula Mathematica* THOMÆ CEVÆ, e Societate Jeſu, *Mediolani* 1699, in 8. typis deſcripta (plag. 4.), conſtant ex nonnullis demonſtrationibus de ratione æquilibrii, de ſectione Geometrico-harmonica & arithmetica; de ſectione anguli rectilinei in quotvis partes tum organice, tum per quaſdam lineas curvas, Cycloides ſcilicet anomalas; de parabola conſideranda inſtar ellipſis maximæ atque inſtar hyperbolæ habentis tranſverſam diametrum infinitam; de lineis phantaſticis & flexilineis. Adduntur quædam excerpta ex VINCENTII VIVIANI Exercitatione mathematica, cui titulus *Formatione di tutti cieli*, & ex idea univerſali Matheſeos Cl. OZANAMI.

§. 34. JOHANNIS WALLISII, SS. Theol. Doct. & Geometriæ Profeſſoris Saviliani in Academia Oxonienſi celeberrimi, *Opera Mathematica* tribus voluminibus proſtant. Volumen primum editum *Oxonii* An. 1665, in fol. (11. Alph. 17. plag.) continet 1. Orationem inauguralem An. 1649. d. ultimo Octobris habitam, cum publicam Profeſſionem auſpicaretur: 2. Ma-

Matheſin univerſalem ſeu Arithmeticum opus integrum, tam philologice, quam mathematice traditum : 3. Tractatum elenchticum adverſus MARCI MEIBOMII de Proportionibus Dialogum : 4. Tractatum de Sectionibus Conicis nova methodo expoſitis : 5. Arithmeticam infinitorum : 6. Tractatus duos de Cycloide & Ciſſoide ac corporibus inde genitis, & de curvarum tum linearum ἐυθυνέσει, tum ſuperficierum πλατυσμῷ : 7. obſervationem eclipſis ſolaris An. 1654, d. 2. Aug. Oxonii viſæ : 8. Mechanicam, ſive de motu Tractatum Geometricum. Volumen ſecundum, quod ibidem An. 1693, in fol. prodiit. (10. Alph. 17. plag.) complectitur, 1. Tractatum Hiſtoricum & practicum de Algebra, 2. de combinationibus, alternationibus & partibus aliquotis, 3. de Sectionibus angularibus, 4. de angulo contactus & ſemicirculi, 5. defenſionem ejuſdem Tractatus, 6. diſceptationem Geometricam de poſtulato quinto & quinta definitione lib. 6. EUCLIDIS, 7. Cono-Cuneum, ſeu Corpus partim Conum, partim Cuneum repræſentans, Geometrice conſideratum, 8. de gravitate & gravitatione diſquiſitionem Geometricam, 9. de æſtu maris hypotheſin novam, 10. Commercium epiſtolicum de quæſtionibus quibuſdam Mathematicis, 11. JOH. CASWELLI Trigonometriam planam & Sphæricam. In tertium denique volumen, quod 1699, in fol. lucem adſpexit (14 Alph.), congeſta ſunt 1. CLAUDII PTOLEMÆI, PORPHYRII & MANUELIS BRIENNII Harmonica; 2. ARCHIMEDIS Arenarius & dimenſio circuli cum EUTOCII *Aſcalonitæ* in hanc Commentario ; 3. ARISTARCHI *Samii* liber de magnitudinibus & diſtantiis Solis & Lunæ ; 4. Fragmentum libri ſecundi Collectionis Mathematicæ PAPPI *Alexandrini* deſideratum ; 5. Collectio epiſtolarum quarundam COLLINII, LEIBNITII, NEWTONI, WALLISII, FLAMSTEDII rem mathematicam ſpectantium ; 6. opera quædam miſcellanea, nimirum Tractatus de loquela, Grammatica linguæ Anglicanæ, Inſtitutio Logica ad communes uſus accommodata, Mens ſobria ſerio commendata, in concione latine habita, Epiſtolæ ad Titum expoſitio aliaque nonnulla Theologica, quæ hujus non ſunt loci.

§. 35. CHRISTIANUS EUGENIUS, Mathematicus ſummus, multa præclara conſcripſit opera, de quibus ſuo loco dicemus. Poſt obitum ejus junctim prodierunt quatuor voluminibus in 4. ſub Titulo, Operum variorum, & reliquorum. *Opera varia* lucem adſpexerunt *Lugduni Batavorum*, An. 1724, duobus voluminibus : *Opera reliqua*, *Amſtelodami* An. 1728, duobus itidem voluminibus. Volumen primum variorum continet 1. Horologium, 2. Horologium Oſcillatorium, ſive de motu pendulorum ad horologia aptato Demonſtrationes Geometricas, 3. brevem Inſtitutionem de uſu horo-

horologiorum ad inveniendas longitudines, 4. de Hugeniana centri oſcillationis determinatione Controverſiam, 5. Machinas quaſdam & varia circa Mechanicam. (Alph. 1, plag. 17, Tabb. æn. 33.); ſecundum vero 1. Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipſis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus ſubjuncta eſt Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII A S. VINCENTIO editæ An. 1647. 2. Epiſtolam ad Cl. Vir. FRANCISCUM XAVERIUM AINSCOM S. J. qua diluuntur ea, quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ GREGORII A S. VINCENTIO impugnata fuit, 3. De Circuli magnitudine Inventa & problematum quorundam illuſtrium conſtructiones, 4. de Circuli & Hyperbolæ Quadratura Controverſiam, 5. Geometrica varia, 6. de Saturni Luna Obſervationem novam, 7. Syſtema Saturnium, 8. EUSTACHII DE DIVINIS Septempedani brevem annotationem in ſyſtema Saturnium CHRISTIANI HUGENII, 8. brevem aſſertionem ſyſtematis Saturnii ſui, 9. de Saturni Annulo obſervationes, 10. Coſmotheoron, ſive de Terris cœleſtibus earumque ornatu conjecturas, 11. Ratiocinia in Ludo aleæ, 12. Novum Cyclum harmonicum, 13. Varia de Optica, 14. Experimenta phyſica (Alph. 2, plag. 14, Tabb. æn. 23.) In Reliquiorum volumine primo extant 1. Tractatus de Lumine & Diſſertatio de cauſa gravitatis, 2. Geometrica demonſtratio Theorematum Hugenianorum circa Logiſticam, GUIDONIS GRANDI, 3. ejuſdem GRANDI epiſtola Geometrica ad V. C. THOMAM CEVAM e Societate Jeſu (Alph. 1, plag. 18, Tabb. æn. 15.) In altero autem comprehenduntur opera poſthuma, nimirum 1. Dioptrica, 2. Commentarii de poliendis vitris, 3. Diſſertatio de Coronis & Parheliis, 4. Tractatus de motu corporum ex percuſſione, 5. Tractatus de vi centrifuga, 6. Deſcriptio Automati Planetarii. (Alph. 2, plag. 6, Tab. æn. 43.) De præclaris hiſce operibus ſpecialia monebimus ſuo loco.

§. 36. Inprimis hic commemoranda ſunt Acta Societatum Scientiarum, quæ noſtro ævo ad promovendam Matheſin præſertim atque Phyſicam fuere inſtitutæ. Pertinent huc Acta Philoſophica Societatis Regiæ Anglicanæ, quæ a Secretariis eduntur ſub Titulo: *Philoſophical Tranſactions giving ſome account of the præſent undertakings, ſtudies and labours of the ingenious, in many conſiderable parts of the World*, & quorum uſque ad annum 1734, proſtant volumina 38. De his ſingulis dicere ab inſtituto noſtro alienum eſt. Sufficit itaque monuiſſe, quod in iis contineantur plurima ad matheſin ſpectantia lectu digniſſima iis, quibus curæ cordique eſt Scientiam Mathematicam ultra limites præſentes promovere. Anno 1705, JOHANNES LOWTHORP Volumina 21, quæ uſque ad Annum 1700 prodierunt, in epitomen redegit & in iis conten-

contenta per capita generalia diſpoſuit. Lucem adſpexit hoc opus ſub Titulo: *The Philoſophical Tranſactions and Collections to the end of the year* 1700, *abridg'd and diſpos'd under general heads*, tribus voluminibus, *Londini* in 4. Volumine primo continentur Mathematica, ad Geometriam, Arithmeticam, Algebram, Logarithmotechniam, Trigonometriam, Artem libellandi, Opticam, Aſtronomiam, Mechanicam, Acuſticam, Hydroſtaticam, Hydraulicam, Artem navigandi, Architecturam civilem & navalem, Perſpectivam, Sculpturam, Artem pictoriam & Muſicam ſpectantia. Conſtat Alph. 4, plag. 4, Tabb. æn. 7. Specialius ad ſingulas Matheſeos partes pertinentia recenſentur in Actis Eruditorum, Supplementorum Tom. IV. ſect. 7. p. 290. & ſeqq. Epitomen hanc Actorum Philoſophicorum ab An. 1700 uſque ad An. 1720, continuavit BENJAMINUS MOTTE, & ab An. 1720 uſque ad An. 1732, REIDIUS & JOHANNES GRAY. Continuationis primæ Volumen I, quod *Londini* 1721, in 4. prodiit (Alph. 3. plag. 18. Tabb. æn. 18.) Mathematica, Anatomica, Medica; ſecundæ vero Voluminis I pars prima, quæ *Londini* 1733, in 4. lucem adſpexit, (Alph. 2, plag. 7, Tab. æn. 12.) Mathematica ſola continet. Illa ſpecialius recenſentur in Actis Eruditorum An. 1723, p. 89. & ſeqq. hæc vero in Novis Actis Eruditorum An. 1735, p. 125. Cum lingua Anglica ſit minus trita & libri in Anglia impreſſi in aliis terris difficulter haberi poſſint; optandum foret, ut in Linguam Latinam, aut nimirum Gallicam verterentur. Equidem cum prima volumina in linguam Latinam translata ſuperiori ſeculo Lipſiæ ederentur, nullos fere invenerunt emtores, ut verſio continuata non fuerit: non tamen dubitandum eſt, fore ut noſtro ævo, ubi Matheſis & Phyſica plures numerat cultores, majore applauſu excipiantur *.

§. 37. Ab Anno *1699*, quo Academia Regia ſcientiarum Pariſiis florens, inſtaurata, ſingulorum annorum Hiſtoriam Gallico idiomate conſcripſit ejuſdem Secretarius FONTENELLIUS, quibus accedunt Commentarii Mathematici & Phyſici. Titulus cujuſlibet Voluminis eſt: *Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique & de Phyſique.* Imprimitur *Pariſiis* in 4. forma majore & recuditur in *Batavia* charactere minore, ut leviori pretio comparari poſſint hæc opera. In ſingulis voluminibus continentur, quæ ad Phyſicam generalem, ad Anatomiam, Chimiam, Botanicam, Geometriam,

* Autoris noſtri voto ſatisfecit Cl. BREMOND, non compendii *Lowthorpiani*, ſed ipſorum Actorum Societatis Londinenſis verſionem Gallicam ſuſcipiens. Ejus duo Volumina jam prodiere ſub Titulo, *Tranſactions Philoſophiques de la Societé Royale de Londres*, *années* 1735. & 1736, *Paris.* 4to. 1738. Item, *années* 1733 & 1734, *Paris.* 4to. 1740. Addatur Volumen ſub hoc Titulo, *Table des matiéres imprimées dans les Tranſactions Philoſophiques depuis 1665, juſques en 1735, &c. Paris* 4. 1739.

metriam, Aſtronomiam, Geographiam, Chronologiam & Mechanicam ſpectant, ſiquidem ad ſingulas haſce claſſes referendum ſchediaſmata a Membris fuerint exhibita & ſub finem Hiſtoriæ ſubjiciuntur Elogia Membrorum, quæ iſto anno, cujus hiſtoria exhibetur, diem ſupremum obierunt. Opus præclarum & omnibus Matheſeos ac Phyſicæ cultoribus nunquam ſatis commendandum continuatur in hodiernum uſque diem. Prolixum nimis foret de tot voluminibus ſigillatim dicere & in iis contenta recenſere. Adeat Diaria Eruditorum, in quibus eadem recenſentur, qui hoc deſiderat. Enimvero ne deeſſent ea, quæ ante inſtaurationem acta fuere, recentius edere libuit Collectionem Commentariorum Academiæ Regiæ ſcientiarum ab An. *1666*, quo fundata fuit, uſque ad An. *1699*, eadem forma, qua nunc pro ſingulis annis Hiſtoria cum ſuis commentariis edi ſolet, Tomis undecim. Tomo primo continetur Hiſtoria a prima origine An. *1666*, uſque ad An. *1686*; ſecundo Hiſtoria ab An. *1686*, uſque ad An. *1699*; tertio Commentarii in uſum Hiſtoriæ naturalis Animalium autore PERRALTIO; quarto Diſſertatio de principiis mixtorum naturalium DU CLOS, obſervationes ejuſdem de aquis mineralibus plurium Provinciarum Galliæ, Commentarii DODARTI in uſum Hiſtoriæ plantarum, ejuſdem deſcriptiones novarum quarundam plantarum, DE BEZE e S. J. Deſcriptiones quarundam arborum & plantarum exoticarum, quinto diverſa opera FRENICLII DE BESSY, ſcilicet Methodus inveniendi ſolutionem problematum per Excluſiones, Compendium Combinationum, Tractatus de Triangulis rectangulis in Numeris, Tractatus de Quadratis magicis, Tabula generalis Quadratorum magicorum, & BLONDELLI Reſolutio quatuor problematum principum Architecturæ; ſexto diverſa opera ROBERVALLII, ſcilicet obſervationes de compoſitione motuum, & de modo inveniendi tangentes curvarum, Idea libri Mechanicæ de motibus compoſitis, Tractatus de recognitione æquationum, de geometrica planarum & cubicarum æquationum reſolutione, de Indiviſibilibus, de Trochoide ejuſque ſpatio, epiſtola ÆGIDII PERSONERI de ROBERVAL ad Cl. P. MERSENNUM, epiſtola EVANGELISTÆ TORRICELLII ad ROBERVALLIUM, & Epiſtola ROBERVALLII ad TORRICELLIUM; præterea diverſa opera PICARDI, nimirum Praxis horologiorum ſolarium majorum per calculum, diſſertatio de Menſuris, una cum AUZOUTI comparatione menſurarum, de menſura liquidorum & aridorum, Experimenta circa aquas effluentes, fragmenta dioptrica, Tractatus de libellatione, ROEMERI de craſſitie & viribus tuborum in aquæductibus, ſecundum diverſas fontium altitudines diverſaſque tuborum diametros & ejuſdem Experimenta circa altitudines & amplitudines

dines projectionis corporum gravium, inſtituta cum argento vivo; ſeptimo Tractatus & obſervationes aſtronomicæ atque phyſicæ factæ in pluribus itineribus a Membris Academiæ & pluribus, quibus commercium literarium cum Academia fuit: octavo diverſa opera CASSINI, ſcilicet de Origine & progreſſu Aſtronomiæ & de ejus uſu in Geographia & Navigatione, Elementa Aſtronomiæ rectificata ex obſervationibus RICHERII factis in Inſula Cayennæ, Luminis cœleſtis, quod in Zodiaco apparet, detectio, Regulæ Aſtronomiæ Indorum computandi motus Solis & Lunæ, Reflexiones de Chronologia Sinarum, de Inſula *Taprobane*, Hypotheſes & Tabulæ Satellitum Jovis ex obſervationibus recentioribus reformatæ, Tabularum Satellitum Jovis uſus præcipui; nono diverſa opera DE LA HIRE, ſcilicet Tractatus de Mechanica, Tractatus de Epicycloidibus & earum uſu in Mechanica, Explicatio præcipuorum effectuum glaciei & frigoris, Diſſertatio de differentia ſonorum chordæ & Tubæ Marinæ, Tractatus de differentibus accidentibus viſus, Tractatus de Praxi Picturæ; decimo commentarii Mathematici & Phyſici Academiæ ſcientiarum Annorum 1692, 1693, &c. & Commentarii Mathematici & Phyſici Membrorum Academiæ ſcientiarum ex diverſis Diariis Eruditorum extracti; undecimo denique Analyſis generalis ſeu Methodi novæ reſolvendi problemata omnis generis & omnis gradus in infinitum, autore DE LAGNY. Volumen ſeptimum in duas partes dividitur, quarum utraque juſtum volumen conſtituit & multa continet, quæ ſigillatim recenſere nimis prolixum foret.

§. 38. Anno 1710, *Berolini* in 4. prodierunt *Miſcellanea Berolinenſia ad incrementum ſcientiarum ex ſcriptis Societati Regiæ exhibitis edita* (Alph. 2, plag. 6, Tabb. æn. 31.) Dividitur in tres partes, quarum prima literaria, ſecunda phyſica & medica, tertia Mathematica & Mechanica continet. Tertia mole ſua longe ſuperat duas priores. Hæc Miſcellanea deinceps continuata fuere ac in poſterum continuabuntur. Continuatio prima lucem adſpexit *Berolini* An. 1723, in 4 (Alph. 1, plag. 2, Tabb. æn. 8), ſecunda ibidem An. 1727, in 4. (Alph. 1, plag. 21, Tab. æn. 10.), tertia ſub Titulo Tomi quarti ibidem An. 1734, in 4. (Alph. 2, plag. Tabb. æn. 11.)

§. 39. Academia Scientiarum Petropolitana quinque ab Anno 1728 uſque ad An. 1738, *Petropoli* edidit Volumina in 4. charta auguſta ſub Titulo: *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* pro annis 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, & 1731. Sunt vero horum Commentariorum tres claſſes, nimirum Mathematica, Phyſica & Hiſtorica. Quæ in claſſe mathematica continentur, hujus ſunt loci & Matheſin inprimis ſublimiorem multum promovent,

quemadmodum ſuo loco clarius ediſſeremus. Cum enim hoc opus continuandum ſit in poſterum, ut de ſingulis in claſſe mathematica cujuſvis voluminis contenta ſigillatim dicamus præſentis inſtituti ratio non fert.

§. 40. Denique hic quoque commemorandi ſunt, *De Bononienſi ſcientiarum & Artium Inſtituto atque Academia Commentarii*, qui *Bononiæ* An. 1731, in 4. charta itidem auguſta lucem publicam adſpexerunt (Alph. 3, plag. 13, Tab. æn. 9.). Præfationis loco præmittitur Hiſtoria Bononienſis ſcientiarum Inſtituti: in Commentariis vero præter ea, quæ ad Hiſtoriam naturæ ſpectant, atque Chymica, Anatomica, Medica, Phyſica, continentur etiam Mechanica, Analytica, Geographica, Aſtronomica & Meteorologica. Subjunguntur iiſdem opuſcula varia quorundam Academicorum, inter quæ ad Matheſin ſpectant DOMINICI GUILIELMINI epiſtola hydroſtatica, EUSTACHII MANFREDII de meridianæ lineæ, quæ in D. *Petronii* exſtat, dimenſione & de noviſſimis circa fixarum ſiderum errores obſervationibus, GABRIELIS MANFREDII de formulis quibuſdam integrandis, JACOBI RICCATI virium elaſticarum leges, JOANNIS RIZETTI de corporum colliſionibus & inde orta motuum communicatione, & FRANCISCI MARIÆ ZANOTTI de motu compoſito & de reflexionibus globi in plano rectangulo.

§. 41. Ad præſentem ſcriptorum claſſem etiam referimus CASPARIS SCHOTTI, ſupra laudati, *Organon Mathematicum & Magiam Univerſalem Naturæ & Artis*. Organon Mathematicum editum eſt *Herbipoli* An. 1688, in 4. (5 Alph. Fig. æn. 1, Alph. 7 plag.). Ope tabularum quarundam Mathematicarum problemata Arithmetica, Geometrica, Architecturæ militaris, Chronologiæ, Gnomonicæ, Aſtronomiæ, Aſtrologiæ judiciariæ, Steganographiæ & Muſicæ facilia redduntur tyronibus. Magia in quatuor partes diviſa *Bambergæ* 1677, in 4. lucem adſpexit (14 Alph. Tab. æn. 89.). In Tomo primo continentur Optica, Catoptrica & Dioptrica; in ſecundo Acuſtica & Muſica; in tertio Mechanica, Statica, Hydroſtatica, Hydrotechnica, Aërotechnica, nec non Arithmetica, Geometrica: in quarto denique Cryptographica, Pyrotechnica, Magnetica, Sympathica, Medica, divinatoria, Phyſiognomica & Chiromantica.

§. 42. In eundem cenſum veniunt DANIELIS SCHWENTERI Mathematum & Linguarum orientalium in Academia Altorffina Profeſſoris, *Deliciæ Phyſico-Mathematicæ*, *Norimbergæ* 1636, in 4. primum editæ (Alph. 4 plag.) & poſtea a PHILIPPO HARSDORFFERO duobus Tomis auctæ (10 Alph. 8 plag.) Continentur in iiſdem ludicra varia, nonnulla etiam utilia, ex Arithmetica, Geometria, Stereometria, Muſica, Optica, Catoptrica, Aſtronomia, Aſtrologia, Gnomonica & Thaumatopoë-

poëtica, Statica, Mechanica, Pyrobolia, Pneumatica, Hydraulica, Arte ſcriptoria, Architectura & Chymia.

§. 43. Majorem ſelectum in ſimili ſcripto fecit OZANAM, quod ſub titulo *Recréations de Mathématique & de Phyſique*, *Pariſiis* 1696, in 8. reg. edidit (3 Alph. 7 pl. Tabb. æn. 44.) Recuſæ ſunt hæ Recreationes multo auctiores, quatuor Tomis, ibidem An. 1725, in 8. forma majore, (Alph. 5, plag. 6, Tabb. æn. 132). Tomus primus continet problemata Arithmeticæ, Geometriæ & Opticæ; ſecundus problemata Gnomonicæ, Coſmographiæ, Mechanicæ; tertius problemata Pyrotechniæ & Phyſicæ, & Tractatum de Horologiis elementaribus DOMINICI MARTINELI ex Italico in Gallicum idioma translatum. In quarto denique Tomo agitur de Phoſphoris naturalibus & artificialibus & lampadibus perpetuis, atque præſtigiatorum artificia, una cum aliis ludicris explicantur.

CAPUT II.

De Arithmetica.

§. 1. Arithmetica veterum ab Arithmetica hodierna prorſus erat diverſa. Veteres enim in eadem nonniſi varias numerorum diviſiones conſiderabant. Videre hoc eſt ex duobus *Arithmetices* libris, quos tertio Urbis conditæ ſeculo conſignavit NICOMACHUS, editis *Pariſiis* 1538. Eum ſequitur preſſo pede, ſexto a Chriſto nato ſeculo, ANITIUS MANLIUS SEVERINUS BOETHIUS in Arithmetica ſua.

§. 2. *Compendium Arithmeticæ* veterum compoſuit, nono poſt Chriſtum natum ſeculo, PSELLUS, a GUILIELMO XYLANDRO ex Græco idiomate in Latinum translatum, annotationibus auctum & *Baſileæ* 1556, in 8. in lucem publicam emiſſum. Recentius ſimile Compendium conſcripſit JODOCUS WILLICHIUS, ſub titulo: *Arithmeticæ libri tres* editum *Argentorati* 1540, in 8. (plag. 8.) Uſum habet in Idea exemplari definitionum animis tyronum ingeneranda, ut præcepta Logicæ facilius comprehendant & ad diviſionem rerum in ſua genera & ſpecies intimius perſpiciendam: de quo ſuo loco plura.

§. 3. Prolixius hoc Arithmeticæ genus illuſtrarunt, duodecimo poſt Chriſtum natum ſeculo, JORDANUS in duodecim *de Arithmetica* libris; & JACOBUS FABER *Stapulenſis* in Commentario in eoſdem An. 1480 edito.

§. 4. Arithmeticam theoreticam,

quæ numerorum proprietates expendit, illuſtravit EUCLIDES Elementorum libro VII, VIII, & IX. Sed de his Elementis dicemus plura in ſequente capite.

§. 5. Exactam theoriam ad demonſtrandas operationes communes Arithmeticæ practicæ cum innumeris integris, tum fractis ſive vulgaribus, ſive ſexagenariis, dedit BARLAAMUS MOMACHUS in *Logiſtica*, quam Latine reddidit & ſcholiis illuſtratam *Pariſiis* An. 1600, in 4. edidit JOANNES CHAMBERUS, Collegii Etonenſis apud Anglos ſocius. (1 Alph. 3 plag. Sed captum tyronum tranſcendit, quibus nimia accuratio inutilis, immo ridicula videtur.

§. 6. Frater LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI, Ordinis Minorum, Sacræ Theologiæ Magiſter, idiomate Italico An. 1523, edidit opus in fol. (6 Alph. 10 plag.) *de Arithmetica & Geometria.* Maxima operis pars Arithmeticæ impenditur, & in ea non modo diviſiones numerorum ex NICOMACHO & proprietates ex EUCLIDE traduntur; verum etiam Algorithmus cum in integris, tum in fractis, una cum extractionibus radicum, regulis proportionum & progreſſionum, nec non regula falſi & Algebræ explicatur.

§. 7. MICHAEL STIFELIUS, Paſtor Eccleſiæ Holtzdorffianæ, An. 1544, in 4. edidit *Arithmeticam integram* (1 Alph. 13 plag.), in qua multa tradit de numerorum cum rationalium, tum irrationalium, immo etiam Coſſicorum praxi, quæ alibi fruſtra quæſiveris, ſed ſine demonſtrationibus.

§. 8. *Arithmeticæ practicæ* opus abſolutum An. 1556 dedit NICOLAUS TARTAGLIA, Venetus, in duas partes diviſum, quarum prima arithmeticam practicam ad uſum vitæ humanæ applicatam, altera vero Algebræ fundamenta explicat.

§. 9. FRANCISCUS MAUROLYCUS in ſuis *Arithmeticæ* libris ſupra laudatis (§. 32. C. 1.) doctrinam de numeris figuratis promovit, & algorithmum, cum extractionibus radicum, atque aliis Arithmeticæ practicæ regulis rigoroſe demonſtravit: Sed ejus demonſtrationes non ſunt ad cujuſvis captum accommodatæ.

§. 10. GEORGIUS HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta & demonſtrata* (*Auguſtæ Vindelicorum* 1609, in 4. 2 Alph. 6 plag.) omnem praxin de numero vulgari, Coſſico & aſtronomico demonſtrat, & id ſingulare habet, quod demonſtrationes in ſyllogiſmos reſolverit.

§. 11. ANDREAS TACQUET in *Theoria & praxi Arithmetices* ſæpius recuſa (e. gr. *Amſtelodami* 1704, in 8. plag. 34. Tabb. 8.) Elementa EUCLIDIS Arithmetica facilius demonſtrat & praxes arithmeticas ſuis quoque demonſtrationibus munit. Unde non immerito commendatur hoc opus.

§. 12. Demonſtrationes in Arithmetica practica etiam affert DECHA-

LES

LES (§. 4. C. 1.) Sed negligunt CLAVIUS, HERIGONIUS, VINCENTIUS LEOTAUDUS e Societ. Jeſu, qui *Inſtitutionum arithmeticarum* libros quatuor compoſuit, SCHOTTUS & plerique alii (§. 5. & *ſeqq. Cap. cit.*). WALLISIUS calculum litteralem cum numerorum algorithmo conjunxit, & illius ope regulas fractorum, proportionum & extractionum radicum demonſtravit: ex quo compendium dedit EDUARDUS WELLS ſub titulo *Elementorum Arithmeticæ*, 1698, in 8. tyronibus calculi utriuſque commendandum.

§. 13. In *Elementis Arithmeticæ* non modo praxin, verum etiam theoriam demonſtravi, præſertim theoriam de ratione Quantitatum. Aſt in Elementis Germanicis dedi demonſtrationes ad captum tyronum magis compoſitas. Sunt vero eædem vere analyticæ, ex ipſa notione numeri deductæ: ex qua integram Arithmeticam practicam methodo analytica deduxi, ut ad meditandum formarentur ingenia ſtudio Arithmeticæ.

§. 14. Omittimus Autores alios, qui ſolam praxin tradiderunt, quamvis ad uſum communem commendari mereantur GEMMA FRISIUS in *Methodo facili Arithmeticæ practicæ* (*Vitebergæ* 1544, in 8. plag. 11), ex quo me puerum integram arithmeticam practicam, ipſam etiam extractionem radicum, proprio Marte didiciſſe memini, & ADRIANUS METIUS in *Arithmetica* duobus libris comprehenſa (*Hafniæ* 1640, in 4.). Recentius regulam generalem Arithmeticæ reſolvendi omnia problemata, quæ ratione nituntur, dedit K. F. DE REES, quæ ex idiomate Batavo in Germanicum translata publici juris facta *Gœttingæ* An. 1739, in 8. (plag. 12.). Uſui eſt illis, qui nulla theoria animum imbutum poſſident.

§. 15. SAMUEL MORLANDUS *Londini* An. 1673, in 12. (plag. 6½) idiomate Anglico emiſit *deſcriptionem duorum inſtrumentorum, quorum ope additio, ſubtractio & multiplicatio motu quorundam orbium abſolvitur.* Utrumque An. 1666, CAROLO II. Regi exhibuit. Sed multo ingenioſiorem machinam Arithmeticam in juventute ſua dudum invenit illuſtris LEIBNITIUS, de qua in Miſcellaneis Berolinenſibus pag. 394. nonnulla leguntur. Aliam utut minus perfectam, ingenioſam tamen dedit Cl. JOANNES POLENUS in *Miſcellaneis*, *Venetiis* 1709, in 4. (plag. 8. Tabb. 9.)

§. 16. Logiſticam decimalem prolixe ac perſpicue peculiari libro expoſuit JOHANNES HARTMANNUS BAYERUS, D. Medicinæ, An. 1619, *Francof. ad Mœnum* vernaculo idiomate in 4. edito (1 Alph. 6. plag.). Arithmeticam Logarithmicam vero optime explicuit in peculiari itidem volumine, de quo inter ſcripta Trigonometrica plura dicemus, BRIGGIUS.

§. 17. De Arithmetica autem decimali inprimis commendari meretur libellus, quem ſub Titulo: *A new*

and

and compleat Treatiſe of the Doctrine of fractions, vulgar and Decimal, Londini An. 1714, in 8. edidit SAMUEL CUNN, ubi omnia explicantur & exemplis illuſtrantur, quæ de uſu fractionum decimalium tenenda ſunt. Non inutilem operam ſumeret, qui eundem in linguam Latinam, vel etiam Germanicam transferret. Nos theoriam harum fractionum, quantum ad praxin ſufficit, expoſuimus & demonſtravimus Cap. 9 Elementorum Arithmeticæ. Hodie enim uſus earum prorſus egregius eſt, ubi ex æquationibus algebraicis radices per approximationem eruendæ & ſeries infinitæ ad communem uſum aptandæ.

§. 18. Virgulas ſuas, quibus magnorum numerorum multiplicationem ac diviſionem facilitavit, JOANNES NEPERUS, Baro Merchiſtonius, Scotus, in *Rhabdologia* (*Edinburgi* 1617, in 12. plag. 6.) deſcripſit. JOHANNES vero GEORGIUS HERWART AB HOHENBURG, U. J. Doct. ex Aſſeſſore ſummi tribunalis imperatorii & Cancellario ſupremo Bavariæ Ducis ejuſdem conſiliarius intimus, Præſes provinciæ Schvabæ & inclytorum utriuſque Bavariæ Statuum Cancellarius, *Monachii* An. 1710, in fol. reg. evulgavit Tabulas *Arithmeticas* προσθαφαιρέσεως *univerſales*, quarum ſubſidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per ſolam additionem & quotiens quilibet e diviſione eliciendus per ſolam ſubtractionem etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum ſit gnarus, exacte & celeriter invenitur (11 Alph. 9 plag.). NEPERUM imitatus SAMUEL REYHERUS, Mathem. Prof. Kilonienſis, Bacillos ſexagenales *Kilonii* 1688, in 4. publicavit, quorum ope Logiſtica ſexagenaria facile exercetur: de qua egimus Cap. 10. *Arithmeticæ.*

CAPUT III.

De Geometria.

§. 1. GEometria eſt vel theoretica, vel practica: theoretica vel elementaris, vel ſublimior.

§. 2. Geometriam elementarem conſcripſit EUCLIDES, cujus *Elementa* a variis in lucem edita fuere. Textum Græcum cum verſione Latina An. 1703. *Oxoniæ* in fol. (7 Alph. 17. plag.) ſub titulo ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ τὰ σωζόμενα, h. e. EUCLIDIS, *quæ ſuperſunt, omnia*, edidit DAVID GREGORIUS, Aſtronomiæ Profeſſor Savilianus. Anno 1530, in priora ſex Elementa Commentarium edidit ORONTIUS FINÆUS, in quo mentem EUCLIDIS tantummodo explicat, qualem

etiam

etiam An. 1557, dedit JACOBUS PELETARIUS. In Elementa omnia XV commentati ſunt circa idem tempus NICOLAUS TARTAGLEA, aliqua etiam de ſuo addens, & An. 1578, FRANCISCUS FLUSSATES CANDALLA, nobilis Gallus, qui ad Elementa decimum ſextum, ſeptimum, & octavum de ſolidorum corporum comparatione & inſcriptionibus variis adjecit. Elementa EUCLIDIS pariter ac FLUSSATIS cum commentario prolixo edidit CLAVIUS. Sæpius recuſa prodiere inter alia *Franc. ad Mœn.* 1654, in 8. duobus Tomis (Tom. I. 2 Alph. 4 plag. & Tom. II. 1 Alph. 20 plag.) atque etiam inter Opera ejus extant (§. 24. C. 1.) Bene quoque EUCLIDEM integrum explicarunt DECHALES (§. 4. C. 1.), HERIGONIUS (§. 1. cap. cit.), & inprimis concinna brevitate ISAACUS BARROWIUS, Matheſeos olim in Academia Cantabrigienſi Profeſſor. Sed quoniam integer EUCLIDES tyronibus parum utilis; ideo complures ſex tantum priora Elementa ediderunt, & ad ſummum undecimum & duodecimum adjecerunt. Prolixum nimis foret ſingulas recenſere editiones: ſufficit eas nominaſſe, quæ præ aliis commendari merentur. In hunc ergo cenſum referimus Elementa EUCLIDIS Gallica, quæ DECHALES ſigillatim edidit, & Elementa Geometriæ planæ & ſolidæ ANDREÆ TACQUET. Præſtantiſſima illorum editio eſt *Pariſina* An. 1709, in 12. reg. (12 plag. Tab. æn. 16.); horum vero *Cantabrigienſis* An. 1703, in 8. (plag. 16. Tab. 7.), quorum illam debemus OZANAMO, hanc vero GUILIELMO WHISTONO, tunc temporis Mathematum Profeſſori Cantabrigienſi. Continetur autem in Elemento VII, VIII, & IX, theoria numerorum ſeu Arithmetica elementaris: unde ANDREAS TACQUET tria hæc Elementa Arithmeticæ ſuæ inſeruit (§. 11. c. 2.). Opus hoc illuſtre inter ea eminet, quæ ex Antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut providentiæ divinæ tribuendum ſit, quod injuria temporum non interciderit.

§. 3. JOANNES SCHEUBELIUS, in Academia Tubingenſi EUCLIDIS Profeſſor, exiſtimans, præter inſtitutum EUCLIDIS, in deſignandis demonſtrationum momentis literarum figuras uſurpari, atque hac ratione & docentibus laborem ac moleſtiam augeri, & diſcentium intelligentiam impediri, An. 1550, novo conſilio Elementa ſex priora ita demonſtravit, ut literis remotis ſua unumquodque propria appellatione deſignarit. Prodiit opus *Baſileæ* in fol. præmiſſa brevi Algebræ deſcriptione. (3 Alph. 5 plag.)

§. 4. Alio conſilio An. 1565, CHRISTIANUS HERLINUS & CONRADUS DASYPODIUS demonſtrationes *Euclideas* in ſyllogiſmos reſolverunt: qui labor hunc uſum habere poteſt, ut appareat, quomodo ex plurium Syllogiſmorum concatenatione tan-

dem demonſtratio completa enaſcatur. Idem opus utrique debetur ex parte. Prodiit *Argentinæ* An. 1506, in fol. (Alph. 2, plag. 4, cum figuris ligno inciſis.). Titulus eſt: *Analyſes Geometricæ ſex librorum* EUCLIDIS, *primi & quinti a* CHRISTIANO HERPINO, *reliquæ, una cum Commentariis & ſcholiis perbrevibus in eoſdem ſex libros Geometricos, a* CONRADO DASYPODIO.

§. 5. Ordo EUCLIDIS diſplicuit PETRO RAMO, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ in *Scholis Mathematicis* lib. 6, & ſeqq. contra EUCLIDEM paſſim diſputat. Prodiere hæ Scholæ *Francofurti ad Mœnum* opera LAZARI SCHONERI An. 1599, in 4. (2 Alph. 17 plag.) continentes 1. exhortationem ad artes mathematicas, 2. diſputationes de præcipuis quibuſdam capitibus Arithmeticæ, & 3. diſcurſus de quindecim libris EUCLIDIS. Confer etiam lib. 3, pag. 94, & ſeqq. RAMUS itaque alia Geometriæ elementa conſcripſit libris 27 comprehenſa ſecundum ordinem Scholæ, a SCHONERO An. 1599, in 4. *Francofurti*, una cum libris 2 Arithmeticæ edita & *Euclideis* prælata. Titulus libri eſt: PETRI RAMI *Arithmeticæ Libri duo, Geometriæ ſeptem & viginti, a* LAZARO SCHONERO *recogniti & aucti* (2 Alph. 9 plag. cum figuris textui inſertis). Arithmetica magis practica, quam theoretica eſt, etſi theoria de ratione & proportione exemplis illuſtretur & ad praxin transferatur. Deficiunt tamen demonſtrationes accuratæ, quales dedit EUCLIDES. Adjecit SCHONERUS de numeris figuratis librum unum & RAMI Algebræ libros duos a ſe emendatos, atque de Logiſtica ſexagenaria librum proprium. In Geometria agitur primum de magnitudine in genere, deinde de lineis, poſtea de ſuperficiebus, tandem de ſolidis. Enimvero qui primus Geometriam ad ordinem Scholæ reformare auſus eſt, ſtatim exemplo ſuo docuit (quod ſupra §. 57. *Meth. Math.* annotatum eſt) accuratam demonſtrandi methodum cum ordine Scholæ ſubſiſtere non poſſe. Etſi enim SCHONERUS teſtetur, ſe in docenda Arithmetica & Geometria P. RAMI per multos annos verſatum, & quantum ex iis proficere liceat tyronibus experientia multiplici edoctum fuiſſe; hoc tamen non obſtat, quo minus EUCLIDEM ipſum RAMO præferamus. Neque enim SCHONERUS methodi ac rigoris in demonſtrando; ſed tantummodo doctrinæ rationem habet, quam ex RAMO facilius hauriri ac memoriæ imprimi poſſe facile conceditur. Nobis vero jam ſermo eſt de methodo, quæ cum rigore demonſtrandi conſiſtit, ut plenaria adſit convictio eaque immota, quocunque tandem acumine demonſtrationem perluſtres. Hanc deſiderari in RAMO, nec cum eo ordine, quo doctrinas congeſſit, conſiſtere poſſe contendimus.

§. 6.

§. *6.* Idem apparet etiam ex ceterorum ſcriptis, qui poſt RAMUM idem conſilii ceperunt. Pertinent huc 1. *Elementa Geometriæ* IGNATII GASTONIS PARDIES e Societate Jeſu, quartum *Hagæ Comitum* An. 1680, in 12 (plag. 8) recuſa & a ſumme Reverendo Abbate SCHMIDIO, Helmſtadienſium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Matheſin & Philoſophiam profiteretur, ex Gallico ſermone in Latinum translata. Extant in Opuſculis ejus mathematicis, quæ ſub titulo: *Oeuvres de Mathématique*, *Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. prodiere, in quibus præter hæc elementa libris IX. comprehenſa continetur Diſcurſus de motu locali; Statica, & Deſcriptio duarum machinarum deſcribendis horologiis Solaribus convenientium. 2. *Nova Elementa Geometriæ* ARNALDI, ſuppreſſo nomine, Anno 1667, *Pariſiis* primum edita in 4. dein An. 1685, ibidem & An. 1690 *Hagæ Comitum* in 8. recuſa (plag. 21.) idiomate Gallico 3. *Elementa Geometriæ* Gallica R. P. BERNHARDI LAMY An. 1685, *Pariſiis* in 12. primum edita & An. 1710, ibidem multo auctiora recuſa, ita ut nunc ſingulæ EUCLIDIS propoſitiones, exceptis Elementis ſeptimo, octavo & nono de numeris agentibus, in iiſdem contineantur una cum introductione ad ſectiones conicas (plag. 21.) 4. *Elementa Geometriæ Sereniſſimi Burgundiæ Ducis* Gallice conſcripta (*Trevoltii* 1705, in 4. reg. 1 Alph. 7 plag.) concinna brevitate maxime neceſſaria methodo *Arnaldiana* evolventia *. Omittimus alia, quæ minoris ſunt momenti & ex hiſce compilata.

§. 7. Integrum quoque EUCLIDEM alio ordine digeſſit & novis paſſim demonſtrationibus munivit Cl. PETRUS POLYNIER, Medicus Pariſienſis, in Elementis Geometriæ, quæ una cum Elementis Arithmeticæ ſub titulo: *Elémens des Mathématiques*, *Pariſiis* 1704, in 12. reg. (1 Alph. 4 plag.) edidit. Contra quæ ex EUCLIDE cognitu minus neceſſaria ſunt, omiſit, & neceſſaria alio ordine digeſſit, aliterque ſubinde demonſtravit Cl. ANGELUS DE MARCHETTIS in Piſana Univerſitate Mathematum Profeſſor in EUCLIDE, quem vocat, *Reformato* (*Liburni* 1709, in 4. 1 Alph. 10 plag.)

§. 8. Præter nos alii etiam Mathematici agnoverant, reformatores Elementorum EUCLIDIS non fuiſſe in auſu ſuo ſatis felices; ſed EUCLIDIS Elementis palmam adhuc merito tribuendam eſſe. Memini hanc fuiſſe LEIBNITIO ſententiam, cum me inviſeret, dum Elementis Geometriæ concinnandis operam darem, ipſique referrem me multiplici modo tentaſſe, ut eo ordine Elementa Geometriæ digererem, quo uſus eſt BERNHARDUS LAMY, ſed nunquam hoc fieri potuiſſe, niſi quædam aſſumerem abſ-

* Elementorum horum Autor Dn. DE MALESIEUX.

que demonſtratione, quæ eſſent demonſtranda, vel in demonſtrando ac definiendo admitterem confuſe tantummodo percepta. In Anglia JOANNES KEIL, ut Matheſeos Studioſos ad Elementa EUCLIDIS reduceret, eo fine *Oxonii* An. 1715, in 8. (Alph. 1, plag. 6, cum figuris textui inſertis), imprimi curavit Elementa ſex priora EUCLIDIS una cum decimo & undecimo ex verſione FREDERICI COMMANDINI. In præfatione, quam iiſdem præmiſit, graviter invehitur in eos, qui EUCLIDEM carpunt, & ab ejus lectione juvenes abducunt. Addidit Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ, atque Tractatum de natura & Arithmetica Logarithmorum.

§. *9*. Præter ordinem, quem EUCLIDES in Elementis ſuis tenet, multi ex antiquis pariter ac recentioribus Geometræ, tres ſibi viſi ſunt deprehendiſſe nævos in ejuſdem Elementis, quorum primus reſpicit definitionem parallelarum & ſub ea axioma, quod apud CLAVIUM eſt decimum tertium libri primi; ſecundus definitionem ſextam libri quinti, quæ eſt æque proportionalium; & tertius definitionem quintam libri ſexti de compoſitione rationum. Ab his nævis eum vindicare aggreſſus eſt HIERONYMUS SACCHERIUS, Societatis Jeſu, in Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſor, in Opuſculo, quod ſub titulo: EUCLIDES *ab omni nævo vindicatus*, ſive *Conatus Geometricus*, *quo ſtabiliuntur prima ipſa univerſæ Geometriæ principia*, *Mediolani* 1733, in 4. (plag. 20, Tab. æn. *6*).

§. 10. Nos equidem in Elementis hiſce Matheſeos non exhibuimus Elementa EUCLIDIS ipſa; nihil tamen in iis occurrit, quod non reperiatur vel in Arithmetica, vel in Geometria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonſtrandi conſuleremus & demonſtrationes ita componeremus, ut eſſent conſummatæ eo ſenſu, quem in Logica Latina (*§*. *799*, 854, 855) explicamus, ad uſum tamen tyronum compoſitæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.

§. 11. Quæ in EUCLIDE de Circuli, Sphæræ, & Cylindri dimenſione defuere; ea ſupplevit ARCHIMEDES in duobus *de Sphæra & Cylindro Libris*, & *de Circuli dimenſione* Libello unico: ex quibus ſelecta theoremata ad faciliorem tyronum intelligentiam propoſuit TACQUETUS ſub finem Geometriæ ſupra laudatæ (§. 2). Idem ARCHIMEDES Libros alios de *Spiralibus*, de *Conoidibus & Sphæroidibus*, & de *Quadratura Parabolæ* ſcripſit. Opera ejus una cum *Conicis* APOLLONII & *Sphæricis* THEODOSII edidit facilioribus cum demonſtrationibus ISAACUS BARROWIUS *Londini* 1675, in 4. (Opera ARCHIMEDIS conſtant 24 plag. Tabb. æn. 13.

APOLLONII 14 plag. Tab. 12, & THEODOSII plag. 6, Tab. 3). Præter vero Geometrica in operibus ARCHIMEDIS una continentur Libri *de æquiponderantibus & inſidentibus humido: Arenarium* tamen ejus omiſit BARROWIUS, qui in alia editione una comparet, quæ *Panormi* An. 1685, in fol. prodiit, & cujus ſingularia fata in Actis Eruditorum An. 1687, p. 543, & 544, recenſentur. Germanicam operum ARCHIMEDIS verſionem (Libris de inſidentibus humido exceptis) dedit JOH. CHRISTOPH. STURMIUS (*Norimbergæ* 1670, in fol. 6 Alph. 2 plag.)

§. 12. Archimedea promovere ſtuduit JOHANNES KEPLERUS in *Nova Stereometria doliorum vinariorum*, inprimis Auſtriaci (*Lincii* 1615, in fol. plag. 28), quæ una continet ſupplementum ad ARCHIMEDEM de Stereometria figurarum Conoidibus & Sphæroidibus proxime ſuccedentium. Ex Latino in Germanicum verſam eandem anno ſequenti edidit, ſed paſſim mutatam, alicubi etiam practicis nonnullis auctam. Ejus exemplo excitatus BONAVENTURA CAVALERIUS, ordinis S. Hieronymi, olim Mathematum Profeſſor Bononienſis (quemadmodum ipſe in præfatione fatetur) adhuc ulterius progreſſus plurium, quam ARCHIMEDES & KEPLERUS, ſolidorum per revolutionem ſectionum conicarum circa axem aut rectas alias dedit nova methodo indiviſibilium, quam vocat, a KEPLERO part. 1. theor. 2. Stereom. indicata, in *Geometria indiviſibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (*Bononiæ* 1653, in 4. 3 Alph. 1 plag.) Similiter *Archimedea* illuſtravit atque promovit EVANGELISTA TORRICELLIUS, magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, in *Operibus Geometricis de Solidis ſphæralibus*, *de motu*, *de dimenſione parabolæ*, *de ſolido hyperbolico cum appendicibus*, *de cycloide & cochlea* (*Florentiæ* An. 1644, in 4. 2 Alph.)

§. 13. Præter ea, quæ ARCHIMEDES ad ſublimiorem Geometriam ſpectantia tradidit, Veteres inprimis ad eandem *Sectionm Conicarum* doctrinam referebant, de quibus opus abſolutum VIII Libris comprehenſum compoſuit APOLLONIUS *Pergæus*, quorum quatuor priores ſæpius editi. Inter optimas editiones refertur, quam cum Commentariis prolixis An. 1655, in fol. (5 Alph. 19 plag. Tabb. æn. 30.) *Antverpiæ* in lucem emiſit CLAUDIUS RICHARDUS, e Societate Jeſu, quales etiam in EUCLIDIS Elementa XV, An. 1645, in fol. dederat integro volumine comprehenſos. Quintum, ſextum & ſeptimum, qui pro amiſſis habebantur, ex Arabico MSC. ABALPHATI *Aſpahanenſis* opera ABRAHAMI ECCHELLENSIS *Maronitæ*, Linguarum Orientalium Profeſſoris Romani, in vertendis uſus, *Florentiæ* 1641, in fol. (4 Alph. 21 plag.), cum *libro Aſſumtorum* ARCHIMEDIS in lucem protraxit JOH. ALPHONSUS BORELLUS, in Academia Piſana Mathe-

ſcos Profeſſor. Antequam vero iidem prodirent, VINCENTIUS VIVIANI, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, ex deſcriptione PAPPI librum quintum feliciter reſtituit, & ſub titulo *Divinationis Geometricæ* in quintum Conicorum APOLLONII *Pergæi* adhuc deſideratum, *Florentiæ* 1659, in lucem emiſit; quo ſucceſſu felici permotus ex intervallo An. 1701, addidit *de locis ſolidis ſecundam divinationem Geometricam* in quinque libros injuria temporum amiſſos ARISTÆI ſenioris Geometræ (*Florentiæ* in fol. 3 Alph. 15 plag.). Scripta VIVIANI uſui eſſe poſſunt illis, qui methodo demonſtrandi veterum in Geometria ſublimiori delectantur. Præſtantiſſimam operum APOLLONII editionem dedit Celeberrimus HALLEJUS *Oxoniæ* An. 1710, in fol. (5 Alph. 16 plag.). Acceſſere eidem SERENI Libri duo de *Sectione Cylindri & Coni*, qui primum Græce editi, & APOLLONII liber octavus ab HALLEJO reſtitutus.

§. 14. Inter recentiores doctrinam conicam illuſtrarunt varii. Commendari meretur opus de *Sectionibus Conicis* CLAUDII MYDORGII An. 1632, *Pariſiis* in fol. publicatum, in quo & proprietates earundem demonſtrantur, & deſcriptiones variæ docentur. Huic præferendus GREGORIUS A S. VINCENTIO, e Societate Jeſu, qui in *Opere Geometrico Quadraturæ circuli* & *Sectionum Coni*, 10 Libris comprehenſo ad inventa recentiora viam ſtravit, ita ut LEIBNITIUS in Actis Eruditorum An. 1691, p. 438, fateatur, ſibi in interiori Geometria hoſpiti, cum opus hoc GREGORII A S. VINCENTIO, una cum HUGENII libro de Horologio oſcillatorio & DETTONVILLÆI (hoc eſt, PASCALII) Epiſtolis legeret, ſubito affulſiſſe lucem & ſibi & aliis inexpectatam. Prodiit opus inſigne *Antverpiæ* 1647, in fol. (14 Alph.) & præter conica in eodem continentur variæ linearum inter ſe proportiones, triangulorum novæ proprietates, rectangulorum proportiones, progreſſionum Geometricarum etiam in infinitum progredientium miræ proprietates, multa de circulo alibi minus obvia, doctrina de ductu plani in planum, de proportionalitatibus Geometricis theoria nova, ungularum item, conoidum & ſphæroidum doctrina. Abſolutum quoque *Sectionum conicarum* opus debemus induſtriæ PHILIPPI DE LA HIRE (*Pariſ.* An. 1685, in fol. 2 Alph. 18 plag.), in quo præter APOLLONIANA plurima alia methodo veterum demonſtrantur: ex quo in gratiam tyronum compendium fecit JACOBUS MILNES impreſſum *Oxonii* An. 1702, in 8. (12 plag. & 19 Tab. Fig.) & recuſum emendatius atque auctius ibidem 1712, in 8. (15 plag. Tabb. 19) ſub titulo; *Elementa Sectionum Conicarum nova methodo demonſtrata.*

§. 15. Ipſe etiam celeberrimus DE LA HIRE in eorundem gratiam Ele-

Elementa Sectionum conicarum, *Pariſiis* An. 1679, in 12. in lucem emiſit una cum conſtructione locorum geometricorum & æquationum, de qua in capite ſubſequente. Titulus opuſculi: *Nouveaux Elémens des Sections Coniques, les lieux Géométriques, la conſtruction des Equations.* (plag. 21.) Similis iiſdem eſt Tractatus OZANAMI Gallicus *de lineis primi generis, locis Geometricis & conſtructione æquationum* (*Pariſiis* 1687, in 4. 1 Alph. 15 plag. Tab. æn. 35). Nominandus hic quoque eſt *Tractatus de Sectionibus cylindri & coni in ſolido & plano conſideratis, cum demonſtrationibus ſimplicibus ac novis*, quem ſermone Gallico *Pariſiis* An. 1704, in 8. edidit POIVRE (5 plag. & 8 Tabb. æn.). De aliis Conicorum ſcriptoribus dicemus capite ſequente.

§. 16. Commemoranda tamen de iiſdem adhuc nonnulla ſunt, quæ hic apprime locum merentur. Nimirum GUIDO GRANDUS, cum intelligeret, deſiderari libellum Conicorum ad captum tyronum, cujus defectu doctrina conica in Scholis vulgo negligitur; eundem ſupplevit & methodo veterum conſcripſit libellum mole parvum, ſed rerum ubertate gravem, in quo præcipua de ſectionibus conicis theoremata demonſtrat. Prodiit *Florentiæ* An. 1722, in 12. (plag. $6\frac{1}{2}$, Tabb. æn. 7.) ſub titulo: *Compendio delle ſezzioni coniche d'Apollonio.* Quoniam hoc compendium commendari meretur Matheſeos Studioſis, CHRISTIANUS AUGUSTUS HAUSEN, Matheſeos Profeſſor Lipſienſis, verſionem hujus opuſculi Latinam in gratiam auditorum adornaſſe dicitur in Actis Eruditorum ſupplement. Tom. VIII, ſect. X, hinc inde tamen quædam immutaſſe. Equidem VINCENTIUS SANTINI, Florentinus, ſimile Compendium dare conatus eſt *Lucæ* 1722, in 8, (plag. 6, Fig. 28) ſub titulo: *Delle ſezzioni coniche dedotte nuovamente in Piano dal cerchio*, in quo nova ratione ſectiones conicas in plano a circulo deducit; ſed demonſtrationes ejus laborare circulo vitioſo jam annotarunt Collectores Actorum Eruditorum *loc. cit.* p. 432. NICOLAUS DE MARTINO, Regius Mathematum Profeſſor Neapoli, duobus Tomis *Elementa Sectionum conicarum* edidit *Neapoli* An. 1734, in 8. charta auguſta (Tom. I, plag. $21\frac{1}{2}$, Tabb. æn. 8, Tom. II, plag. 22, Tab. æn. 8.). Conſcripſerat hæc Elementa ad uſum FAUSTINÆ PIGNATELLI, Principis Culubranenſis & Tolvenſis Ducatus hæredis; poſtea in gratiam ſtudioſæ juventutis publici juris fecit. Omiſſis propoſitionum, ſcholiorum & corollariorum titulis, continuo textu ad morem vulgarem extra Matheſin receptum cuncta demonſtrat. Præter Sectionum conicarum proprietates, earum uſum in conſtruendis problematis ſolidis docet, præmiſſis iis, quæ cum in genere de conſtructionibus geometricis, tum problematum planorum ſciri debent.

§. 17.

§. 17. Præter Conica apud veteres in Geometria ſublimiori celebre fuit Problema Deliacum de duplicando cubo, ſeu, quod eodem recidit (§. 626, *Anal. ſin.*), de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas: quem in finem excogitatæ ſunt variæ lineæ curvæ a PAPPO *Alexandrino* in *Collectionibus Mathematicis* conſervatæ. Earum duo Libri priores hactenus deſiderantur. Sex poſteriores *Bononiæ* 1660, in fol. editi (Alph. 5, plag. 9, cum figuris textui inſertis, continent, inter alia ſolutiones varias problematis Deliaci, triſectionem anguli, iſoperimetrorum doctrinam, ſphærica nonnulla, & quædam ad Mechanicam ſpectantia. Varia etiam ſcripta Geometrarum veterum in præfatione ad librum ſeptimum recenſet PAPPUS.

§. 18. Inter præcipua inventa Geometrica ſuperioris ſeculi refertur methodus centrobaryca PAULI GULDINI, e Societate Jeſu, de qua diximus in Mechanica & Statica (§. 164). Prodiit ejus liber primus *de centro gravitatis, una cum Tabulis numerorum quadratorum & cubicorum decies millium*, *Viennæ Auſtriæ* 1635, in fol. (4 Alph. 21 plag.). Acceſſere libri ſecundus, tertius & quartus An. 1640, (4 Alph. 14 plag.). Libro primo adjuncta eſt diſſertatio de motu terræ ex mutatione centri gravitatis ipſius proveniente.

§. 19. Curvarum doctrinam univerſalius pertractavit & multis novis inventis auxit ISAACUS BARROWIUS ſupra laudatus in egregio opere *Lectionum Geometricarum*, *Londini* 1674, in 4. (plag. 21, Tabb. 13) Elementa curvarum in uſum tyronum hactenus deſiderantur, qualia tamen proſtare conſultum foret.

§. 20. Alia ſcripta particularia ad Geometriam theoreticam ſpectantia nimis longum foret hic recenſere. Quædam tamen recenſere lubet. Pertinet huc CHRISTIANI HUGENII liber *de circuli magnitudine*, *Hagæ Comitum* An. 1644, in 4. (plag. 5, cum figuris textui inſertis) & ejuſdem *Theoremata de Quadratura Hyperboles*, *Ellipſis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro*, *Lugduni Batavorum* An. 1651, in 4. (plag. 6½ cum figuris textui inſertis.). Uterque Tractatus legitur Operum variorum Tomo ſecundo (§. 35, c. 1).

§. 21. Affinia his ſunt LUDOLPHI A CEULEN, Hildesheimenſis, *de Circulo & Adſcriptis* liber, ex vernacula in Latinam translatus & annotationibus illuſtratus a WILLEBRORDO SNELLIO (*Lugd. Batav.* 1619, in 4. plag. 8) & ejuſdem *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* cum eorundem uſu in variis problematis Geometricis, partim ſolo linearum ductu, partim per numeros irrationales & tabulas ſinuum & Algebram ſolutis, a SNELLIO itidem Latine verſa, *Lugd. Bat.* 1615, in 4. (1 Alph. 16 plag.)

§. 22. LAURENTIUS LORENZINIUS, Diſci-

Diſcipulus VINCENTII VIVIANI, edidit *Florentiæ* An. 1721, in 4. (plag. 20, Tabb. æn. 14.) *Exercitationem Geometricam*, in qua agitur de dimenſione omnium conicarum ſectionum, curvæ parabolicæ, curvæque ſuperficiei Conoidis parabolici. Solvit more veterum per demonſtrationes problemata, quæ hodie per Algebram ſolvi ſolent. Unde ejus lectio commendanda iis, qui methodum veterum ſibi familiarem reddere geſtiunt. Cum viginti annos in vinculis duro fato detineretur, ab omni commercio cum hominibus literatis remotus, nullius libri uſu conceſſo, methodum iſtam excoluit & duodecim libros de ſectionibus conicis & cylindricis eorumque ſolidis conſcripſit, ultra APOLLONII & VIVIANI inventa progreſſus. Ex carcere igitur tandem dimiſſus, ubi cognoviſſet, quæ nunc agerentur a Geometris, ſublimiora quoque meditari cœpit, ſed conſueta ſibi utens methodo. Sex itaque compoſuit Exercitationes, quarum prima eſt, quæ hic commemoratur: ceteræ enim, quantum conſtat, lucem publicam non adſpexerunt.

§. 23. *Comes de* PAGAN, cujus non minus in Aſtronomia, quam Architectura militari celebre eſt nomen, decem edidit libros Theorematum Geometricorum ſub titulo: *Les dix Livres des Theorémes Géometriques du Comte de* PAGAN, *Pariſiis* 1654, in 8. (1 Alph. 5 plag.), in quibus de lineis 4 proportionalibus, de ſectionibus conicis, de theoria planetarum elliptica, de munitionibus regularibus & de navigatione agit. Proſtant etiam ISMAELIS BULLIALDI *de Lineis ſpiralibus demonſtrationes novæ* (*Pariſ.* 1657, in 4. plag. 18.) & ejuſdem *Exercitationes Geometriæ circa demonſtrationes per inſcriptas & circumſcriptas figuras, circa conicarum ſectionum quaſdam propoſitiones, & de poriſmatibus* (*Pariſ.* 1657. in 4. plag. 6).

§. 24. STEPHANUS DE ANGELIS, Nobilis Venetus, Ordinis Jeſuatorum S. Hieronymi, methodum CAVALERII excoluit, ejus uſum inſignem demonſtraturus, cum non deeſſent, qui eandem impugnarent & contemnerent. Edidit *Venetiis* An. 1658, in 4. (Alph. 1, plag. 14, cum figuris textui inſertis) *Problemata Geometrica Sexaginta circa Conos, ſphæras, ſuperficies conicas ſphæricasque præcipue verſantia*; ibidem An. 1656, in 4. *Libros quatuor de infinitis parabolis infinitiſque ſolidis ex variis rotationibus ipſarum partiumque earundem genitis, una cum nonnullis ad prædictarum magnitudinum aliarumque centra gravitatis attinentibus* (Alph. 2, plag. 7). Addidit An. 1663, librum quintum (plag. 14). Ibidem 1659, in 4. in lucem publicam emiſit *Miſcellaneum hyperbolicum & parabolicum*, in quo præcipue agitur de centris gravitatis hyperbolæ, partium ejuſdem, atque nonnullorum ſolidorum, de quibus nunquam Geometria locuta eſt. Parabola noviter quadratur dupliciter, ducun-

ducuntur infinitarum parabolarum tangentes, aſſignantur maxima inſcriptibilia, minimaque circumſcriptibilia infinitis parabolis, conoidibus ac ſemifuſis parabolicis, aliaque geometrica nova exponuntur ſcitu digna (Alph. 1, plag. 11). An. 1660, ibidem prodiit ejus *Opuſculum Geometricum de infinitorum ſpiralium ſpatiorum menſura* (plag. 16) & tandem An. 1661, publici juris facti Tractatus de *infinitarum cochlearum menſuris ac centris gravitatis* (plag. 16), & Tractatus duo *de ſuperficie Ungulæ & de Quartis Liliorum parabolicorum & cycloidalium* (Alph. 1, plag. 19). Atque adeo patet, quod ſuo tempore Geometriam ſublimiorem multum promoverit, aliiſque viam ad ulteriora monſtraverit.

§. 25. FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenſis, in Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſor, *Exercitationum mathematicarum* libros quinque *Lugduni Batavorum* in 4. An. 1657, (Alph. 3) edidit, in quibus habentur varia tum ad Geometriam elementarem, tum ſublimiorem ſpectantia, una cum tractatu de ſectionum conicarum in plano deſcriptione, qui ſigillatim prodiit (*Lugd. Batav.* 1646, in 4. plag. 17). Nimirum libro primo continetur propoſitionum arithmeticarum & geometricarum centuria, ſecundo conſtructio problematum ſimplicium geometricorum, tertio APOLLONII *Pergæi* loca plana reſtituta, quarto organica conicarum ſectionum in plano deſcriptio, & quinto ſectiones miſcellaneæ triginta. Colophonis loco adjicitur HUGENII Tractatus de *Ratiociniis in ludo aleæ*, qui inter opera varia Vol. 2, legitur (§. 35, C. 1).

§. 26. JACOBI DE BILLY, e Societate Jeſu, tractatus *de proportione harmonica*, An. 1658, editus, in quo varia problemata ejus ope ſolvuntur. ANTONII LALOVERÆ, e Societate Jeſu, *Geometria veterum promota*, ſeu libri ſeptem de Cycloide *Toloſæ* 1660, prodiere, quibus multa continentur ad Geometriam ſublimiorem ſpectantia. Extat etiam FERDINANDI ERNESTI *Comitis ab* HERBERSTEIN *Diatome Circulorum ſeu ſpecimen Geometricum*, quo Lunularum, Curvilineorum aliorumque ſpatiorum propoſitiones demonſtrat (*Pragæ* 1710, in 8. 1. Alph. Tab. 1): VINCENTII VIVIANI *Exercitatio mathematica de formatione & menſura fornicum* (*Florentiæ* 1692, in 4. plag. 6): JOH. BAPTISTÆ PALMÆ in *Geometriam Exercitationes* (*Neapoli* 1689, in 4. plag. 16) 100 propoſitiones, quæ ad Geometriam elementarem pertinent, continentes.

§. 27. ANGELUS DE MARCHETTIS, in Piſana Univerſitate ſcientiarum mechanicarum Profeſſor, *Piſtoriæ* An. 1695, in 4. (plag. 14) ſermone patrio edidit Tractatum de natura rationis & proportionis nova, facili & ſecura methodo explicata. Titulus libelli eſt: *La Natura della proporzione & della proporzionalità.* In

eo aliam viam ingreſſus eſt, quam Euclides, aliam quoque, quam alii recentiores ab Euclide recedentes calcarunt. Cum intellexiſſet, eundem probari Stephano de Angelis, Dominico Gulielmino, Francisco Spoleti, *Collectoribus Actorum Eruditorum* in Actis An. 1696, p. 244, 245, in Latinam linguam ipſum tranſtulit: Qua data occaſione cetera quoque Euclidis Elementa tam plana quam ſolida in breviorem & meliorem formam redigere voluit. Unde enatum eſt opus Elementorum planorum & ſolidorum Geometriæ, quod ſub titulo: Euclides *Reformatus* prodiit & quod ſupra laudavimus (§. 7).

§. 28. Ad libros analyticos veterum, quorum memoriam conſervavit Pappus in præfatione ad librum ſeptimum Collectionum mathematicarum referendi ſunt Apollonii *Pergæi de ſectione rationis* Libri duo ex arabico latine verſi, & de *ſectione ſpatii* Libri duo reſtituti ab Edmundo Halley ac editi *Oxonii* 1706, in 8. (1 Alph. 3 plag.).

§. 29. Ad Geometriam quoque ſpectat *Sphæricorum* doctrina, quæ circulorum in ſuperficie Sphæræ deſcriptorum & ſeſe mutuo interſecantium proprietates explicat. Eam olim tribus libris comprehendit Theodosius, quos Tomo primo Curſus Mathematici exhibet Dechales, ut ſupra monuimus (§. 4). Eoſdem nova methodo illuſtravit & ſuccincte demonſtravit Isaacus Barrowius atque *Londini* 1675, in 4. (plag. 6, Tab. æn. 3) edidit, ſubjunctos operibus Archimedis & Apollonii. Aliqua hujus doctrinæ etiam attingit Pappus libro ſeptimo collectionum mathematicarum, ubi addit, quæ in Theodosio deſiderantur ſcitu neceſſaria.

§. 30. *Geometriam practicam* omnium abſolutiſſimam, ſed ſine demonſtrationibus dedit Malletus, quatuor Tomis idiomate Gallico conſcriptis comprehenſam (*Pariſ.* 1702, in 8. reg. Tom. I, plag. 23, Tom. II, plag. 26, Tom. III, plag. 24, Tom. IV, plag. 18). In Geodæſia declaratur uſus ſemicirculi, quadrati Geometrici, circini proportionum, Aſtrolabii, pixidis magneticæ, baculi Jacobi & menſulæ geometricæ. Singula folia Figuris elegantibus, ſed ad rem parum facientibus exornantur.

§. 31. Germanico idiomate Geometriam practicam conſcripſit Daniel Schwenterus, Profeſſor olim Mathematum Altorfinus, cum notis Johannis Boeckleri, *Norimbergæ* 1667, in 4. (4 Alph. 18 plag.) recuſam. Praxis in charta cum demonſtrationibus docetur: in campo ſolus baculorum & menſulæ geometricæ uſus oſtenditur, ſterometria deſideratur. Unde inſtar ſupplementi eſſe poteſt Johannis Hartmanni Beyeri, Med. D. Stereometria, quam ſub titulo: *Eine neue und ſchône Art der vollkommenen Viſir-Kunſt*, *Franc. ad Mœn.* 1603, in 4. (1 Alph. 7 plag.) edidit. Autor inprimis Stereometriam

metriam doliorum plenius explicat, quam ab aliis factum. Cum tamen doliorum non plenorum ſtereometriam non attigiſſet; An. 1619, addidit Conometriam Mauritianam vernaculo itidem ſermone conſcriptam. (*Franc.* in 4. plag. 11), in qua ſtereometria doliorum tam plenorum, quam non plenorum traditur. Ceterum idem Autor de virgula pithometrica conficienda ibidem 1620, plagulam unam adjecit.

§. 32. Ante SCHWENTERUM in uſum agrimenſorum BERNARDUS CANTZLERUS edidit tractatum geodæticum ſub titulo: *Kurtzer und leichter Bericht vom Feldmeſſen*, quem ABDIAS TREW Matheſ. Prof. Altorfinus multis annotationibus auxit, ita ut ſub titulo: *Summa Geometriæ practicæ* An. 1673, *Norimbergæ* in 8. (plag. 33, Tab. æn. 55) edi meruerit.

§. 33. Nomen Autoris commendat ſcholam agrimenſorum, quam PHIL. DE LA HIRE ſub titulo: *l'Ecole des Arpenteurs*, *Pariſ.* Anno 1689, in 8. edidit. Prodiit tertia vice *Pariſ.* An. 1728, in 12. reg. (plag. 16). Explicantur in hoc libello operationes arithmeticæ & trigonometricæ cum principiis Geometriæ, quibus agrimenſores habent opus. Deinde exponuntur praxes Geodætarum & ſubjicitur deſcriptio artis libellandi. Nec minus laudem merentur CLAVII (§. 24, TACQUETI (§. 28), OZANAMI Geometriæ practicæ (§. 7), hujuſque *Méthode facile pour arpenter, ou meſurer toutes ſortes de ſuperficies & pour toiſer exactement la Maçonnerie, les vuidanges des Terres & tous les autres corps, dont on peut avoir beſoin dans la pratique.* Prodiit denuo *Pariſiis* An. 1725, in 12 reg. (plag. 12). Explicantur etiam in hoc libello operationes Arithmeticæ & Trigonometricæ ac principia Geometriæ agrimenſoribus ſcitu neceſſaria. Eundem cum PHILIPPO DE LA HIRE ſcopum ſibi præfixit HENRICUS WILSON in libro Anglico, quem ſub Titulo: *Surveying improved*, *Londini* 1726, in 8. reg. (Alph. 1, Tabb. æn. 11) edidit, in ſuo genere ſatis conſummatum. Solet vulgo inſtitutionibus Architecturæ militaris præmitti Geometria practica.

§. 34. ADRIANUS METIUS 1725, in 4. edidit *Arithmeticæ* libros duos & *Geometriæ* libros ſex. Qui multo auctiores 1650, *Lugduni Batavorum* in 4. recuſi (Alph. 3). Geometria nonniſi practica eſt, perinde ac Arithmetica, ut adeo hic recenſeri mereatur. Tractatur in hiſce libris etiam Trigonometria plana, uſus circini & regulæ proportionalis, Architectura militaris, problemata Aſtronomica, & ſciaterica Horologia, ita ut in hoc opere reperias, quæ titulus non promittere videtur, nec in libris, quæ eundem habent, vulgo quæri ſolent. N[illegible]as tamen addit demonſtrationes. Aliter JOHANNES DUSER, Tigurinus, in *Geometria Theorica & practica* patrio idiomate *Tiguri* 1627, in 4.

publi-

publicata theoriam cum praxi conjungit, & hanc ex illa deducit. Multa docet, quæ iſtiusmodi autores non tangunt: de ſtereometria tamen nihil habet.

§. 35. A. SHARPE, Anglus, idiomate patrio edidit *Geometriam promotam* 1°. per tabulam amplam & accuratam ſegmentorum circulorum, & 2°. per Tractatum conciſum de Polyhedris *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 17, Tabb. æn. 4). Tractatus primus ſine controverſia ad Geometriam practicam ſpectat, cum computandis ſegmentis circulorum deſtinetur, qui calculus ad Geometriam practicam pertinet ac multiplicem in variis problematis huc ſpectantibus habet uſum. Tractatus alter ad ſtereometriam refertur, cumque Autor in eodem conſtructionem & dimenſionem quinque corporum regularium ac præterea duodecim novorum a Geometris hactenus non expenſorum polyhedrorum tradat; hic quoque Tractatus Geometriæ practicæ quædam pars eſt.

§. 36. BATTY LANGLEY *Londini* 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. æn. 40), Geometriam practicam ad Architecturam civilem, & hortenſem, Geodæſiam, & Stereometriam applicatam edidit ſermone patrio. Titulus libri eſt: *Practical Geometry applied to the uſeful Arts of Building, Surveying, Gardening and Menſuration.* Sed hic liber potiore jure inter Architectonicos locum meretur, quam inter eos, qui de Geometria conſcripti ſunt, quemadmodum ſuo loco monebimus.

§. 37. Pithometriam promovere aggreſſus eſt JOANNES MATTHIAS HASIUS, Mathematum Profeſſor in Academia Wittebergenſi, in *Pithometriæ Theoria & Praxi nova*, *Wittebergæ* 1728, in 4. (plag. 10, Tabb. æn. 2): ubi etiam Algebræ in hoc argumento uſum declarat.

§ 38. ERASMUS REINHOLDUS in Geodæſia ſua, quæ ſub Titulo: *Gründlicher Bericht vom Feldmeſſen*, *Franc.* 1615, in 4. (1 Alph. 17 plag.) recuſa, Geometriam quoque ſubterraneam explicat: de qua opus peculiare conſcripſit NICOLAUS VOIGTEL, decimarum e Mansfeldenſibus metallifodinis Receptor, *Islebiæ* An. 1688, in fol. (plag. 32, Tab. 9) excuſum & itidem An. 1713, auctius (2 Alph. 10 plag. Tab. æn. 10) recuſum, unicum ſane in hoc genere, donec An. 1710, LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS *Francofurti* An. 1710. in 8. Tractatus quatuor idiomate Germanico ederet, inter quos quartus eſt *Geometriæ ſubterraneæ Compendium*, primus vero de *deſcriptione corporum regularium*, ſecundus de *Circino proportionum*, tertius de *Trigonometria plana* (plag. 6, Tab. æn.), & An. 1727. JOANNES FRIDERICUS WEIDLERUS, Profeſſor Mathematum Wittebergenſis, *Inſtitutiones Geometriæ ſubterraneæ* latinas daret *Wittebergæ* in 4 (plag. 10, Tab. 1).

§. 39. Circinum proportionis a

JUSTO BYRGIO multo ante inventum deſcripſit LEVINUS HULSIUS Tractatu tertio inſtrumentorum mechanicorum vernaculo idiomate *Francof. ad Mœnum* An. 1603, edito (plag. 4). Poſtea An. 1607, GALILÆUS, alienum inventum ſibi attribuens, de eodem librum Italicum ſub titulo: *Le Operationi del compaſſo Geometrico e militari* publicavit. Omnium maxime commendari in hoc genere mereatur NICOLAI GOLDMANNI de *Circino proportionis Tractatus* (*Lugd. Batav.* 1679, Latine & Germanice in fol. (1 Alph. Tabb. 16) editus, ex quo ſua deſcripſit MICHAEL SCHEFFELT in tractatu Germanico *Unterricht von dem Proportional-Circul*, *Ulmæ* 1697, in 4. (plag. 18, Tab. 12). Proſtat quoque Tractatus Gallicus Cl. OZANAMI de *uſu circini proportionum* (*Pariſiis* 1688, in 8). Recentius ejus conſtructionem & uſum in peculiari Tractatu, qui multa ſingularia continet, expoſuit SAMUEL CUNE. Eum poſt mortem Autoris EDMUNDUS STONE ſub Titulo: *A new Treatiſe of conſtruction and uſe of the Sector*, *Londini* An. 1729, in 8. (plag. 15, Tab. æn. 2, & Fig. multis ligno inciſis) publici juris fecit.

§. 40. Ad ſcripta de Geometria practica referendum quoque eſt CASPARIS SCHOTTI *Pantometrum Kircherianum*, hoc eſt, inſtrumentum Geometricum novum ab ATHANASIO KIRCHERO inventum, decem libris univerſam pæne practicam Geometriam complectentibus explicatum perſpicuiſque demonſtrationibus illuſtratum. Prodiit *Herbipoli* 1660, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. æn. 32). Liber primus technicus fabricam inſtrumenti, ſecundus euthymetricus linearum rectarum dimenſiones, tertius enbadometricus dimenſionem ſuperficierum, quartus ſtereometricus dimenſiones ſolidorum, ſextus cœlometricus dimenſiones concavorum, ſeptimus geodæticus diviſiones ſuperficierum, octavus metamorphoticus planorum corporumque transformationem, nonus hydragogicus libellationem aquarum totamque libellationis naturam, decimus tandem varius problematum variorum ſolutionem docet, quæ ope circini proportionum alias ſolvi ſolent.

CAPUT IV.

De Scriptis Analyticis.

§. 1. SCripta veterum analytica recenſet PAPPUS in præfatione ad librum ſeptimum *Collectionis mathematicæ.* Sunt nempe *Datorum* EU-

CLIDIS

CLIDIS liber unus (§. 1. C. 1.) APOLLONII de *Sectione Rationis* libri duo ab HALLEIO editi, & de *Sectione ſpatii* libri duo ab eodem reſtituti (§. 28. c. 3), APOLLONII de *Tactionibus* libri duo, de *Inclinationibus* duo, de *locis planis* duo, *Conicorum* octo, EUCLIDIS *Poriſmatum* tres, & de *locis ad ſuperficiem* duo, ARISTÆI de *locis ſolidis* quinque, ERATOSTHENIS de *mediis proportionalibus* duo: quorum aliqui extant (§. 13, Cap. 3), aliqui deſiderantur, ſed a recentioribus Geometris reſtituti, (§. 1, Cap. 1, & §. 13, Cap. 3). Sed Analyſis veterum ab Analyſi recentiorum longe fuit diverſa.

§. 2. Ad analyſin recentiorum potiſſimum ſpectat Algebra, de qua olim exempla tredecim libris comprehenſa dedit DIOPHANTUS. Hodie nonniſi *6* proſtant, a XYLANDRO latine verſi, & An. 1575, in fol. primum editi, poſtea cum Commentariis CASPARIS BACHETI, An. 1621, recuſi. Illuſtrat autem DIOPHANTUS artem ſolvendi problemata arithmetica indeterminata. Gallica eorum verſio extat inter Opera STEVINI (§. 23, c. 1.)

§. 3. Antequam DIOPHANTUS in publicum proſtaret, LUCAS PACIOLUS ſeu (ut vulgo vocatur) LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI in Summa Arithmeticæ & Geometriæ ſupra laudata (§. *6*, cap. 2,) Libris 8 Algebram explicat, prout eam acceperat ab Arabibus. Nimirum ultra æquationes ſimplices & quadraticas non progreditur. Nec longius progreſſi CHRISTOPHORUS RUDOLPHUS Jarovienſis Sileſius, qui primus de Algebra ſeu Coſſa, prout tunc dicebatur, in lingua Germanica ſcripſit & cujus librum additis regularum demonſtrationibus & exemplis pluribus recudi fecit MICHAEL STIFELIUS *Regiomonti* An. 1553, in 4. (Alph. 5, plag. 11). Titulus libri: *Die Coſs CHRISTOFFS RUDOLFFS, mit ſchönen Exempeln der Coſs durch MICHAEL STIFEL gebeſſert und ſehr gemehrt.* STIFELIUS, qui hoc Magiſtro profecit, in *Arithmetica integra* (§. 7, cap. 2), HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta* (§. 10, cap. cit.) aliique. Non ineleganter RUDOLPHUS, eumque ſecutus STIFELIUS, æquationes algebraicas ex progreſſionibus geometricis derivant. Sed SCIPIO FERREUS addidit regulas reſolvendi æquationes cubicas, a CARDANO in *Arte Magna*, quam vulgo Coſſam ſeu Regulam Algebræ vocant, An. 1545, primum publicatas: Cl. LUDOVICUS FERRARIENSIS oſtendit methodum reducendi æquationes biquadraticas, quam An. 1579. Algebræ ſuæ inſeruit RAPHAEL BOMBELLI. Ulteriores progreſſus Algebra ſtricte ſic dicta nondum vidit.

§. 4. Circa annum Chriſti 1590, FRANCISCUS VIETA Gallus Arithmeticam litteralem invenit, & ad Algebram applicavit, quam & methodo ingenioſa extrahendi radices ex æquationi-

tionibus quibuſcunque per approximationem locupletavit. (§.25, cap. 1). Ejus inventa explicat, iiſdemque utitur GUILIELMUS OUGHTRED, Anglus, in *Clave Mathematica*, An. 1631, primum, ſed An. 1693, *Oxonii* quinta vice edita (plag. 12). Regulas ad exempla applicat & uſum Arithmeticæ litteralis in Geometria elementari oſtendit, quem in inveniendis theorematis & reſolvendis problematis habet. Extractionem quoque radicum per approximationem ex æquationibus exemplo VIETÆ docet.

§. 5. THOMAS HARRIOT, itidem Anglus, qui *Londini* An. 1621 obiit, in *Artis Analyticæ Praxi* ad æquationes algebraicas nova, expedita & generali methodo reſolvendas, a WALTHERO WARNERO An. 1631, in fol. *Londini* (2 Alph. 2 plag.) edita, Arithmeticam *Vietæam* ad commodiorem formam reduxit, eam nempe, qua nunc utimur, & æquationum indolem ac reductionem plenius explicavit.

§. 6. Anno 1637, CARTESIUS *Geometriam*, quam vocat, idiomate gallico publicavit, quam poſtea Latine vertit & prolixis Commentariis auxit FRANCIS. A SCHOOTEN. Utor ego editione *Amſtelodamenſi* An. 1659, in 4. (5 Alph. 8 plag.). Continentur in eadem præter CARTESII Geometriam (plag. 12), FLORIMUNDI DE BEAUNE Notæ breves & FRANCISCI A SCHOOTEN Commentarii in eandem; JOH. HUDDENII *epiſtola de reductione æquationum*, ejuſdem *epiſtola de maximis & minimis*: ERASMI BARTHOLINI *Principia Matheſeos univerſalis* ſeu *introductio ad Geometriæ methodum* CARTESII; FLORIMUNDI DE BEAUNE tractatus poſthumi *de natura & conſtitutione atque de limitibus æquationum*; JOH. DE WITT libri duo *de Elementis Curvarum*, & FRANC. A SCHOOTEN tractatus *de concinnandis demonſtrationibus geometricis ex calculo algebraico*. CARTESIUS Arithmeticam litteralem & regulas Algebræ deſcripſit ex HARRIOTO, & quemadmodum OUGHTREDUS in Clave, atque MARINUS GHETALDUS in Libris 5, *de Reſolutione & Compoſitione mathematica* (*Romæ* 1630, in fol. 2 Alph. 15 plag.) Arithmeticam *Vietæam* ad Geometriam elementarem applicarunt & conſtructiones æquationum ſimplicium ac quadraticarum dederunt, ita ipſe, *Harriotæam* ad Geometriam ſublimiorem transferens, curvarum naturam per æquationes algebraicas explicare cœpit & conſtructionem cubicarum atque biquadraticarum æquationum, immo etiam ſuperiorum, docuit. Opus hoc inprimis utile ad Algebram ſpecioſam addiſcendam.

§. 7. CARTESIUS non tyronibus, ſed Geometris peritis ſcripſit, nimis conciſa brevitate, ut adeo Commentario maxime opus ſit. Quamvis vero de ejus Geometria egregie meritus ſit FRANCISCUS A SCHOOTEN, quemadmodum ex iis intelligitur,

quæ

quæ modo diximus (§. *6*); nondum tamen ea dedit, quæ in Commentario conſummato quæruntur, ſed ipſe potius Commentatore haud raro opus habet. Dedit tandem iſtiusmodi Commentarium, qualis deſiderari poterat CLAUDIUS RABUEL, e Societate Jeſu, qui poſt fata ejus *Lugduni Gallorum* ſub titulo: *Commentaires ſur la Geometrie de Mr. Deſcartes* An. 1730, in 4. reg. prodiit (Alph. 3, plag. *6*, Tabb. æn. 23.) Textum CARTESII, quem preſſo pede ſequitur, ita explanat, atque ita regulis, exemplis, & problematis illuſtrat, ut nihil occurrat, quod ex Commentario non plene intelligatur. Commentarius hic in linguam Latinam transferri & in nova editione Geometriæ CARTESII Commentatoribus aliis adjungi mereretur: ſit ita quod ſolus ſufficiat menti tanti Geometræ penitus intelligendæ.

§. 8. Regulam CARTESII conſtruendi æquationes cubicas & biquadraticas uberius expoſuit THOMAS BAKER in *Clave geometrica catholica* (*Londini* 1684, in 4. (1 Alph. 10 plag. 10 Tab. æn.) : aſt verum harum Conſtructionum fundamentum, quod a MENECHMO didicit CARTESIUS, minime aſſecutus. Hoc monſtravit RENATUS SLUSIUS Tomo ſecundo *Meſolabi* An. 1668, in 4. (plag. 24) *Leodii* excuſi cum variis Miſcellaneis, in quibus Algebra ad quadraturas Curvarum, ad quæſtiones de maximis & minimis, ad methodum inveniendi punctum flexus contrarii, ad methodum centrobarycam GULDINI &c. applicatur. Carteſiana inventa etiam promoverunt, quemadmodum SLUSIUS in *Miſcellaneis*, FERMATIUS in *Operibus mathematicis* (*Toloſæ* 1679, in fol.), ROBERVALLIUS (§. 31, 37, Cap. 1), & BARROWIUS (§. 19, Cap. 3).

§. 9. JOHANNES KERSEY, An. 1671, *Londini* in fol. edidit *Elementa Algebræ*, idiomate Anglico (Alph. 10, plag. 10). In iis explicatur arithmetica litteralis & æquationum natura, præceptaque exemplis plurimis illuſtrantur, totus DIOPHANTUS enucleatur, & reſolutione & compoſitione mathematica ex GETHALDO multa exhibentur. Idem fere inſtitutum apud Gallos fuit JOH. PRESTET, cujus *Nova Matheſeos elementa* Tomo integro ſecundo auctiora, *Pariſiis* An. 1694, in 4. (6 Alph. 3 plag.) gallice prodierunt. In iis omnia dogmata arithmetica una cum problematibus DIOPHANTI atque VIETÆ per analyſin recentiorem reſolvuntur.

§. 10. Similiter OZANAM in *Elementis* Gallicis *Algebræ* (*Amſtelodami* An. 1703, in 8. reg. 1 Alph. 21 plag.) præter calculum litteralem & æquationum doctrinam, artem quoque Diophanteam reſolvendi problemata numerica egregie illuſtrat, in qua inprimis excellit hic Autor. Quanti autem fieri debeat analyſis *Diophantea*, vulgo a *Carteſianis* neglecta, docuit illuſtris LEIBNITIUS in Actis Eru-

ditorum, An. 1702, pag. 219. Etſi autem Algebra OZANAMI legi mereatur ab iis, qui in Analyſi *Diophantea* ſeſe exercere voluerint; tyronibus tamen Algebræ ejus lectio commendanda non eſt, propterea quod nimis diffuſa regularum explicatione nulla regularum applicatione, ad exempla facta, nimis diu detinet lectorem in parte prima, facitque ſtudii hujus in ipſo limine deſertores, ut taceam ipſum inventorum recentiorum minime gnarum multa brevius tradere potuiſſe, ita ut & facilius intelligerentur, & ſine tædio. Peccat etiam prolixa præceptorum explicatione PRESTETUS: Unde Compendium ejus dedit BERNHARDUS LAMY, quod ſub titulo: *Elémens de Mathématique*, (*Pariſ.* An. 1704, in 12. reg. (1 Alph. 7 plag.) auctius recuſum tyronibus ob perſpicuitatem commendari meretur. Artificia tamen analyſeos *Diophantea* non attingit.

§. 11. Hi tamen autores applicationem Algebræ ad Geometriam inſuper habent: quem defectum ſupplent OZANAM in Tractatu Gallico *de locis Geometricis* (plag. 8, Tab. 12.) & altero *de conſtructione æquationum* (plag. 12, Tab. 9) Tractatui de lineis primi generis (§. 15, cap. 3) ſubjuncto; DE LA HIRE in gemino Tractatu ejuſdem nominis & argumenti (§. cit. cap. 3) & inprimis GUISNE'E in *Applicatione Algebræ ad Geometriam* gallice *Pariſiis* An. 1704, in 4. (1 Alph. 19 plag. Tab. æn. 6) edita & ad captum tyronum compoſita exemplisque ſelectis inſtructa, atque Illuſtris Marchio DE L'HOSPITAL in egregio Tractatu Analytico *de Sectionibus Conicis & earum uſu*, *Pariſ.* 1707, in 4. reg. 2 Alph. 12½ plag. Tab. 32, Gall.). Applicatio Algebræ ad Geometriam ſublimiorem ex HOSPITALIANO opere omnium optime addiſcere licet iis, qui jam in Geometria & Algebra cum fructu verſati & acumine pollent. Ceteris magis ſatisfaciet GUISNE'E, quo lecto faciliores facient in illo progreſſus.

§. 12. Algebræ quoque præcepta, ſed ſine exemplis, perſpicue explicat GERARD KINCKHUYSEN in *Algebra*, ſermone Batavo, *Harlemi* An. 1661, in 4. edita, (plag. 14.) & idem in Fundamento Geometriæ (*Grondt der Meetkonſt*). *Harlemi* An. 1684, in 4. plag. 12) Sectionum conicarum palmarias proprietates per analyſin eruit; in *Geometria* vero (*Harlemi* An. 1663, in 4. plag. 22.) conſtructiones Geometricas problematum per Algebram ſolutorum elegantes affert. Singula quoque ABRAHAMUS DE GRAAF in *Algebra* ſua (§. 7, cap. 1) cum laude exequitur. Unde Dn. DE TSCHIRNHAUSEN ad ſtudium Algebræ plurimum commendavit hoſce autores. Celeberrimus NEWTONUS in *Arithmetica univerſali*, quam GUIL. WHISTON *Cantabrigiæ* An. 1707, in 8. (1 Alph.) edidit, exempla habet ſingularia & regulas varias a ſe inventas.

tas. Recuſa ſunt hæc Elementa *Londini* An. 1722, in 8. (plag. 22). In nova editione ordo problematum pauliſper immutatus, WHISTONI præfatio & methodus *Hallejana* extrahendi radices ex æquationibus per approximationem omiſſæ. Prodiere etiam in *Batavia*, ut nunc facilius haberi poſſint. Utilem tyronibus operam ſumeret, qui eadem Commentario illuſtraret. Multa enim occurrunt difficilia, quorum rationes non facile aſſequi licet etiam exercitatioribus. Deſunt etiam conſtructiones geometricæ problematum, quorum tantummodo dantur ſolutiones per calculum. Monuit jam GRAVESANDIUS iſtiusmodi Commentario eſſe opus & ejus aliquod ſpecimen de inventione diviſorum dedit in *Elementis Matheſeos univerſalis*, *Lugduni Batavorum* An. 1727, in 8. editis (plag. 16, Tabb. æn. 4), quæ Algebræ principia continent.

§. 13. JOSEPHUS RAPHSON in *Analyſi æquationum univerſali*, quæ (ſi titulo credimus) ſecunda vice *Londini* An. 1702, in 4. prodiit una cum Conamine metaphyſico de Spatio reali ſeu ente infinito (plag. 20.) extractiones radicum ex æquationibus per approximationem facilitavit: ROLLIUS in Tractatu gallico *de Algebra* (*Pariſ.* 1690, in 4. plag. 12) ſubſidia non contemnenda ad radicum extractionem ſuppeditat, ſed more ſuo terminis inſuetis utitur, & haud raro nodum in ſcirpo quærit. Tractatum quoque Gallicum *de Algebra* conſcripſit DE CROUZAS, quem *Pariſiis* An. 1726, in 8. reg. ſub titulo: *Traité de l'Algebre*, edidit (1 Alph. 8 plag.). In eo nonniſi Arithmeticam literalem & regulam Algebram propriiſſime ſic dictam explicat, quemadmodum faciunt PRESTETUS & OZANAMUS, nimium prolixus in vulgaribus, ita ut longo tempore multa patientia addiſcenda ſint, quorum uſum proſpicere non licet. Deſunt artificia recentiora, quibus calculus præſertim ſurdorum & extractio radicum mirifice fuit promota. Nec ars exercetur problematis, contra illud SENECÆ: Iter longum per præcepta, breve per exempla.

§. 14. Exemplo PASCALII in *Triangulo Arithmetico*, *Pariſiis* Anno 1654, Gallice edito, HUGENII in *Tractatu de Ludo aleæ*, qui ſub finem Exercitationum Geometricarum SCHOOTENII (§. 25) & Operum variorum Vol. 2 (§ 35) legitur, aliorumque, REMUNDUS DE MONMORT in *Tentamine* Gallico *Analyſeos de ludis eventus fortuiti*, *Pariſiis* An. 1708, in 4. reg. (1 Alph. 14 plag.) excuſo & ibidem 1714, auctius (2 Alph. 11 plag.) recuſo ad Sortem in ludis diverſis determinandam analyſin applicavit: qui combinationum doctrinam egregie illuſtrat & inſignia artificia analytica edocet. In altera editione leguntur literæ JOANNIS & NICOLAI BERNOULLIORUM de

hoc argumento ad Autorem datæ. Idem præſtitit JACOBUS BERNOULLI in Opere poſthumo *Artis Conjectandi* (*Baſil.* 1713, in 4. Alph. 1, plag. 20, Tab. 1). Acceſſit huic operi Tractatus de ſeriebus infinitis, mox commendandus. Inprimis autem hoc in argumento commendari meretur ABRAHAMI DE MOIVRE opus pereruditum & multa nova continens, quod ſub titulo : *The doctrine of chances, or a Method of calculating probability of Events in play, Londini* 1718, in 4. reg. (Alph. 1) *.

§. 15. ÆGIDIUS FRANCISCUS DE GOTTIGNES, e Societate Jeſu, in *Logiſtica univerſali*(*Neap.*An. 1687, in fol. 5 Alph. 14 plag. Tab. 5) principia Algebræ labefactare aggreſſus eſt; ſed nodum in ſcirpo quærit & per ambages eo tendit, quo recta pertingere datur. Condonandum hoc videbatur ea ætate, qua Algebræ ſpecioſæ infantia erat : ſed ſi noſtra reperiantur, qui in dubitationem adducere volunt, quæ dudum ſtabilita ipſoque diuturno uſu probata fuerunt, vix ferendum. Noſtrum igitur non eſſe exiſtimamus de iis ſcriptis loqui, quæ hic recenſeri poterant.

§. 16. HUGO DE OMERIQUE in *Analyſi Geometrica* (*Gadibus* Anno 1698, in 4.) methodo communi algebraica, quæ per æquationes procedit, aliud ſubſtituit per rationes argumentandi genus : quod tamen non adeo late patet, quam illa. Applicat illud ad problemata, per Algebram ab aliis jam ſoluta & parum difficultatis habentia. Non tamen uſu ſuo caret, cum ad demonſtrationes ſyntheticas manu ducat. Monet PEMBERTON in præfatione ad *Conſpectum Philoſophiæ Newtonianæ*, NEWTONUM laudaſſe in hoc autore, quod Analyſin veterum reſtituere conatus fuerit.

§. 17. Methodum CAVALLERII ad calculum aptare ſtuduit JOHANNES WALLISIUS in *Arithmetica infinitorum* An. 1655, primum edita (*§.* 34, cap. 1) in qua, per ſummationes ſerierum infinitarum, quadraturas curvarum & cubationes ſolidorum determinare aggreſſus eſt : Sed cum inductione uteretur, quæ minus demonſtrativa videri poterat, ISM. BULLIALDUS per maximas ambages more veterum Geometrarum hoc Arithmeticæ genus demonſtravit in Opere novo *Arithmeticam infinitorum* Libris 6, comprehendente. (*Pariſ.* An. 1682, in fol. 4 Alph. 16 plag.). Hodie tamen paucis lineis plura præſtare licet, quam quæ integro opere BULLIALDI comprehenduntur.

§. 18. Veram viam ingreſſus non eſt WALLISIUS, felicius id præſtitit Illuſtris LEIBNITIUS invento calculo differentiali & integrali, quem primum in Actis Eruditorum Anno 1684, pag. 467, publicavit, cum dudum ante An. 1677, eundem in litteris cum celeberrimo NEWTONO com-

* Atque iterum auctius, ibidem. An. 1738, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 11).

communicaſſet, qui in egregias methodos circa idem tempus inciderat: quemadmodum apparet ex litteris LEIBNITII atque NEWTONI, quæ leguntur apud WALLISIUM Operum Tomo tertio, fol. 634, 648. Cum enim NEWTONUS in literis d. 24 Octobr. 1676, ſcriberet: *Inverſa de Tangentibus problemata ſunt in poteſtate atque illis difficiliora: ad quæ ſolvenda uſus ſum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque viſum eſt in præſentia litteris transpoſitis conſignare*: 5accdæ 10effh &c. Literæ in ordinem ſuum diſpoſitæ hunc habent ſenſum: *Una methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: altera tantum in aſſumtione ſeriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari poſſunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis ad inveniendos terminos aſſumtæ Seriei*: mox LEIBNITIUS ipſum Calculum ſuum differentialem in literis d. 21 Jun. 1677, apertis verbis perſcripſit. Ingenue hoc ipſum fatetur NEWTONUS in prima & ſecunda editione Principiorum Philoſophiæ naturalis Mathematicorum Schol. Lemmat. 2, Lib. 2, pag. 253, 254. In ultima vero ingenuam confeſſionem, quæ viros ſummos maxime decet, omiſit. Ratio patebit inferius. LEIBNITIUS calculum ſuum publici juris fecit in Actis Eruditorum An. 1684, pag. 467, & NEWTONUS methodum ſuam in prima editione Principiorum modo laudatorum, quæ An. 1687, prodiit. Poſtea JACOBI ac inprimis JOANNIS BERNOULLI opera, calculus LEIBNITII ad majorem perfectionem perductus.

§. 19. Calculi differentialis leges expoſuit & problematibus exquiſitis illuſtravit illuſtris Marchio DE L'HOSPITAL, Præceptore uſus JOANNE BERNOULLI, in egregio Opere Gallico *Analyſeos infinite parvorum* (*Pariſ.* 1696, in 4. reg. 1, Alph. 2, plag. Tab. 11), omnibus Geometriæ ſublimioris Studioſis maximopere commendando. Subinde tamen Commentatore opus habet, ut a tyronibus Geometriæ ſublimioris intelligatur. Equidem DE CROUZAS *Commentarium* edidit, qui idiomate Gallico *Pariſiis* An. 1721, in 4. (2 Alph. $1\frac{1}{2}$ plag. 4 Tab.); ſed plerumque nonniſi calculos, quos Autor contraxit, extendit, in difficilioribus vero lectorem deſtituit. Unde magis ſatisfaciet VARIGNONIUS in ſuis dilucidationibus, quæ ſub titulo: *Eclairciſſemens ſur l'Analyſe des infiniment petits*, poſt fata ipſius *Pariſiis* An. 1725, in 4, (plag. 16, Tabb. 6) prodierunt. Opus egregium HOSPITALII Anglice vertit & altera parte de calculo integrali auxit E. STONE, ac ſub titulo: *A Method of fluxions both direct and inverſe*, *Londini* 1730, in 8. reg. (1 Alph. 6 plag. Tabb. 15) edidit.

§. 20. Equidem HOSPITALIUS addere conſtituerat partem alteram de calculo integrali; ſed cum LEIB-

NITIUS Scientiam infiniti dare ſibi propoſuiſſet, a propoſito ſuo deſtitit. Enimvero præter ſpecimina in Actis Eruditorum An. 1702, & An. 1703, nihil ejus publice comparuit. Interea calculi integralis faciliores regulas dare & exemplis illuſtrare conſultum exiſtimabat CARRE', cujus ſcriptum gallicum : *Méthode pour la meſure des ſurfaces, la dimenſion des ſolides, leurs centres de peſanteur, de percuſſion & d'oſcillation par l'application du calcul integral* prodiit *Pariſ.* An. 1700, in 4. reg. (plag. 15, Tabb. 4). Sed longius progreſſus GABRIEL MANFREDIUS in Opere eximio *de conſtructione æquationum differentialium primi gradus* (*Bononiæ* An. 1707, in 4. 1 Alph. 2 plag. Tabb. 7) & vir ſummus NEWTONUS in Tractatu *de quadraturis Curvarum*, qui Opticæ ſubjungitur, præclara dedit. Plura quoque in parte altera dedit STONE de hoc calculo, quam quæ in Methodo Dn. CARRE' leguntur.

§. 21. Poſtquam NICOLAUS MERCATOR, Holſatus, in *Logarithmotechnia* (*Lond.* 1668, in 4. cum MICHAELIS ANGELI RICCII *Exercitatione Geometrica* edita) prop. 17, pag. 31, ſeqq. quadraturam hyperbolæ per ſeriem infinitam dediſſet; ſerierum doctrinam per extractionem radicum inſigniter promovit & ad curvarum quadraturas & rectificationes applicavit vir ſummus ISAACUS NEWTONUS: cujus *Analyſin per quantitatum ſeries, fluxiones ac differentias*, cum *Enumeratione linearum tertii ordinis*, varios tractatus analyticos a Viro celeberrimo diu ante compoſitos continentem, *Londini* 1711, in 4. (plag. 16, Tabb. 2) edidit GUIL. JONES. Quemadmodum vero hoc opus ad ſerierum doctrinam perdiſcendam multum commendari meretur; ita recondita de hoc argumento ſupperaddi debent ex celeberrimi JAC. BERNOULLI diſſertationibus *de ſeriebus infinitis* (§. 14).

§. 22. Serierum doctrinam ex inventis MERCATORIS, NEWTONI, LEIBNITII atque JOHANNIS BERNOULLI exhibuit quoque GEORGIUS CHEYNÆUS in *Methodo Fluxionum inverſa* (*Londini* 1703, in 4. reg. plag. 6). Multo vero ante methodum ſerierum MERCATORIS & NEWTONI multis exemplis illuſtravit DAVID GREGORIUS in *Exercitatione Geometrica de dimenſione figurarum*, *Edinburgi* An. 1684, in 4. edita (plag. 7, Tabb. 1). Horum exempla complura computata ſunt a patruo ipſius JACOBO GREGORIO, quemadmodum ipſe fatetur pag. 2, 3, & 4. De Geometria enim ſublimiore optime meritus JACOBUS GREGORIUS, quemadmodum ex ejus Libro *de vera Circuli & Hyperlolæ Quadratura*, cum *Geometriæ parte univerſali*, quantitatum curvarum tranſmutationi inſerviente colligitur. Prodiit *Patavia* 1668, in 4. Tractatus de Quadratura conſtans plag. 8, Appendix de Geometriæ parte univerſali plag. 19. Ceterum

terum hinc perſpicere licet, quid ab eo expectandum fuiſſet, niſi fata propoſitum ejus intervertiſſent.

§. 23. JOAN. CRAIGE, Scotus, 1685, *Londini* in 4. (plag. 6, Tab. I) edidit Tractatum *de Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehenſarum Quadraturas determinandi*, & An. 1693. addidit Tractatum *de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis*, *Londini* in 4. (plag. 11, Tab. I) excuſum. Utitur equidem calculo differentiali LEIBNITII, cum in Anglia calculus fluxionum adhuc ignoraretur, nec editis An. 1687, Principiis Philoſophiæ naturalis mathematicis NEWTONI, ullus Geometra de eodem cogitaret; per ambages tamen adhuc incedit, quod calculus integralis ſeu ſummatorius nondum ipſi eſſet perſpectus. In quadrandis igitur curvis utitur Theorematis BARROWIANIS, quibus opus non habemus, ſi calculi differentialis vis fuerit perſpecta, cujus pars quædam eſt ſummatorius ſeu integralis, qui dicitur. Inde eſt, quod etiam GREGORIUS alia via incedat, etſi ſeriebus infinitis utatur. De Locis Geometricis formulas generales tradit CRAIGIUS, quas HOSPITALIUS in opere analytico de ſectionibus conicis (§. 10) uberius explicavit & illuſtravit, & nos in Elementis Algebræ dilucidatas ad facillimam intelligentiam reduximus, via ad ulteriora planiſſima ſtrata. Enimvero ubi calculus integralis, quem Angli methodum fluxionum inverſam vocant, in Anglia quoque invaluiſſet; idem CRAIGIUS *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 12½) Libros duos *de Calculo fluentium* & totidem *de Optica analytica* edidit, quorum iſtis doctrinam de Quadraturis Curvarum promovet.

§. 24. Quæ apud HOSPITALIUM in Analyſi infinite parvorum, CARRESIUM, ſive Quadratum, CHEYNÆUM, GREGORIUM & CRAIGIUM in Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehenſarum Quadraturas determinandi & in Tractatu de Quadraturis figurarum Curvilinearum occurrunt; ea in unum volumen congeſſit & perſpicue explicavit, varia etiam problemata, quorum ſolutiones in Actis Eruditorum Lipſienſibus extant, inprimis quæ in iiſdem LEIBNITIUS de motuum cœleſtium cauſis phyſicis dedit, illuſtravit CAROLUS HAYES in opere Anglico, quod ſub titulo: *Traitiſe of Fluxions, or introduction to mathematical and mechanical Philoſophy*, *Londini* An. 1704. in fol. (3 Alph. 3 plag.) prodiit.

§. 25. Regulas Algebræ communis atque Analyſeos LEIBNITIANÆ, hoc eſt, calculi differentialis & ſummatorii, uno opere complexus eſt CAROLUS REYNAU, quod ſub titulo: *Analyſe démontrée*, *Pariſ.* 1708, in 4. reg. (Alph. 5, plag. 7, Tabb. æn. 5): ſed in exemplis parcior videri poterat, quam ut tyronibus inſervire poſſit, provectioribus tamen commendandus. Neque etiam ea præſtitiſſe

vide-

videtur, quæ titulus promittit, cum eas demonſtrationes in hoc Opere non reperias, quæ forſan in eodem quæſiveris, demonſtrationis notionem diſtinctam animo complexus.

§. 26. Calculus fluxionum, qui cum differentiali & ſummatorio idem eſt, in Anglia primum comparuit, cum ISAACUS NEWTONUS Opticam ſuam ederet An. 1704, de qua ſuo loco dicemus. Addidit enim præter *Enumerationem Linearum tertii Ordinis ſeu curvarum ſecundi generis* Tractatum *de Quadratura curvarum*, in quo hanc doctrinam plurimum promovit, & calculum hunc explicat eademque utitur. Ex intervallo GUILIELMUS JONES *Londini* An. 1711, in 4. plag. 16, Tab. 2, edidit NEWTONI *Analyſin per quantitatum ſeries, fluxiones ac differentias* cum *Enumeratione linearum tertii ordinis*, ex quo apparet, quid NEWTONUS in Geometria ſublimiori per analyſin promota præſtiterit, & quantum ſerierum doctrinam promoverit. Cum vero in tractatu de Enumeratione linearum tertii ordinis demonſtrationes deſiderarentur; hunc defectum ſupplevit JACOBUS STIRLING in Illuſtratione Tractatus D. NEWTONI *de Enumeratione linearum tertii Ordinis*, quæ *Oxoniæ* An. 1717, in 8 (plag. $9\frac{1}{2}$) lucem adſpexit & multa præclara continet.

§. 27. Haud ita pridem, nimirum An. 1736, JOHANNES COLSON Methodum fluxionum & infinitarum ſerierum NEWTONI in ſermonem Anglicum translatam edidit *Londini* in 4. ſub titulo: *The Method of fluxions and infinite ſeries, With its application to the Geometry of curve-lines.* (Alph. 2)*. Tractatus hic idem eſt, quem publico An. 1728, in præfatione ad Conſpectum Philoſophiæ *Newtonianæ* promiſerat PEMBERTON. Egregio Commentario librum hunc illuſtravit Editor, qui maximam operis partem complet & multa offert, quæ Analyſeos cultores alibi fruſtra quærunt. Ipſe NEWTONUS docet, quomodo æquationes in ſeries infinitas reſolvantur, quomodo fluentium fluxiones ſeu quantitatum variabilium differentialia & ex fluxionibus fluentes ſeu differentialium ſummæ inveniantur, & per methodum fluxionum maxima & minima, tangentes, quadraturæ & rectificationes curvarum determinentur. Ubi ſimul oſtenditur, quomodo curvæ quadrabiles detegantur, curvæ cum ſectionibus conicis comparabiles inveſtigentur, curvæ rectificabiles inveniantur & quæ ſunt alia hujus generis.

§. 28. Anno 1730, JACOBUS STIRLING *Londini* in 4. charta auguſta (Alph. 1, plag. 15) edidit *Methodum differentialem* ſive Tractatum *de Summatione & interpolatione ſerierum infinitarum.* In eo potiſſimum docet,

* Eundem NEWTONI Tractatum Gallice verſum dedit nuperrime Celeb. DE BUFFON. *Paris* in 4. (Alph. 1) cum eleganti Præfatione.

docet, quibus artificiis aſſequamur valores illarum ſerierum, quæ ſummari nequeunt, ut habeatur ſolutio illorum problematum, quæ ex quadraturis pendent. Non modo inventa aliorum exponit, verum etiam propriis hanc doctrinam plurimum promovit, ut adeo opus inſigne ſublimioris Matheſeos ſtudioſis ſummopere ſit commendandum.

§. 29. Commendanda hic quoque ſunt ABRAHAMI DE MOIVRE *Miſcellanea analytica de ſeriebus & quadraturis*, quæ eodem Anno *Londini* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 9) prodiere. Acceſſere variæ conſiderationes de Methodis comparationum, combinationum & differentiarum, ſolutiones difficiliorum aliquot problematum ad ſortem ſpectantium, itemque conſtructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum, quæ in motibus corporum cœleſtium occurrunt. Multa in hiſce Miſcellaneis occurrunt, quibus non modo ſerierum doctrina, verum etiam menſura ſortis & alia ad Matheſin ſublimiorem ſpectantia capita promoventur.

§. 30. Quæ NEWTONUS in Tractatu de Quadraturis curvarum dederat, alia methodo inveſtigare docuit ROGERUS COTESIUS, Profeſſor Aſtronomiæ & Experimentalis Philoſophiæ apud Cantabrigienſes, in *Harmonia Menſurarum*, *ſive Analyſi & Syntheſi per rationum & angulorum menſuras promota*, quam cum aliis ejuſdem opuſculis mathematicis ejus ſucceſſor ROBERTUS SMITH *Cantabrigiæ* An. 1722, in 4. (plag. 50, Tab. I.) poſt mortem ejus præmaturam edidit. Potiſſimum ipſi propoſitam eſt dare *Logometriam*, quam vocat, qua ſcilicet per Logarithmos, ſinus, atque tangentes inveſtigantur, quæ hactenus ad Quadraturam circuli & hyperbolæ fuerunt reducta, differentialium ſummatione ad menſuras rationum & angulorum reducta. In operibus miſcellaneis *Æſtimatio errorum in mixta Matheſi* per variationes partium Trianguli plani & ſphærici, qualia theoremata dedimus in Trigonometria plana, Tractatus *de Methodo differentiali Newtoniana*, quem multo ante ab eo conſcriptum dicit Autor, quam a JONESIO, NEWTONI de eodem argumento Tractatus in Analyſi ſuperius commendata (§ 2) ederetur, *Canonotechnia* ſive conſtructio Tabularum per differentias, & Tractatus *de Deſcenſu gravium*, *de motu pendulorum in Cycloide & de Motu projectorum*. Quomodo inventa *Coteſiana* ex *Newtonianis* deducantur, docet Anonymus * in *Epiſtola ad Amicum de* COTESII *inventis*, *Londini*, eodem adhuc Anno in 4. edita (plag. 13).

§. 31. LEIBNITIUS calculum differentialem & ſummatorium primum exercuerat in quantitatibus finitis, veluti in ſummandis potentiis numerorum, & deinde lecto opere *Hugeniano* de horologio oſcillatorio & ope-

* Dr. HENRICUS PEMBERTON.

re Conico GREGORII A S. VINCENTIO ad quantitates infinite parvas applicavit, atque ſic via vere analytica in calculum differentialem & ſummatorium ſeu integralem incidit, quali hodie in Geometria ſublimiori utimur. In Anglia eundem calculum, ſeu methodum fluxionum ſtylo Anglicano, ad quantitates finitas applicavit BROOK TAYLOR in *Methodo incrementorum directa & inverſa*, quæ *Londini* 1715, in 4. (plag. 15½) prodiit. De obſcuritate, qua in ſcribendo uſus Autor, publice conqueſtus eſt JOANNES BERNOULLI, ut adeo mirari deſinant lectores in ſublimioribus nondum ſatis verſati, ſiquidem hinc inde hæſitent. Continentur tamen in hoc opere lectu digna.

§. 32. Integram Matheſin puram, una cum Algebra & calculo differentiali, ſuccincte explicavit WILHELMUS JONES in *Synopſi palmariorum Matheſeos*, Anglice An. 1706, *Londini* in 8. (plag. 20) edita; ſed ſine interprete a tyronibus vix intelligetur, qui tamen hoc duce commode utuntur in repetendis iis, quæ ex aliis Autoribus didicere. In iis, quæ ad Algebram communem ſpectant, cum hac Synopſi convenit Tractatus *de Algebra* itidem Anglice ſcriptus & *Londini* 1717, in 8. reg. editus (plag. 15) a RONAYNIO: recentior enim analyſis in eo deſideratur, & methodus Tangentium atque de maximis & minimis per methodum exhauſtionum illuſtratur.

§. 33. Equidem BERNHARDUS NIEUWENTYT in *Conſiderationibus circa Analyſeos ad quantitates infinite parvas applicatæ principia & calculi differentialis uſum in reſolvendis problematibus Geometricis* (*Amſtel.* 1694, in 8. plag. 3.) & in *Conſiderationibus ſecundis circa calculi differentialis principia* (*Amſtel.* An. 1696, in 8. plag. 3) contra calculum differentialem nonnulla dubia movit, & hinc in *Analyſi Infinitorum* (*Amſtelod.* A. 1695, in 8. plag. 20, Tab. 21) methodum aliam ſubſtituit; ſed non modo LEIBNITIUS atque BERNOULLIUS in Actis Eruditorum An. 1695, p. 310. & ſeqq. it. p. 369, & ſeqq. & An. 1697, p. 125 & ſeqq., verum etiam Cl. JACOBUS HERMANNUS, nunc * Mathematum Profeſſor Francofurtanus, in *Reſponſione ad illas conſiderationes ſecundas*, *Baſileæ*, Anno 1700, in 8. (plag. 4.) iiſdem abunde ſatisfecerunt; quamvis memini, quod hic LEIBNITIO non ex aſſe ſatisfecerit, quod quantitates infinite parvas tanquam entia realia conſideret, cum tamen non ſint niſi modus loquendi, qui exhibet, ſtylo *Jungiano*, tolerantur vera, quemadmodum clariſſime docui in Ontologia, in qua realia ab imaginariis ubivis diſcrevi. Analyſi tamen infinitorum *Nieuwentytiana* in rem ſuam uti norunt intelligentes. BERNHARDUS DE FONTENELLE,

* Anno ſcil. 1715, quo primum hæc Commentatio edita eſt. Vide infra, Cap. VI. §. 17.

TENELLE, Academiæ Regiæ Scientiarum, quæ Pariſiis floret, Secretarius, idiomate patrio An. 1727, *Pariſiis* in 4. reg. (Alph. 3, plag. 3, Tab. 1) edidit Elementa Geometriæ infinitorum (*Elémens de la Géométrie des infinis*), in quo potiſſimum ſibi propoſitum habet, ut calculos hodie receptos ex ipſa notione infiniti deducat. Conſiderat vero, quemadmodum omnibus fere Mathematicis ſolenne eſt, infinite magnum & infinite parvum Mathematicorum per modum entis realis. Satisfacere intendit theoria ſua iis, quibus Analyſis infinitorum moderna ſuſpecta videtur, ut adeo hic loci commemorari debuerit hoc opus.

§. 34. In Actis Philoſophicis Anglicanis pro menſibus Septembri & Octobri Anno 1708, editis ſcripſerat JOHANNES KEILL, inventorem Arithmeticæ fluxionum, ſine omni dubio primum eſſe NEWTONUM, eandem tamen poſtea, mutatis nomine & notationis modo, editam eſſe a LEIBNITIO in Actis Eruditorum. LEIBNITIUS, cui hæc Acta miſerat Cl. SLOANE, tum Societatis Regalis Secretarius, in literis d. 4. Martii An. 1711 datis, de injuria ſibi illata conqueſtus deſiderabat, ut KEILLIUS publice teſtaretur, non fuiſſe ſibi animum LEIBNITIO imputandi, quaſi alienum inventum ſibi attribuerit. Enimvero KEILLIUS in epiſtola ad eundem SLOANIUM data, quæ primum ſcripſerat defendit & oſtendere conatur, quomodo ex *Newtonianis* ſua deduxerit. Cum candorem ſuum jam apertius, quam ante oppugnari exiſtimaret LEIBNITIUS, ſibique parum convenire arbitraretur, ut provectiori ætate poſt tot documenta vitæ eum apologia defenderet; in literis ad SLOANIUM d. 29 Decembris An. 1711 datis, æquitati Societatis committebat, annon coërcendæ ſint vanæ & injuſtæ vociferationes, quas ipſi NEWTONO improbari putabat confiſus eundem ſententiæ ſuæ libenter daturum indicia. Juſſit Societatis monumenta antiquiora conſuli & Sociis aliquot in mandatis dedit, ut in eam rem inquirerent & quæ in ſcriptis antiquis invenirent ad eam, una cum ſententia ſua, referrent. Hi pronunciarunt, NEWTONUM eſſe primum inventorem, nec KEILLIUM inventum eidem vindicantem injuriam feciſſe LEIBNITIO. Juſſu adeo Societatis Regiæ in lucem editum eſt *Londini* 1712, in 4. (plag. 15½) *Commercium Epiſtolicum* D. JOHANNIS COLLINS *&* *aliorum de Analyſi promota*, & per Europam inter Mathematicos diſtributum. Continentur in eo excerpta ex literis, quorum autographa conſervat illuſtris Societas Regalis, una cum Epiſtolis NEWTONI atque LEIBNITII, quæ jam apud WALLISIUM Tomo tertio Operum leguntur, Tractatus de Analyſi per æquationes numero terminorum infinitas a JONESIO editus (§. 26), epiſtolæ

læ LEIBNITII ad HANS SLOANE & KEILLII reſponſiones ad eaſdem, de quibus modo diximus, & Relatio ac ſententia Commiſſariorum, quam modo retulimus.

§. 35. LEIBNITIUS tunc temporis Viennæ in Auſtria degebat, nec Commercium epiſtolicum ibidem videre ipſi contingebat. Cum igitur ex ipſo per litteras quærerem, num idem in Actis Eruditorum recenſeri & quædam ad ipſum reponi conſultum judicaret; conſultius ipſi videbatur, ut charta quadam volante, ſuppreſſo loci ac Autoris nomine, publico ſignificaretur, ipſum eſſe Viennæ nec Commercium epiſtolicum vidiſſe, atque ex litteris JOANNIS BERNOULLI excerptum publicaretur, quo rationes continebantur, cur inventum calculi differentialis ipſi dubium reddi minime poſſit. Inde anſam arripiebat KEILLIUS, cum in Tranſactionibus Anglicanis, tum in Diario literario quod Hagæ Comitum prodibat, paulo durius de LEIBNITIO atque BERNOULLIO ſcribendi. Quamobrem cum LEIBNITIO limites modeſtiæ tranſgredi videretur, a ſe impetrare non potuit, ut ipſe reſponderet. Scripſit tamen ſententiam ſuam ad amicos, ad quas ejus literas NEWTONUS quoque reſpondit, tumque apparuit, quæ a KEILLIO dicta fuerant, conſentiente & approbante NEWTONO prolata fuiſſe. Epiſtolas haſce LEIBNITII atque NEWTONI idiomate Anglico cum excerptis nonnullis aliis *Hiſtoriæ fluxionum* ſuæ latine conſcriptæ adjecit JOSEPHUS RAPHSON, in qua originem & progreſſum hujus methodi breviſſimo compendio exhibere intendit. Prodiit *Londini* 1715, in 4. (plag. 16). Quid ſibi propoſuerit Autor, ipſe in præfatione monet, ſcilicet inventiones præcipuas in hoc genere primis ſuis autoribus ſpeciatim aſſerere & vindicare, & inprimis D. NEWTONO inventori longe & tempore primo, & præſtantia inventionum præcellentiſſimo, & aditum patefacere tyronibus ad hæcce facilius & explicatius, adeoque ut cuivis introductionis loco ad *Newtoniana*, *Cheynæana* aliorumque inventa & congeſta in hoc genere inſerviret. Si quis hiſtoriam Analyſeos infiniteſimalis conſcribere vellet, ut origo & progreſſus pateret, ac unicuique quod ſuum eſt tribueretur; illi multo majore ſtudio ac ſolertia inquirendum eſſet in ea, quæ a tempore CAVALLERII uſque ad præſens Geometris fuere edita, & accurate determinandum, quantum unuſquiſque ex inventis alterius ſibi notis vel proficere potuerit, vel actu profecerit: ubi certa a probabilibus exacte diſtinguenda. Sed alibi in Logica de hiſtoria ſcientiarum & artium mentem noſtram aperuimus & uberius explicavimus.

§. 36. Controverſia hæc de inventore calculi differentialis poſtea magna animorum contentione agitata,

tata, præſertim inter KEILLIUM & JOANNEM BERNOULLIUM, de qua inprimis legi poſſunt Acta Eruditorum Lipſienſia. Noſtrum jam non eſt eam definire, cum diſcuſſioni hic non ſit locus, ſine qua definiri nequit, nec hoc nobis ſumimus. Neque opus eſt ex Actis laudatis huc tranſcribere, quæ ibidem legi poſſunt. Nos veneramur merita NEWTONI, veneramur merita LEIBNITII, BERNOULLII, aliorumque; æquum exiſtimamus, ut ſuum cuique tribuatur, & gloria, quæ dat vires præclara agendi, excitentur magna ingenia; in aliorum merita extollenda proni ſumus: principiis tamen Philoſophiæ moralis adverſum judicamus de laude altercari, nec ulla nos autoritas movebit, ut altercationibus iſtiuſmodi calculum adjiciamus.

§. 37. Anteqnam igitur recenſioni præſenti Autorum colophonem imponamus, monemus curvarum deſcriptionem plurimum promoviſſe COLINUM MAC LAURIN, Matheſeos in collegio novo Abredonenſi Profeſſorem, & GULIELMUM BRAIKENRIDGE, Eccleſiæ Anglicanæ Presbyterum. Edidit ille *Londini* An. 1720, in 4. (plag. 19, Tabb. 12) *Geometriam organicam*, ſive *Deſcriptionem Linearum curvarum univerſalem.* Docet in eadem, quomodo lineæ ſecundi, tertii, quarti tandemque ordinis cujuſcunque deſcribantur, & ubi oſtendit, quomodo lineæ omnium ordinum altiorum ope linearum ordinis cujuſcunque inferioris deſcribantur, ſimul deſcriptionem Curvarum organicam *Nevvtonianam* demonſtrat. Plurima hic reperies ad Geometriam ſublimiorem ſpectantia. Alter horum autorum, *Londini* 1733, in 4. in publicam lucem emiſit *Exercitationem Geometricam de Deſcriptione Linearum Curvarum* (plag. 10). Tradit primum deſcriptionem curvarum primi generis, ſeu linearum ſecundi ordinis, deinde vero deſcriptionem Linearum cujuſcunque ordinis ope Linearum ordinis inferioris & denique deſcriptionem ſectionum conicarum ope plurium rectarum circa polos moventium. Diverſa tamen ſunt ejus theoremata ab illis, quæ tradit prior, & plura hiſce etiam majora promittit in una aut altera exercitatione poſt paucos menſes edenda: Nobis tamen huc uſque, præter eam quam hic commemoramus, nullam videre licuit. Utiles ſunt deſcriptiones curvarum generales ad Theoriam Curvarum condendam, qualem adhuc deſiderari ſupra (§. 19, c. 3) monuimus. Quid enim tribuendum ſit definitionibus geneticis, vel ex *Synopſi Geometrica* HONORATI FABRY, e Societate Jeſu, intelligitur, quæ *Lugduni Gallorum* in gratiam tyronum edita An. 1669, in 12. (Alph. 1. cum figuris multis in folio excuſis), & cui acceſſere tria opuſcula, nimirum de *Linea Sinuum & Cycloide*, *de maximis & minimis centuria & Synopſis Trigonometriæ*

planæ. Abſit tamen, ut cum Autoribus Anglis, quorum Tractatus hic commendavimus, æquipares BARTHOLOMÆI INTIERI, Florentini, *ad nova arcana Geometrica detegenda aditum*, qui *Beneventi* 1703, in 4. (plag. 13, Tabb. 2) & APOLLONIUM ac SERENUM *Promotum*, qui *Neapoli* 1704, in 4. (plag. 9, Tab. 1) lucem adſpexit, ubi ſectionum conicarum graduum ſuperiorum geneſin tradit. A tyronibus tamen ea legi non inconſultum eſt, antequam ad ſublimiora Anglorum inventa pedem promoveant.

§. 38. Cœterum multa ad calculum differentialem & integralem ſpectantia peti debent ex Actis Eruditorum, ex Hiſtoria & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis *Pariſiis* prodeunt & *Amſtelodami* recuduntur, ex Tranſactionibus Anglicanis, ex Miſcellaneis Berolinenſibus, & Commentariis Petropolitanis, de quibus ſingulis ſupra diximus (§. 36, & ſeqq. cap. 1). Inter Algebraiſtas inprimis quoque nominari debebant JOHAN. FAULHABERUS ex textore Mathematicus inſignis, cum quo per aliquod tempus egit CARTESIUS, cum Algebræ vacaret, & JUSTUS BYRGIUS WILHELMI Haſſiæ Landgravii Mechanicus, ſed illius ſcripta perpauca, hujus nulla videre hactenus licuit.

§. 39. Coronidis loco adhuc obſervamus, in gratiam tyronum idiomate Anglico Inſtitutiones fluxionum edidiſſe HUMPHREDUM DITTON, in quibus præcepta calculi explicat & exemplis quibuſdam ſelectis illuſtrat, cum iſtiuſmodi libellus adhuc deſideraretur. Poſt obitum Autoris novam editionem dedit JOHANNES CLARKE, Regi a ſacris ordinariis, quæ ſub titulo: *An Inſtitution of fluxions*, *Londini* An. 1726, in 8. reg. (plag. 16) prodiit. In eorundem uſum L. TREVIGAR *Sectionum conicarum Elementa* methodo facillima demonſtrata edidit *Cantabrigiæ* An. 1731, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 1, Tabb. æn. 12). In compendium miſit Tractatum analyticum de ſectionibus conicis HOSPITALII, in quo methodus genetica cum analytica conjungitur, ut in Geometria & Algebra vel mediocriter verſatus præcipuas ſectionum conicarum proprietates addiſcere poſſit. Addidit nonnulla, quæ in HOSPITALIO deſiderantur, ſed ad Principia Philoſophiæ naturalis mathematica intelligenda requiruntur. In Italia vero FRANCISCUS XAVERIUS BRUNETTI, Sacrario Pontificis Maximi CLEMENTIS XII. Præfectus, ſub titulo: *Dell' Aritmetica commune e ſpecioſa Trattato*, ſeu Tractatus de Arithmetica communi & ſpecioſa, *Romæ* A. 1731, in 4. (Alph. 1, plag. 11, Tab. 2) Introductionem edidit ad ſcripta arithmetica & analytica intelligenda, in quo præter Arithmeticam, Algebram quoque & Analyſin infiniteſimalem recentiorem perſpicue explicat, ut adeo plura in hoc opere reperiantur, quam titulus promittit.

CAPUT

CAPUT V.

De Trigonometria.

§. 1. TRigonometria in gratiam Aſtronomiæ primum inventa: unde PTOLEMEUS ſub initium operis ſui Aſtronomici tantum hujus doctrinæ exponit, quantum ſcopo ſuo ſufficere viſum eſt, & recentiores Aſtronomi paſſim inſtitutionibus Aſtronomicis Trigonometriæ præcepta præmiſerunt.

§. 2. Magis hanc ſcientiam excoluit JOANNES DE REGIO MONTE in Libris quinque *de Triangulis omnimodis*, An. 1464, conſcriptis, & *Norimbergæ*, mortuo Autore, a SCHONERO An. 1533, in fol. (2 Alph. 11 plag.) editis. Idem quoque Canonem Sinuum novum condidit aſſumto radio pro unitate, eoque in fractiones decimales diviſo, cum ante idem in 60. ſcrupula divideretur. Immo ipſe primum radium ſumebat 60 & nonniſi in fractiones decimales ſubdividebat: ſed cum animadverteret præſtare in calculo, ſi ſinus totus ſit 1, canonem ſuum reformavit, aut novum potius condidit. Canon Sinuum ad radium 60000 conſtructus ſubjungitur ejuſdem Tabulis Directionum Profectionumque, de quibus in Aſtronomia dicemus. Eum in pleriſque ſequitur CLAVIUS (§. 24., c. 1).

§. 3. *Canonem Sinuum* ad radium 1000000000000000, & ad dena quæque ſcrupula ſecunda Quadrantis ſupputavit JOACHIMUS RHETICUS, quem, mortuo Autore, una cum Sinibus primi & poſtremi gradus ad eundem radium & ad ſingula ſecunda ſcrupula Quadrantis edidit BARTHOLOMÆUS PITISCUS *Francof. ad Mænum* 1613. in fol. (3 Alph. 21 plag.), qui adjecit principia Sinuum ad radium 1000000000000000000000 ſupputata & ſinus decimorum triceſimorum & quinquageſimorum quorumque ſcrupulorum ſecundorum per prima & poſtrema 35 ſcrupula prima ad radium 1000000000000000000000. Hujus Canonis uſus inprimis eſt in corrigendis Tabulis Sinuum atque Tangentium vulgaribus.

§. 4. Multum nimirum Trigonometriæ perficiendæ incubuit RHETICUS, Mathematum Profeſſor Wittebergenſis, ſed qui relicta Profeſſione ad COPERNICUM profectus & apud eum egit: quemadmodum ex *Opere Palatino de Triangulis* apparet, quod ab ipſo cœptum conſummavit L. VALENTINUS OTHO, Principis Palatini Friderici IV Electoris Mathe-

Mathematicus. Prodiit An. 1616, in fol. (21 Alph. 17 plag.). Continentur in eo 1. RHETICI libri tres de fabrica Canonis doctrinæ triangulorum, & 2. ejuſdem liber quartus de triangulis globi: 3. OTHONIS libri quinque de triangulis globi ſine angulo recto: 4. prolixus Canon triangulorum.

§. 5. PITISCUS vero & ipſe *Trigonometriam* egregie illuſtravit editis quinque de eadem libris An. 1599, quorum editio tertia auctior prodiit *Francof.* An. 1612, in 4. (2 Alph. 15. plag.). Libris iſtis ſubjicitur Canon Sinuum, tangentium & ſecantium una cum libris undecim, in quibus trigonometriæ uſus in ſolutione problematum Geodæticorum, altimetricorum, architectonicorum, geographicorum, gnomonicorum & aſtronomicorum oſtenditur, quæ a nobis ſuis in locis per eandem ſoluta.

§. 6. Non minus commendari merentur WILLEBRORDI SNELLII *doctrinæ Triangulorum Canonicæ* libri quatuor, quibus Canonis ſinuum, tangentium & ſecantium conſtructio, triangulorum tam planorum, quam ſphæricorum expedita dimenſio breviter ac perſpicue traditur, una cum Canone Secantium. Poſt mortem Autoris eos edidit MARTINUS HORTENSIUS, Delfenſis (*Lugd. Bat.* 1627, in 8. plag. 29) & tractatus problematum geodæticorum & ſphæricorum adjecit, quibus utriuſque Trigonometriæ uſus edocetur.

§. 7. An. 1591, PHILIPPUS LANSBERGIUS edidit *Geometriam Triangulorum*, quæ Anno 1663, *Middelburgi in Seelandia* in fol. (plag. 11) auctius recuſa & primum inter opera ejus locum tenet (§. 26, c. 1). In eo Trigonometriam tam planam, quam ſphæricam, & conſtructionem ſinuum atque tangentium perſpicue explicat, quemadmodum jam fecerat GEORGIUS PURBACHIUS, Præceptor REGIOMONTANI, Profeſſor Matheſeos in Academia Viennenſi, qui in promovendo Matheſeos ſtudio plurimum operæ collocavit, & de cujus meritis plura dicemus in Aſtronomia.

§. 8. Inſignis ad Trigonometriam acceſſio facta eſt, Logarithmis a JOHANNE NEPERO, Barone Merchiſtonii Scoto, in eandem introductis. Prodiit *Mirifici Logarithmorum Canonis deſcriptio ejuſque uſus in utraque Trigonometria & omni Logiſtica mathematica explicatio*, *Edinburgi* 1614, in 4. (plag. 21) & opera filii, parente mortuo, recuſum eſt opus auctius An. 1619. Acceſſere nempe tractatus aliqui de logarithmorum conſtructione poſthumi. In eodem opere continetur regula generalis facilius ſolvendi triangulorum ſphæricorum rectangulorum caſus omnes, cui ſimilem nos quoque dedimus in Elementis noſtris. Cæterum logarithmi iſti ab iis, quibus nunc utimur, ſunt diverſi: ſuppoſuit enim NEPERUS in prima eorundem conſtructio-

ſtructione logarithmum Sinus totius ſeu radii 0, ut multiplicationem & diviſionem in Trigonometria plerumque prorſus evitaret, nec additionem vel ſubtractionem ſubſtituere opus haberet.

§. 9. Canonem NEPERI ad ſingula minuta prima quadrantis conſtructum ad dena ſecunda extendit BENJAMIN URSINUS, Mathematicus Electoralis Brandenburgicus, & cum Canonis tam naturalis, quam artificialis conſtructionem, tum Trigonometriam utramque & quidem ſphæricam juxta NEPERUM explicavit in *Trigonometria, Coloniæ* An. 1625, in 4. edita (conſtat liber 1 Alph. 12 plag. & Canon 2 Alph. 11 plag.). Multa continet lectu digna, præſertim quoad conſtructionem Canonis & praxin Trigonometriæ ſphæricæ.

§. 10. Poſtquam KEPLERUS hoc logarithmorum genus a JUSTO BYRGIO ſupra laudato (§. 38, C. 4) inventum, ſed illo reprehendente in Rudolphinis f. 11, in privatos tantum uſus reſervatum, ad Aſtronomiam tranſtulerat; ipſius gener JACOBUS BARTSCHIUS Canonem URSINI reduxit, reſectis tribus ultimis cyphris, & particulam antilogarithmorum exactiorum ad ſingula bina ſecunda, Tabulamque logarithmorum indicis proſtaphæreſeos ſupputavit atque Heptacoſiadem *Keplerianam* ad ſingula ſcrupula ſecunda dilatavit. Has tabulas, ſub ſoceri KEPLERI auctoritate, *Sagani* edidit An. 1630, ſed ob earum uſum in calculo *Rudolphino* inſignem ſub titulo: JOH. KEPLERI & JACOBI BARTSCHII *Tabulæ Manuales Logarithmicæ* An. 1700, *Argentorati* in 8. (1 Alph. 17 plag.) recudi fecit JOHANN. CASPAR EISENSCHMID, Med. D.

§. 11. Ex conſilio NEPERI logarithmorum formam immutavit HENRICUS BRIGGIUS, Profeſſor Geometriæ Oxonienſis, ita ut logarithmus unitatis fieret 0, quemadmodum nos expoſuimus in Elementis Arithmeticæ cap. 8. Conſtruxit Canonem Logarithmorum numerorum vulgarium ab 1 uſque ad 20000 & a 90000 uſque ad 100000; quem in *Arithmethicæ Logarithmica* una cum methodo inveniendi logarithmos & uſu eorundem exhibuit An. 1624, in fol. Sed mox *Goudæ* An. 1628, in fol. (9 Alph. 7 plag.) eandem recudi fecit ADRIANUS VLACQ, Goudanus, qui logarithmos Briggianos 4 numeris minuit, lacunam inter 20000 & 90000 explevit, ut 100 logarithmorum chiliades exhibuerit, Canonem triangulorum ſeu Tabulam ſinuum & tangentium artificialium ad radium 10000000000 & ad ſingula ſcrupula prima quadrantis adjecit, in deſcriptione vero *Briggiana* quædam hic illic immutavit, quædam omiſit, quædam adjunxit. Idem poſtea An. 1633, Canonem ſinuum atque tangentium artificialium extendit ad ſingula dena ſecunda & ſub titulo Trigonometriæ artificialis ſeu Magni

Canonis triangulorum Logarithmici, *Goudæ* in fol. (5 Alph. 3. plag.), adjectis Chiliadibus viginti Logarithmorum pro numeris naturali ſerie creſcentibus H. BRIGGII, edidit.

§. 12. Inchoaverat idem BRIGGIUS Canonem ſinuum & tangentium artificialem pro gradibus graduumque centeſimis; ſed morte præpeditus non abſolvit. Quæ adeo deficiebant, ſupplevit HENRICUS GELLIBRAND & An. 1633, ſub nomine *Trigonometriæ Britannicæ* publicavit. Prodiit *Goudæ* in fol. (3 Alph. 7. plag.).

§. 13. Sub eodem *Trigonometriæ Britannicæ* nomine, ſed Anglico idiomate opus trigonometricum præclarum edidit JOHANNES NEWTON, *Londini* 1658, in fol. (5 Alph. 19 plag.), in quo continentur 1. conſtructio & uſus Canonis ſinuum & tangentium naturalis atque artificialis, 2. ſolutio triangulorum, tam planorum, quam ſphæricorum, 3. chiliades centum logarithmorum pro numeris vulgaribus, 4. Canon logarithmorum pro ſinibus & tangentibus ad ſingulos gradus & partes graduum centeſimas, 5. Canon logarithmorum pro ſinibus & tangentibus ad tres primos Quadrantis gradus & partes graduum milleſimas.

§. 14. Fundamentum Logarithmorum breviter quidem, attamen perſpicue expoſuit STIFELIUS in Arithmetica integra (§. 7. C. 1.) Lib. 3, f. 249, b & ſeqq. monens poſſe hic fere novum librum integrum ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportere, ut ſe hic ſubducat & clauſis oculis abeat. Utilitatem fractionum decimalium ad exprimendos numeros prope veros, qui in calculo excludant errorem quantumlibet exiguum, adeoque contemnendum, dudum ante monſtravit REGIOMONTANUS. Hiſce igitur luminibus uſi ſunt BYRGIUS atque NEPERUS in Logarithmis computandis. Recentiores vero alias invenere methodos, de quibus in Algebra agitur. Illa tamen, qua uſi ſunt Canonis conditores, ad captum tyronum compoſita, adeoque a nobis in Arithmetica retenta.

§. 15. An. 1643, *Bononiæ* in 4. (1 Alph. 1 plag.) BONAVENTURÆ CAVALLERII *Trigonometria plana & ſphærica, linearis & logarithmica*, cum canone duplici Trigonometrico & chiliade numerorum abſolutorum ab 1 uſque ad 10000, eorumque logarithmis ac differentiis, opus Autore ſuo dignum, prodiit. Eodem uſus eſt GEMINIANUS RONDELLI, Mathem. Profeſſor Bononienſis, qui An. 1705, *Bononiæ* in 4. (2 Alph. 12 plag.) *Trigonometriam univerſalem linearem & logarithmicam*, Italico idiomate edidit, cum Canone ſinuum, tangentium & ſecantium, atque logarithmorum ſinuum & tangentium & decem chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 16. SETHI WARDI *Idea Trigono-*

gonometriæ demonſtratæ, quæ cum Præ-lectione *de Cometis* & *Inquiſitione in* BULLIALDI *Aſtronomiæ Philolaïcæ fundamentum*, *Oxonii* An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, eſt admodum conciſa & characteribus expreſſa. Ejuſdem vero indolis eſt *Trigonometria* WILHELMI OUGHTREDI, quæ cum Canone ſinuum, tangentium & ſecantium *Londini* 1657, in 4. lucem adſpexit (1 Alph. 13 plag.). In eundem quoque cenſum veniunt JOANNIS WILSON *Principia Trigonometriæ ſuccincte demonſtrata*, quæ *Lugduni Batavorum* An. 1718, in 8. (plag. 5, Tab. 2) prodiere.

§. 17. RICHARDUS NORWOOD in *Trigonometria*, quæ Anglico ſermone *Lond.* 1651, in 4. recuſa, (2 Alph. 3 plag.) præter Trigonometriam planam & ſphæricam, logarithmorum doctrinam explicat, & omnia Trigonometriæ ſphæricæ problemata per duo axiomata fundamentalia NEPERI ſolvit. Adjiciuntur Canones ſinuum & tangentium naturalium atque artificialium, cum 10 chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 18. WILHELMUS HAWNEY An. 1725, *Londini* in 8. reg. (Alph. 1, plag. 8) Trigonometriam planam & ſphæricam omnem explicatam dedit & ejus uſum in Navigatione, Aſtronomia, Geographia, Architectura militari, Geodæſia & Euthymetria, atque Gnomonica prolixe commonſtravit in libro ſermone Anglico edito ſub titulo: *The Doctrine of plain and ſpherical Trigonometry.*

§. 19. *Compendium Trigonometriæ planæ & ſphæricæ* non contemnendum, *Leodii* 1704, in 8. (12½ plag.) edidit JACOBUS GOODEN, e Societate Jeſu, in quo regulæ accurate demonſtrantur & exemplis utilibus ex Geodæſia, Aſtronomia & Geographia petitis illuſtrantur. Adjiciuntur palmaria ex EUCLIDE theoremata, cum Canonibus ſinuum, tangentium & logarithmorum contractis.

§. 20. In curſibus Trigonometriam bene explicant DECHALES atque OZANAM (§. 4. 7. c. 1). Præterea in multis aliis libris, qui de Aſtronomia & Navigatione conſcripti ſunt, Trigonometria tam plana, quam ſphærica explicatur. Sed de eo dicemus ſuo loco, quando illorum mentionem facturi ſumus.

§. 21. *Tabulæ Sinuum & Tangentium itemque Logarithmorum* ſeparatim editæ commendantur VLACCI, quæ *Hagæ Comitum* An. 1665, prodierunt, & OZANAMI, quæ juxta eas correctæ. Quid nos in noſtris præſtiterimus, quæ *Halæ* 1711 (plag. 20) prodierunt, & 1728, recuſæ ex præfatione iiſdem præfixa intelligi poteſt.

§. 22. Analyſis ſpecioſa Trigonometriæ ſphæricæ, primo mobili, Triangulis rectilineis & Progreſſioni Arithmeticæ & Geometricæ aliiſque variis Problematis applicata a R. P. JACOBO KRESA, e Societate Je-

H 2 ſu,

ſu, quæ *Pragæ* prodiit 1720, in 4. (Alph. 2, Tab. 2), docet uſum Algebræ communis, cujus Iſagoge libro primo præmittitur, in Trigonometria plana & Sphærica.

CAPUT VI.

De Statica & Mechanica.

§. 1. Theoria Staticæ atque Mechanicæ apud veteres fuit valde imperfecta, nec quicquam ea de re extat, niſi quod ARCHIMEDES in duobus *De æquiponderantibus* libris, de centro gravitatis figurarum planarum, & de Statices palmario fundamento, & PAPPUS lib. 8. *Collect. Mathemat.* de quinque Potentiis mechanicis, vecte, axe in peritrochio, trochlea, cochlea & cuneo demonſtrat.

§. 2. Neque ulterius progrediuntur Autores recentiores, qui inſtitutiones Mechanicas ediderunt: immo plerique Archimedea de centro gravitatis, quæ non ſunt ad palatum tyronum, nec ad praxin directe tendunt, omittunt. Pertinent huc GUIDI UBALDI liber *Mechanicorum*, *Piſauri* An. 1577, editus in fol. (2 Alph.) SIMONIS STEVINI *Statica* (§. 23, Cap. 1); JAC. ROHAULT *Tractatus de Mechanica*, qui inter poſthuma habetur *Hagæ* 1690, in 12. reg. (1 Alph. 22 plag.) edita & non nullis editionibus Phyſicæ ejus in Latinum verſæ ſubjungitur; IGNATII GASTONIS PARDIES *Statica* Gallice *Hagæ Comitum* An. 1692, in 12. (10½ plag.) tertia vice recuſa & vitioſiſſime in Latinam linguam translata; BERNHARDI LAMY Tractatus Gallicus *de Mechanica* (*Pariſiis* 1687, in 12. plag. 12), cui acceſſit plagula una continens Novam methodum demonſtrandi præcipua theoremata Elementorum Mechanicorum; GUIL. OUGHTRED *Inſtitutiones Mechanicæ* (§. 27, cap. 1), PAULI CASATI *Mechanicorum* libri octo *Lugduni Gallorum* An. 1684, in 4. (4 Alph. 7 plag.) & AND. JUNGENICKELS, ex vitriario primum militis gregarii, deinde Suggeſtuum tormentorum Præfecti *Clavis Machinarum*, Germanice conſcripta & *Norimbergæ* An. 1661, in 4. (2 Alph. 3 plag.) edita. Hos inter STEVINUS atque CASATUS multa ad praxin profutura afferunt: ROHALTIUS atque LAMY ob perſpicuitatem tyronibus commendandi: JUNGENICKELIUS iis ſatisfacit, qui in Geometria non multum verſati fundamenta mechanica populari modo cognoſcere cupiunt.

§. 3.

§. 3. Theoriam potentiarum mechanicarum, quæ dicuntur, ſeu machinarum ſimplicium nemo prolixius demonſtravit, ac ſingula huc ſpectantia uberius expoſuit, quam VARIGNONIUS in opere poſthumo, quod duobus Tomis *Pariſiis* An. 1725, in 4. reg. (Alph. 4, plag. 21, Tabb. 64) ſub titulo: *Nouvelle Mécanique & Statique* prodiit, ubi ex motu compoſito demonſtrationes deducit. Ad eorum palatum eſt, qui theoriis profundis delectantur. Ideam hujus operis jam publicaverat An. 1687, *Pariſiis* in 4. ſub titulo: *Projet d'une nouvelle Mécanique*, in quo nonniſi principia continentur peritis valde probata. Adjiciuntur duo Tractatus, quorum primo examinatur Machina ab affrictu libera, cujus mentionem facit PERRAULT in Commentario ad VITRUVIUM; ſecundo autem opinio BORELLI de ponderibus ex chorda ſuſpenſis.

§. 4. Ulterius primus omnium progreſſus GALILÆUS GALILÆI in *Diſcurſibus & demonſtrationibus mathematicis circa duas novas ſcientias, pertinentes ad Mechanicam & motum localem*, una cum *Dialogis ejus de ſyſtemate mundi*, *Lugduni Bat.* 1699, in 4. editis. (Dialogi de motu conſtant 1 Alph. 14. plag.) In iis enim reſiſtentiam ſolidorum conſiderare aggreſſus eſt, quamvis parum feliciter, uſus nimirum principiis parum genuinis, & de motu cum generalia tradidit, tum in ſpecie motum gravium tam libere, quam ſuper plano inclinato deſcendentium vel aſcendentium, atque motum projectorum & pendulorum feliciſſime evolvit.

§. 5. Inventa GALILÆI expolivit diſcipulus ejus EVANGELISTA TORRICELLIUS in libris duobus *de motu gravium naturaliter deſcendentium & projectorum*, qui inter opera ejus Geometrica habentur (§. 12, Cap. 3); immutavit JOH. BAPTISTA BALIANUS in Tractatu *de motu naturali gravium* (*Genuæ* 1646, in 4.), ſed parum feliciter; & doctrinam de motu pendulorum ulterius promovit CHRISTIANUS HUGENIUS in inſigni Tractatu *de Horologio oſcillatorio*, *Parij*). An. 1673, in fol. (2 Alph.), cujus etiam parte tertia de linearum curvarum evolutione & dimenſione Geometria ſublimior novis inventis illuſtratur. Illuſtris LEIBNITIUS de reſiſtentia ſolidorum certiora dedit in Actis Eruditorum An. 1684, pag. 319, & eandem doctrinam celeberrimus VARIGNONIUS more ſuo maxime univerſalem reddidit Commentariis Academiæ Regiæ ſcientiarum An. 1702, pag. 87.

§. 6. JOH. ALPHONSUS BORELLUS in Tractatu *De vi percuſſionis* regulas motuum explicare aggreſſus eſt. Prodiit primum *Bononiæ* An. 1666, in 4. & cum Tractatu altero *De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*, *Lugd. Batav.* An. 1686, in 4. (3 Alph. 18 plag. 21 Tabb. æn.). Idem in Opere eximio *De motu ani-*

malium, *Lugd. Batav.* 1685, in 4. (3 Alph. 18 plag. 18 Tabb. æn.) regulas Staticorum ad motus animalium varios explicandos applicavit.

§. 7. Primi regulas motuum veras dedere eodem tempore WALLISIUS, HUGENIUS & CHRISTOPHORUS WREN: ille quidem de Corporibus non elaſticis, hi vero de corporibus elaſticis. Extant regulæ *Walliſianæ* in Tranſactionibus Anglicanis n. 43, p. 864, *Wrennianæ* n. 43. p. 867, & *Hugenianæ* n. 46, pag. 927, Conf. *the Philoſophical Transactions abrig'd* by JOHN LOWTHORP Vol. I. cap. 5, p. 545, & ſeqq.

§. 8. HUGENIUS poſtea Tractatum peculiarem *De motu corporum ex percuſſione* conſcripſit, qui inter poſthuma opera habetur, & in quo inventa ſua clarius explicat: WALLISIUS vero abſolutiſſimum *de Mechanica ſeu motu* opus perfecit, *Oxonii* An. 1669, in 4. primum editum, deinde Tomo primo Operum inſertum, in quo non ſolum inventa veterum & *Galilæana*, *Wrenniana*, *Hugeniana* atque propria, ope analyſeos plerumque demonſtrantur, verum etiam in prolixa de centro gravitatis pertractatione multa ad Geometriam ſublimiorem ſpectantia una evolvuntur. Utitur Arithmetica hinc inde infinitorum, ſed ope calculi differentialis ac integralis talia felicius eruuntur.

§. 9. Quoniam opus præclarum captum tyronum tranſcendit; operæ pretium fecit Cl. JOH. KEILL, Aſtronomiæ Profeſſor in Academia Oxonienſi, quod in *Introductione ad veram Phyſicam*, quæ An. 1705, *Oxonii* in 8. reg. (19½ plag.) auctior recuſa, palmaria illius de motu dogmata ad captum tyronum ex elementis demonſtraverit, more veterum Geometrarum.

§. 10. Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in Tractatu *de Mechanica* (*Pariſ.* 1695, in reg. 12. plag. 18.) non modo ea demonſtrat, quæ ad praxin mechanicam uſui ſunt; verum etiam motuum doctrinam attingit. Unde merito in hoc genere commendatur.

§. 11. Proſtant etiam alia de motu corporum ex percuſſione Scripta particularia. Pertinet huc MARIOTTI Tractatus de percuſſione corporum (*du Choc des corps*,) qui *Pariſiis* An. 1673, in 12. (plag. 18, Tab. 2) editus Autore ſuo dignus; & inter opera ejus legitur, quæ *Lugduni Batavorum* An. 1717, in 4. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 25) prodierunt. In eo ex experimentis pendulorum demonſtrationes deducit; P. DECHALES Tractatus Gallicus *De motu* (*Lugd. Gall.* An. 1682, in 8) & P. PARDIES *Diſcurſus de motu locali* (*Hag. Comit.* An. 1692, in 12. tertia vice Gallice recuſus) non magni momenti, nec veritati per omnia conſentaneus. Inprimis vero hic nominanda ſunt *Elementa* Gallica *Mechanicæ & Phyſicæ* a PARENTIO, *Pariſ.* An. 1700, in reg. 12, (plag. 22, Tabb. 12) edita, quamvis non ſatis perſpicua.

§. 12.

§. 12. HUGENIUS primum conſiderare cœpit in motu curvilineo, præſertim circulari, vim centrifugam, & de ea aliquot theoremata, ſed ſuppreſſa demonſtratione, Tractatui de Horologio oſcillatorio (§. 4) ſubjunxit. Conſcripſit deinde Tractatum *De vi centrifuga*, qui inter poſthuma comparet, ubi theoremata iſta demonſtrantur. Sed antequam is in publicum prodiret, Cl. KEILLIUS faciles ac elegantes eorundem theorematum demonſtrationes dedit ſub finem Introductionis ad veram Phyſicam modo laudatæ (§. 9). Eaſdem regulas per calculum differentialem in Commentariis Academiæ Regiæ ſcientiarum An. 1700, p. 19. eruit HOSPITALIUS & nos noſtro more in Elementis Mechanicæ demonſtravimus.

§. 13. De motu, præſertim curvilineo, inventa prorſus præclara & admiranda dedit Geometra ſummus ISAACUS NEWTONUS in excellenti *Principiorum Mathematicorum Philoſophiæ Naturalis* Opere (*Londini* An. 1687, in 4. reg. 2 Alph. 18 plag.) quod hinc inde emendatum & auctum *Cantabrigiæ* 1713, in 4 reg. (2 Alph. 19 plag.) & mox *Amſtelodami* An. 1714, eadem forma recuſum cum præfatione ROGERI COTES, Aſtronomiæ & Philoſophiæ experimentalis Profeſſoris Plumiani in Academia Cantabrigienſi, qui operam dedit, ut opus præſtantiſſimum nitide imprimeretur. Tandem An. 1726. *Londini* in 4. reg. (Alph. 2 plag. 3) prodiit editio tertia aucta & emendata, ceteris omnibus præferenda. Docetur in hoc opere applicatio Geometriæ ad Naturæ explicationem & Scientia mechanica mirifice fuit promota.

§. 14. Excitavit illud attentionem Geometrarum primi ordinis, eoſque incitavit, ut varia ad majorem univerſalitatem perducerent & ulterius proveherent: quos inter inprimis nominandus mihi eſt celeberrimus VARIGNONIUS, cujus præclara in hoc genere meditata in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum paſſim leguntur.

§. 15. Cæterum cum ad lectionem operis *Newtoniani* non admittantur, niſi in Theoria mathematica multum diuque verſati, cum in ea majorem perſpicuitatem deſideraverit ipſe HUGENIUS; GUILIELMUS WHISTON, Matheſeos tum Profeſſor in Academia Cantabrigienſi; in *Prælectionibus Phyſico-Mathematicis* Philoſophiam Newtoni mathematicam explicatius tradidit & facilius, quamvis ſubinde laxius, demonſtravit (*Cantabrigiæ* An. 1710, in 8. 1 Alph.). Forſan huc etiam tendit liber alius ab HENRICO DITTON *Londini* An. 1706, ſub titulo *the general Laws of nature and motion with their application to Mechanicks, alſo the doctrine of centripetal forces and velocities of bodies, deſcribing any of the Conick Sections* editus, quem nobis non viſum

ſum nomen Autoris ex aliis ſpeciminibus nobis noti commendat.

§. 16. Inprimis etiam loco introductionis in opus *Newtonianum* commendanda eſt explicatio quarundam ſectionum ejuſdem, quam dedit JOHANNES CLARKE & ſub titulo: *A Demonſtration of ſome of the principal ſections, of Sir Iſaac Newton's principles of natural Philoſophy, in wich his peculiar method of treating that uſeful ſubject is explained an applied to ſome of the chief phænomena of the ſyſtem of the World, Lond.* 1730, in 8. reg. (plag. 22, Tabb. 17) edidit, & omnium maxime DOMCKII *Philoſophia mathematica Newtoniana* illuſtrata, quam Latino ſermone conſcriptam *Londini* An. 1731, in 8. (Alph. 1, plag. 3, Tabb. 16) publici juris fecit autor. Enimvero cum opus *Newtonianum* merito tantopere celebratum a tyronum non modo, ſed etiam provectiorum captu valde removeatur, utiliſſimam operam ſumeret, qui continuo Commentario idem illuſtraret, qualem in Geometriam CARTESII edidit RABUEL (§.7, c.4).* Præſtaret enim, ut principiis Geometriæ, Analyſeos & Mechanicæ inſtructus ſtatim ad lectionem ejus accederet, cum dulcius ex fonte bibantur aquæ, quam demum per ambages non ſine multo temporis diſpendio ad eandem perduceretur, aut prorſus ab eadem avocaretur.

§. 17. Multa egregia de motu & reſiſtentia cum ſolidorum, tum fluidorum a celeberrimis avi hujus Geometris detecta in Actis Eruditorum & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, nec non in Tranſactionibus Anglicanis, paſſim extant; & præclarum de motu ſolidorum & fluidorum opus Geometræ inſignis JACOBI HERMANNI, Mathematum Profeſſoris primum Patavii, deinde Francofurti ad Oderam, poſthac Petropoli Mathematum, tandem in Academia patria Baſileenſi Philoſophiæ moralis celeberrimi, *Amſtel.* 1716, in 4. (Alph. 2, plag. 15, Tabb. 12) ſub *Phoronomiæ* nomine editum plurima inventa nova eaque egregia continet. More veterum doctrinam hanc demonſtrare voluit, quorum tamen methodum non ſatis familiarem expertus, nec intimius perſpectam poſſedit, ut adeo & ſibi, & aliis magis conſuluiſſet, ſiquidem analytica methodo, in qua erat verſatiſſimus, uſus fuiſſet.

§. 18. Ne igitur deſideraretur opus Mechanicæ, in quo Motus ſcientia profundius explicaretur, & lectores ad ſolvenda proprio marte problemata præpararentur, LEONHARDUS EULERUS, Academiæ Imperialis ſcientiarum, quæ Petropoli floret, Membrum & Matheſeos ſublimioris Profeſſor, *Mechanicam* ſive *Motus ſcientiam analytice expoſitam* con-

* Id fecerunt PP. LE SEUR & JACQUIER ex ordine Minimorum. Prodierunt hujus Commentarii Volumina duo, *Genevæ in* 4. primum An. 1739 (Alph. 3, plag. 5) ſecundum An. 1740 (Alph. 2, plag. 7) Tertium An. 1742.

conſcripſit & duobus Tomis, *Petropoli* in 4. reg. (Tom. I, Alph. 2, plag. 17, Tabb. 14, & Tom. II, Alph. 2, plag. 18, Tabb. 18) in lucem publicam emiſit, plura ſuo tempore additurus. Reperies in hoc opere multa nova, quæ alibi fruſtra quæſiveris, & ad ejus lectionem cum fructu abſolvendam admittitur, qui in Analyſi finitorum & infinitorum ſatis fuerit exercitatus.

§. 19. Quibus machinarum conſtructio curæ cordique eſt, in eorum gratiam Tractatum de Viribus motricibus (*Traité des Forces mouvantes*) *Pariſiis* An. 1722, in 8. reg. (Alph. 1½, Tabb. 8) edidit DE CAMUS. Explicantur enim principia & ad machinas explicantur, quorum in praxi mechanica cognitio præſupponitur.

§. 20. Machinarum deſcriptiones dederunt JACOBUS DE STRADA, *Ferdinandi*, *Maximiliani* & *Rudolphi II*, Imperatorum Antiquarius, An. 1618, a nepote OCTAVIO DE STRADA in publicum emiſſas, & An. 1629, recuſas; ZEISINGIUS in *Theatro Machinarum*, *Lipſiæ* An. 1612, in 4. edito, JACOBUS BESSON in *Theatro inſtrumentorum & machinarum* An. 1582, in lucem emiſſo in fol. (plag. 32), cum FRANCISCI BEROALDI Figurarum declaratione demonſtrativa & JOLII PASCHALIS additionibus: AUGUSTINUS DE RAMELLIS DE MASANZANA in opere, quod ex Gallico in ſermonem Germanicum translatum *Lipſiæ* An. 1620, in fol. (7 Alph. 18 plag.) ſub titulo: *Schatz-Kammer Mechaniſcher Künſte* prodiit, & GEORGIUS ANDREAS BÖCKLER, in *Theatro Machinarum* novo (*Norimb.* 1673, in fol. plag. 11, Tabb. æn. 154).

§. 21. Quoniam deſcriptiones machinarum, quas Autores iſti tradunt, omnes ſunt nimis breves, & inprimis dimenſionum rationes non exprimunt, ita ut adæquata machinarum idea inde hauriri nequeat; Mechanicus ingenioſus atque induſtrius JACOBUS LEUPOLDUS novum promiſit Theatrum machinarum & inſtrumentorum in Actis Eruditorum An. 1712, p. 366, cui ut ſtaret, ipſimet eum hortati ſumus. Stetit tandem, quantum per fata licuit, & *Lipſiæ* An. 1724, in publicam lucem protulit *Theatrum machinarum generale*, *Schau-Platz des Grundes mechaniſcher Wiſſenſchafften* in fol. (Alph. 2, plag. 20, Tab. 71) in quo potentias mechanicas & virium motricium ad machinas applicationem declarat. Eodem adhuc anno comparuerunt *Theatrum machinarum hydrotechnicarum*, *Schau-Platz der Waſſer-Bau-Kunſt*, in quo ea traduntur, quæ ad Architecturam aquarum faciunt (Alph. 2, plag. 5, Tabb. 51) & pars prior *Theatri machinarum hydraulicarum*; *Schau-Platz der Waſſer Künſte*, in quo repræſentantur machinæ ad aquas elevandas excogitatæ (Alph 2, Tabb. 52). Pars poſterior ſubſecuta

anno ſequente (Alph. 2, plag. 1, Tabb. 54). Eodem adhuc anno 1725, comparuit *Theatrum Machinarium*, quod vocat Autor, *Schau-Platz der Hebezeuge* (Alph. 2, Tab. 96), in quo reperies machinas ponderibus elevandis aptas hiſque agnatas, & *Theatrum ſtaticum univerſale*, *Schau-Platz der Wage und Gewicht-Kunſt*, (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 57), quod exhibet varias librarum & ſtaterarum ſtructuras, una cum inſtrumentis hydroſtaticis, meteorologicis & ad libellationem neceſſariis, & quæ ad pondera ſpectant, explicat. An. 1726, *Theatrum Pontificiale*, quod vocat autor, *Schau-Platz der Brücken und des Brücken-Baues* (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 57), quæ eam Architecturæ partem illuſtrat, quæ de pontibus ſtruendis agit. Tandem An. 1727, *Theatrum Arithmetico-Geometricum*, *Schau-Platz der Rechen-und Meß-Kunſt* (2 Alph. 8½ plag. Tabb. 43) ſucceſſit, in quo inſtrumenta Arithmetica & Geometrica deſcribuntur. Niſi mors Autoris finem impoſuiſſet, dare adhuc conſtituerat Theatra 1. fontium hydraulicorum, 2. molarum, 3. ad mechanicam ignis ſpectantium, 4. machinarum in metalli fodinis uſitatarum, 5. machinarum & inſtrumentorum, quæ in Architectura civili & militari uſui ſunt, 6. quæ in re Oeconomica & 7. venatoria uſum habent, 8. machinarum & inſtrumentorum aërometricorum, 9. machinarum & inſtrumentorum opticorum, 10. machinarum & inſtrumentorum in Gnomonica & arte horologiopæa uſitatorum, 11. inſtrumentorum aſtronomicorum, 12. acuſticorum & muſicorum aliorumque agnatorum, 13. anatomicorum & chirurgicorum, & tandem omnium machinarum & inſtrumentorum apud artifices & opifices obviorum.

§. 22. Dolendum inprimis erat, quod molarum uſitatarum genera cum Architecturæ parte, quæ iiſdem excitandis deſtinatur, non deſcribere potuerit Autor. Hunc igitur defectum ſupplere conatus eſt JOHANNES MATTHIAS BEYER, qui per modum Tomi noni Theatri machinarum LEUPOLDI An. 1735, *Lipſiæ* in fol. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 43) edidit, in quo non modo uſitata molarum genera, verum etiam ea, quæ ad extructionem earundem neceſſaria ſcitu, deſcribuntur. Acceſſit Tomus ſecundus, in quo jura molendinorum operoſe congeruntur (Alph. 2, plag. 12) in uſum Juriſperitorum.

§. 23. Molas Batavorum peculiari libro exhibuit PETRUS LIMPERGH ſermone patrio, cujus *Moole-Boek*, *Amſtelodami* An. 1690, in fol. reg. (plag. 2, Tabb. 32) prodiit. Accuratiores illarum delineationes ac deſcriptiones dedit JOHANNES VAN ZYL in Theatro Machinarum univerſali, *of groot algemen Moolen-Boek*, cujus

cujus Tomus I, *Amſtelodami* An. 1734, in fol. reg. prodiit (plag. 6, Tabb. 56), etenim ſingulæ partes, qualescunque tandem fuerint, quam accuratiſſime ſecundum ſuas dimenſiones repræſentantur, ut integræ ſtructuræ adæquatam ideam inde haurire liceat. Textus in Germanicam linguam translatus fuit, ut operis hujus etiam in Germania eſſet uſus.

§. 24. Accuratas quarundam machinarum recentius inventarum deſcriptiones dedit PERRAULT in opuſculo Gallico, quod ſub titulo: *Recueil de pluſieurs Machines de nouvelle invention*, *Pariſiis* An. 1700, in 4. (plag. 7, Tabb. 11) prodiit, & HUGENIUS cum in Tractatu *De horologio oſcillatorio* horologium a ſe inventum, tum in *Operibus poſthumis* automatum ſuum planetarium accurate deſcribit.

§. 25. In Gallia machinas ab Academia Scientiarum approbatas, a prima fundatione uſque ad noſtra tempora, una cum illarum deſcriptionibus, delineatas conſenſu Academiæ ſub titulo: *Machines & Inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, *Pariſiis* ſex Tomis publici juris fecit GALLONUS An. 1735, in 4. reg. (Alph. 6, plag. 20, Tabb. 422). Non modo machinæ ſcenographice repræſentantur, verum etiam ichnographice, cum orthographiis & ſingularum partium delineationibus adjiciuntur, ubi opus fuerit. Deſcriptiones ſunt ſatis accuratæ, ut nihil in iis deſiderari poſſit. Subinde etiam vires ad agitandam machinam requiſitæ ad calculum revocantur, aliaque cognitu neceſſaria annotantur. Opus hoc Mechanicæ practicæ cultoribus plurimum commendandum.

§. 26. Structuram horologiorum exponit Anglus Anonymus * in Tractatu Anglico, qui auctior *Londini* An. 1700, in 12. reg. ſub titulo: *The artificial Clockmaker* (7½ plag. Tabb. 2) prodiit & An. 1707, in Germanicum idioma translatus, novæ editioni Gnomonicæ *Welperianæ* ſubjungitur: quod argumentum etiam attingit OUGHTREDUS in poſthumis pag. 68, & ſeqq. Idiomate autem Germanico de horologiorum ſtructura commentatus eſt JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, in mechanicis & praxi optica verſatiſſimus. Prodiit ejus Tractatus ſub titulo: *Vollſtändige Nachricht von den Uhren*, *Halæ* 1718, in 8. (plag. 9, Tab. 7). Addidit An. 1722, Continuationem, in qua ſupplentur, quæ deſiderari poterant de horologio examinatorio & repetitorio (plag. 12, Tabb. 22).

§. 27. Autoribus tamen iſtis palmam præripit D. JACOBUS ALEXANDER, Monachus Benedictinus Congregationis S. Mauri, in Tractatu generali de Horologiis, qui ſub titulo: *Traité général des Horloges*, *Pari-*

* GULIELMINI DERHAM Canon. Windſor, non uno nomine commendandus.

Pariſiis in 8. maj. 1734, prodiit (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 26), quem ob utilitatem ſuam, me ſuaſore, in Germanicam linguam tranſtulit CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGERUS, Medicinæ Doctor, & *Lemgovii* An. 1738, in 8. (Alph. 1, plag. 5, Tabb. 25) edidit ſub titulo: *Des P Dom JACOBS ALEXANDERS ausführliche Abhandlung von den Uhren.* Agit etiam de horologiis ſolaribus majoribus conſtruendis. Ceterum hoc opus omnibus commendandum, qui horologiorum conſtructionem accurate cognoſcere deſiderant. Singularia vero de conſtructione horologiorum tradit in libro Gallico HENRICUS SULLY, qui ſecunda vice auctior recuſus *Pariſiis* An. 1737, in 12. (plag. 20, Tabb. 5) cum multis acceſſionibus. Maximopere commendandus iis eſt, qui perfectionem horologiorum curæ cordique habent, atque adeo in Germanicam linguam verti meretur, ut Tractatui ALEXANDRI jungi poſſet.

§. 28. Silentio denique hic prætereunda non erant CASPARI SCHOTTI, e Societate Jeſu, *Technica curioſa*, libris 12 comprehenſa, quæ *Norimbergæ* An. 1664, in 4. (Alph. 6, Tabb. 20) prodierunt. Etenim in iis, præter varia experimenta aliaque technaſmata, continentur etiam mechanica, chronometrica & automatica, conſequenter plurima ad Mechanicam practicam ſpectantia. Edidit idem *Magiam univerſalem Naturæ & Artis* in tres partes diſtributam *Bambergæ* 1677, in 4. (Alph. 14, plag. 2, Tabb. 90): pars enim tertia multa continet, quæ ad Mechanicam & Staticam ſpectant, nimirum quæ ſub nominibus Magiæ centrobarycæ, mechanicæ, thaumaturgæ libris tribus prioribus continentur.

§. 29. Idem SCHOTTUS in Technica curioſa lib. 9, ſub titulo *mirabilium chronometricorum* multa artis horologiopææ utilia tradit, præter alia mechanica. Inprimis etiam de mobili perpetuo varios conatus deſcribit.

CAPUT VII.

De Hydroſtatica, Aerometria, & Hydraulica.

§. 1. HYdroſtaticam primus docuit ARCHIMEDES in libris *De inſidentibus humido*, cujus dogmata ad experimenta applicavit MARINUS GHETALDUS in ARCHIMEDE *promoto*: unde ſua excerpſit OUGHTREDUS (§. 19, cap. 1).

§. 2.

§. 2. MARIOTTUS in Tractatu Gallico de motu aquarum & aliorum corporum fluidorum, qui primum ſub titulo : *Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides*, prodiit *Pariſiis* An. 1686, in 12. reg. (plag. 17½) & in editione Batava operum ipſius legitur, propoſitionum hydroſtaticarum & hydraulicarum magnam partem & rationibus confirmavit, & experimentis comprobavit. Propter inſignem utilitatem D. JOHANNES CHRISTOPHORUS MEINIG eum in Germanicam linguam tranſtulit & notis quibuſdam illuſtratum *Lipſiæ* An. 1723, in 8. (Alph. 1, plag. 5½) edidit.

§. 3. Nec contemnenda habet ROBERTUS BOYLE, cum in *Paradoxis Hydroſtaticis* (*Genevæ* An. 1680, in 4. plag. 15, Tabb. 3), tum in *Medicina Hydroſtatica* (*Genevæ* An. 1693, in 4. plag. 10½): quod utrumque ſcriptum in uſum præſertim phyſicum legi meretur, intelligendum etiam ab iis, qui Mathematum ſunt imperiti.

§. 4. FRANCISCUS TERTIUS DE LANIS, e Societate Jeſu, Tomo tertio *Magiſterii Naturæ & Artis*, *Parmæ* An. 1692, in fol. (6 Alph. 14 plag. Tabb. 13) lib. 25, f. 49, & ſeqq. dogmata hydroſtatica uberius expoſuit, quam alibi leguntur. Tomo autem primo & inprimis ſecundo paſſim Machinas Hydraulicas deſcripſit : quemadmodum etiam in primo Mechanicam multum illuſtravit. Tom. I, *Brixiæ* An. 1684, in fol. 6 Alph. Tab. 24. Tom. II, *Brixiæ* 1686, 6 Alph. 5 plag. Tabb. 20).

§. 5. BERNHARDUS LAMY parte ſecunda Mechanicæ (*§.* 2, cap. 6), quæ inſcribitur *Traité de l'équilibre des liqueurs*, propoſitiones aliquot Hydroſtaticæ ac Hydraulicæ fundamentales explicavit : quod etiam fecere ROHALTIUS (§. cit.) & WALLISIUS in *Mechanicis* (*§.* 8, c. cit.). Commendanda quoque tyronibus *Hydroſtatica* P. DECHALES, quæ in Mundo ipſius Mathematico Tom. III, legitur. (§. 4, cap. 1).

§. 6. Sublimiora dedit Geometra ſummus ISAACUS NEWTONUS in *Principiis Philoſophiæ Naturalis Mathematicis* Sect. 5, lib. 2, pag. 282, & ſeqq.

§. 7. De Aërometria ſcriptum aliud non extat, niſi quod ſub titulo : *Elementa Aërometriæ*, *Lipſiæ* An. 1709, in 12. (16 plag. Tabb. 12) edidi in uſum potiſſimum tyronum, ut Matheſin ad experimenta applicare diſcant. Sed ea deinceps hiſce Elementis Matheſeos univerſæ inſerui. Paſſim tamen huc ſpectantia leguntur apud GUERICKIUM, Conſulem Magdeburgicum, antliæ pneumaticæ inventorem, in *Experimentis novis Magdeburgicis de vacuo ſpatio*, *Amſtelodami* An. 1672, in fol. (Alph. 2, plag. 20, Tabb. 18) editis & qui poſt eum aëris proprietates experimentis comprobarunt.

§. 8. Ceterum hic etiam locum

meretur libellus Gallicus, qui ſub titulo : *Traités des Barometres*, *Thermometres & Hygrometres* proſtat & barometrorum, thermometrorum atque hygrometrorum conſtructionem ac uſum edocet (*Amſtel.* 1707, in 12. plag. 7, Tabb. 35). Inprimis autem hinc inde in Commentariis Academiæ Regiæ ſcientiarum inſeruntur, quibus Aërometria locupletari ac ad majorem perfectionem adduci poteſt.

§. 9. Ad hydraulicam perficiendam tendit JOHANNIS CEVÆ, Mediolanenſis, *Geometria motus* (*Bononiæ* 1692, in 4. plag. 12, Tabb. 9), in qua de motu tam ſimplici, quam compoſito traduntur, quæ ad motum aquarum explicandum utilia ſunt.

§. 10. JOHANNES BAPTISTA BALIANUS lib. 3, 4 & 5, *de motu naturali gravium*, *ſolidorum & liquidorum* (§. 5, cap. 6) de motu liquidorum, canalium ſectionibus, & de foraminibus vaſis, ad praxin hydraulicæ utilia profert : quorſum etiam ſpectant Tractatus aliquot PICARDI, ROEMERI & MARIOTTI ſupra recenſiti (§. 31, cap. 1).

§. 11. DOMINICUS GULIELMINI in *Menſura Aquarum fluentium* (*Bononiæ* An. 1690, & 1691, in 4. plag. 19, Tabb. 8) theorias hydraulicas ſublimiores ad praxin revocare ſtudet. Nemo autem in theoria hydraulica ſublimiora dedit quam Geometræ celeberrimi, NEWTONUS in Opere modo laudato (§. 6) lib. 2. ſect. 7. p. 318, & ſeqq. atque VARIGNONIUS in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum An. 1699, & 1703. Multa nova & egregia de hoc argumento dedit Geometra inſignis HERMANNUS in *Phoronomia* (§. 17, cap. 6).

§. 12. Quemadmodum vero EULERUS theoriam mechanicam perficere ſtuduit (§. 18, cap. 6), in quam ſtricturas Londini edidit ROBINSON NOURSE * ſub titulo : *Remarks on Mr. Eulers Treatiſe of motion*, nobis nondum viſas ; ita DANIEL BERNOULLI, Medicinæ Profeſſor Baſileenſis, antea Matheſeos ſublimioris in Academia ſcientiarum imperiali Petropolitana, nunc Profeſſor honorarius, ſimilem operam impendit theoriæ Hydroſtaticæ & Hydraulicæ, quam ſub titulo : *Hydrodynamicæ ſive de viribus & motibus fluidorum Commentarii*, *Argentorati* An. 1738, in 4, reg. (Alph. 1, plag. 16, Tabb. 12) publici juris fecit, cum hoc opus jam octo annis ante congeſſiſſet, dum Petropoli ageret.

§. 13. Ceterum ad Hydraulicam quoque facit SEXTI JULII FRONTINI *de Aquæ ductibus urbis Romæ Commentarius*, quem uberrimis notis explicatum *Patavii* Anno 1722, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 15) in lucem emiſit JOANNES POLENUS, Profeſſor Patavinus, cui etiam debentur de *Motu aquæ mixto* libri duo, quibus multa nova pertinentia ad æſtua-

* Aut potius BENJAMIN ROBINS ; *Nourſe* nomen eſt Bibliopolæ.

æſtuaria, ad portus atque ad flumina continentur, *Patavii* An. 1697, in 4. reg. (plag. 18, Tabb. 3.) & liber *de Caſtellis, per quæ derivantur fluviorum aquæ, habentibus latera convergentia*, qui etiam continet nova experimenta ad aquas fluentes & ad percuſſionis vires pertinentia, & *Patavii* An. 1718, in 4. (plag. 9, Tab. 1) prodiit. Idem etiam An. 1723, edidit *Epiſtolam ad* JOANNEM JACOBUM MARINONIUM, Mathematicum Cæſareum, in qua præter defectum Solis anno iſto Patavii obſervatum, agitur de aliquibus experimentis pertinentibus ad aquas fluentes, & cui ſubjicitur JOANNIS BUTEONIS *libellus de fluentis aquæ menſura* cum annotationibus nonnullis, *Patavii* in 4. (plag. 3½, Tabb. 1).

§. 14. Neque ſilentio hic prætereunda ſunt MARINI MERSENNI *Phænomena Hydraulica pneumatica*, quæ inter *Cogitata ipſius Phyſico-Mathematica* leguntur, in quibus tam naturæ, quam artis effectus admirandi certiſſimis demonſtrationibus explicantur, *Pariſiis* An. 1654, in 4. (Alph. 8, plag. 19). In hac nimirum collectione, quæ inter opera mathematica ſuperius commemorari merebatur, reperiuntur 1. Tractatus de menſuris, ponderibus, atque nummis tam Hebraicis, quam Græcis & Romanis, ad Pariſienſia expenſis, 2. Tractatus, cui titulus: Hydraulica pneumatica, Arsque navigandi, Harmonia theorica, practica, & Mechanica phænomena, 3. Tractatus mechanicus theoricus & practicus, 4. Baliſtica & Acontiſmologia, in qua ſagittarum, jaculorum & aliorum miſſilium jactus & robur arcuum explicantur, 5. Univerſæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopſis & bini refractionum demonſtratarum Tractatus, 6. ARISTARCHI SAMII Tractatus de mundi Syſtemate & Reflexiones Phyſico-Mathematicæ, quibus varia adjiciuntur ad præcedentia. In Synopſi tantummodo ſine demonſtratione recenſentur Propoſitiones EUCLIDIS, PETRI RAMI, ARCHIMEDIS, THEODOSII, MENELAI, MAUROLYCI, APOLLONII, MYDORGII, *geometricæ*; PAPPI, GUIDONIS UBALDI & STEVINI *mechanicæ*.

§. 15. De motu fluminum ſcripſit DECHALES in Tractatu *De fontibus naturalibus* prop. 39, & ſeqq. Tomi III, *Mundi Mathematici* f. 137, & ſeqq. ſed paucis plura & abſtruſiora hiſce complexus eſt HERMANNUS in *Phoronomia* cap. 10, pag. 226, & ſeqq. Ex inſtituto de hoc argumento ſcripſit DOMINICUS GULIELMINI, cujus *della Natura de' Fiumi Trattato Fiſico-Matematico* prodiit *Bononiæ* An. 1697, in 4. (Alph. 2, plag. 3, Tabb. 15). Multa in Italia prodiere ſcripta Italico ſermone, in quibus plura ad hoc argumentum ſpectantia leguntur, occaſione controverſiæ de Rheno fluvio in Padum deducendo.

§. 16. Inter

§. 16. Inter Veteres, machinas hydraulicas deſcripſit HERON *Alexandrinus* in libro *ſpiritalium* a COMMANDINO in Latinam linguam translato (*Pariſiis* An. 1583, in 4.) Ex recentioribus ſimilem operam collocarunt SALOMON DE CAUX, Architectus militaris Electoris Palatini, in libro Gallico *De Machinis, præcipue hydraulicis*, qui An. 1615, prodiit: CASPARUS SCHOTTUS in *Mechanica Hydraulico-pneumatica, Herbipoli* 1657, in 4. (Alph. 2, plag. 22, Tabb. 56) edita, DECHALES in *Mundo Mathematico* Tom. III, (§. 4, cap. 1), GEORGIUS ANDREAS BÖCKLER in *Architectura Curioſa* Germanica (*Norimbergæ* An. 1704, in fol. plag. 21, Tabb. 200), qui ultra 70 fontium ſalientium & ultra 120 fontium artificialium formas deſcribit; & LUCAS ANTONIUS PORTIUS in nonnullis *de fontibus naturalibus*, quæ nonnullis *de motu corporum* ſubjuncta, poſſibilitatem inprimis quorundam fontium adſtruens, qui a PLINIO commemorantur. (*Neapoli* An. 1704, in 4. plag. 7, Tabb. 5).

§. 17. Denique quæ de Hydroſtatica & Hydraulica per plurimos libros & volumina diſperſa leguntur, qua theoriam & praxin, uno complexus eſt & ſub titulo: *An introduction to a general ſyſtem of Hydroſtaticks and Hydraulicks, Londini* An. 1729, in 4. charta aug. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. æn. 60) edidit STEPHANUS SWITZER. Extant etiam in hoc libro deſcriptiones machinarum, quibus aqua elevatur.

§. 18. Inprimis autem iis, qui praxin ſolidam Hydraulicæ curæ cordique habent, commendari meretur *Architectura hydraulica*, quam Gallico idiomate conſcriptam *Pariſiis* Anno 1737, in 4. reg. cum 44 Tabulis æneis ſplendidiſſimis edidit DE BELIDOR. * In hoc opere etiam accurata traditur molarum deſcriptio & quæ ad molas aqua agitandas requiruntur ibidem explanantur. Opus utiliſſimum in linguam Germanicam verti mereretur.

§. 19. Ad Hydraulicam quidam referunt *Libellationem* aquarum, de qua nos egimus in Mechanicæ Elementis. Egregium de ea Tractatum conſcripſit PICARDUS, quem PHILIPPUS DE LA HIRE poſt mortem ipſius *Pariſiis* An. 1684, in 12. (plag. 15, Tabb. 3) edidit, unde ſua deſumſere, qui de hoc argumento apud Noſtros ſcripſere, veluti LEUPOLDUS atque STURMIUS filius. Inter opera MARIOTTI extat quoque *De libellatione* Tractatus brevis.

* Habet quidem Tom. I, 2 Alph. 9 plag. Tabb. 44. Prodiit autem Tom. II. Anno 1739, & complectitur 2 Alph. 12 plag. Tabb. 55.

CAPUT

CAPUT VIII.

De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perſpectiva.

§. 1. OPticæ & Catoptricæ *Elementa* olim conſcripſit EUCLIDES, quæ a JOHANNE PENA, Mathematico Regio, Latine verſa *Pariſiis* An. 1604, prodiere. Extat etiam in *Curſu Mathematico* HERIGONII (§. 1. cap. 1) & in editione *Gregoriana* operum EUCLIDIS (§. 2, cap. 3).

§. 2. Circa annum Chriſti 1100, ALHAZEN Arabs ingens *de Optica* volumen compoſuit, quod in libros, capita & propoſitiones diſtinxit FRIDERICUS RISNERUS. Uſus eſt ſcriptis veterum, præſertim PTOLEMÆI de *Optica* libris decem, qui hodie deſiderantur.

§. 3. Cum demonſtrationes ALHAZENI ſint admodum intricatæ ac prolixæ; VITELLIO Polonus circa An. 1270, aliud *de Optica* volumen conſcripſit in libros X digeſtum. Pleraque ex ALHAZENO deſumſit, ſed demonſtrationum fundamenta ex APOLLONIO, THEODOSIO, MENELAO, THEONE, PAPPO & PROCLO petiit. Ad hunc Autorem *Paralipomena* edidit JOHANNES KEPPLERUS, quibus Aſtronomiæ pars optica traditur. (*Francofurti* An. 1604, in 4. 2 Alph. 15 plag.). Habentur tamen multa quoque alia in hiſce Paralipomenis, & inter alia modum viſionis primus decente ratione explicat Autor. ALHAZENUM & VITELLIONEM uno volumine edidit FRIDERICUS RISNERUS *Baſileæ* An. 1572, in fol. (Alph. 7, plag. 18). Titulus libri eſt: *Opticæ Theſaurus.* ALHAZENI *Arabis libri ſeptem nunc primum editi. Ejuſdem liber de crepuſculis & Nubium aſcenſionibus. Item* VITELLIONIS *libri* X. *Omnes inſtaurati, figuris illuſtrati & aucti, adjectis etiam in* ALHAZENUM *commentariis a* FEDERICO RISNERO.

§. 4. Compendium Opticæ antiquæ circa annum 1279, conſcripſit JOHANNES PECCAMUS, Archiepiſcopus Cantuarienſis & Primas Angliæ (*Coloniæ Agrippinæ* 1627, in 4. plag. 11), quale etiam recentius dedit AMBROSIUS RHODIUS, Profeſſor Mathematum Wittebergenſis, cujus *Optica*, *Wittebergæ* 1611, cum *Tractatu de crepuſculis* in 8. prodiit (1 Alph. 10 plag). Uberius eandem expoſuit RISNERUS ante laudatus, cujus *Opticæ* libri quatuor, *Caſſellis* An. 1606, in 4. prodiere (Alph. 1, plag. 14).

§. 5. Opticam quoque illuſtrare aggreſſus eſt circa idem tempus ROGERIUS BACON, Philoſophus ſuo tempo-

tempore ſummus, Anno 1284. Oxonii mortuus, & ob ſcientias Mathematicas magiæ accuſatus. Ejus *Perſpectivam* in lucem protraxit JOANNES COMBACHIUS, Philoſ. Profeſſor Marpurgenſis, (*Francof.* An. 1614, in 4. 1 Alph. 5 plag.): parum tamen Mathematici ea continet, etſi lectu non indigna.

§. 6. Enimvero Veteres ea, quæ viſionem directam & reflexam concernunt, potiſſimum explicant: quæ vero ad refractam ſpectant, nimis imperfecte tradunt. JOANNES BAPTISTA PORTA libris novem *de Refractione* conſcriptis hanc doctrinam melius tradere conatus eſt (prodiere *Neapoli* An. 1593, in 4. 1 Alph. 6 plag.); ſed parum adhuc profecit. Primus qui Dioptricam meliori habitu induit & lentium ſphæricarum proprietates demonſtravit accurate, fuit JOHANNES KEPPLERUS, cujus *Dioptrica* prodiit *Auguſtæ Vindelicorum* An. 1611, in 4. (plag. 14) & poſthac alibi recuſa. Præmittuntur *Epiſtola* GALILÆI *de iis, quæ poſt editionem Nuncii ſiderei ope perſpicilli nova & admiranda in cælo deprehenſa ſunt*, itemque *Examen præfationis* JOHANNIS PENÆ *in Opticam* EUCLIDIS *de uſu Opticæ in Philoſophia.*

§. 7. CARTESIUS in *Dioptrica*, quæ principiis Philoſophiæ ſubjungi ſolet, veram refractionis legem a SNELLIO inventam, ſed ſuppreſſo inventoris nomine, affert & modum viſionis diſtinctius, quam ab aliis factum fuerat, explicat, lentium ellipticarum & hyperbolicarum proprietates recenſet & praxin poliendi vitra ita docet, ut in ea non ſatis verſatum judicent experti.

§. 8. Theoriam Dioptricæ magis excoluit, novis plerumque demonſtrationibus inventis, WILHELMUS MOLYNEUX in *Dioptrica nova* Anglice conſcripta (*Londini* An. 1692, in 4. plag. 16, Tabb. 40), ubi calculo trigonometrico ad eruendas lentium ſphæricarum proprietates juxta veram refractionis legem utitur. Omnium maxime eandem hactenus perfecit HUGENIUS, cujus *Dioptrica* maximam poſthumorum partem conſtituit. Eidem & praxis multum debet: de quo tractatus *De poliendis vitris* teſtatur, Dioptricæ ſubjunctus. Prodiere primum *Opera poſthuma*, *Lugd. Batav.* An. 1703, in 4. (2 Alph. 19 plag. Tabb. 24), deinde cum aliis recuſa (§. 35, cap. 1). Opus Hugenianum perfectiſſimum eorum, quæ in hoc genere proſtant: requirit autem lectorem in Geometria probe verſatum.

§. 9. Tyronibus adeo commendandum eſt *Dioptricæ Tentamen* Gallicum NICOLAI HARTSOEKER (*Pariſ.* An. 1694, 1 Alph. 10 plag.), ubi multa quoque ad Phyſicam & praxin ſpectantia traduntur. Ipſe enim in poliendis vitris & opticis technaſmatis erat verſatiſſimus.

§. 10. In ſplendidi Operis dioptrici CHERUBINI, Capucini, To-

mo

mo primo, qui ſub titulo: *Dioptrique oculaire*, *Pariſiis* An. 1671, in fol. (5 Alph. 11 plag. Tabb. 16) prodiit, multa ad praxin ſpectantia reperiuntur. In altero Tomo, qui ſub titulo: *La Viſion parfaite*, *Pariſiis* 1678, in fol. (3 Alph. 10 plag. Tabb. 23) lucem adſpexit, argumentum palmarium eſt tubus binoculus, cujus ſub finem Tomi primi mentionem injecerat.

§. 11. Opticam ſine Catoptrica & Dioptrica tradit CHRISTOPHORUS SCHEINERUS, e Societate Jeſu, in *Oculo* (*Oeniponti* An. 1619, in 4. 1 Alph. 10 plag.). Ab iis potiſſimum legendus, qui rationes phænomenorum viſionis directæ cognoſcere geſtiunt.

§. 12. Vir ſummus NEWTONUS in egregio Optices opere novas luminis proprietates, ante nondum animadverſas, & quarum conſideratio (ceu ex HUGENII Dioptrica apparet) maximi in Dioptrica momenti, per experimenta edocet. Prodiit opus primum *Londini* An. 1704, in 4. reg. (2 Alph. 5 plag.) ſub titulo: *Opticks, or a Treatiſe of the Reflexions, Refractions, Inflexions and coleurs of Light*. In fine adjiciuntur duo Tractatus Latini, primus ſcilicet *de enumeratione linearum tertii ordinis*, alter *de Quadratura curvarum*. Ipſum in Latinam linguam tranſtulit SAMUEL CLARKE, Autore approbante & nonnulla adjiciente (*Londini* An. 1706, in reg. 4. 2 Alph. 9 plag. Tabb. 19). An. 1719, ibidem prodiit verſionis editio altera in 4. (Alph. 2, plag. 8, Tabb. 12), ubi quæſtiones adjectæ augentur, ſed Tractatus geometrici omittuntur, quos in Analyſi ſua ediderat JONES (§. 21, cap. 4). Poſt mortem NEWTONI, *Londini* An. 1729, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 24) prodierunt *Lectiones ejus opticæ* An. 1669, 1670 & 1671, *in Scholis publicis habitæ*. In his equidem multa continentur quæ in Optica leguntur, alia tamen prorſus ratione proponuntur. Reperiuntur hic, quæ alibi fruſtra quæſiveris.

§. 13. Huc etiam referri poteſt MARIOTTI *Tentamen de Coloribus* (*Pariſ.* An. 1681, in reg. 12. Alph. 1, plag. 9, Tabb. 16) quod Tentaminum Phyſicorum Gallice conſcriptorum quartum eſt, & in editione Batava operum ipſius legitur, atque HUGENII Tractatus Gallicus *de Lumine* (*Lugd Batav.* 1690, in 4. 1 Alph. 2 plag.), qui in Operum reliquorum volumine primo extat. Ejus hypotheſi in explicandis phænomenis opticis utitur PETRUS ANGO in *Optica* Gallica (*Pariſ.* An. 1682, in 12).

§. 14. ANDREAS TACQUET in *Optica* Perſpectivæ fundamenta jecit, & in *Catoptrica* ſpeculorum planorum & ſphæricorum proprietates bene demonſtrat. (§. 28, cap. 1), ſed Dioptricam non attingit. ISAACUS BARROWIUS in *Lectionibus Opticis*, quæ Lectionibus Geometri-

cis præmittuntur (§. 19, cap. 3), theoriam Catoptricæ & Dioptricæ demonſtrat. Nec dubitamus, quin JACOBUS GREGORIUS in *Optica promota* multa præclara dederit, etſi nobis non viſa. An. 1663, in 4. lucem adſpexit.

§. 15. Utriuſque Compendium dedit DAVID GREGORIUS in *Elementis Dioptricæ & Catoptricæ ſphæricæ* (*Oxonii* 1695, in reg. 8. plag. 7). Idem in linguam Anglicam vertit WILHELMUS BROWNE, M. D. & prolixum ſupplementum adjecit atque Introductionem præmiſit. Prodiit ſecunda vice cum appendice J. T. DESAGULIERS, L. L. D. de teleſcopio reflectente cum epiſtolis, quas de eodem NEWTONUS & JACOBUS GREGORIUS ad ſe invicem ſcripſere, *Londini* An. 1735, in 8. reg. (plag. 20, Tabb. 4). Prima teleſcopii catoptrico dioptrici idea debetur GREGORIO, qui eam deſcribit in *Optica promota* p. 94. Sed eam perfecit NEWTONUS & tandem feliciſſime iſtiuſmodi teleſcopium conſtruxit J. HADLEY, atque nunc conſtruuntur ab EDUARDO SCARLET, Optico Regio, ejuſque filio. Deſcripſimus idem in Elementis Dioptricæ noſtris.

§. 16. Opticam, Catoptricam & Dioptricam una expoſuit ZACHARIAS TRABERUS, e Societate Jeſu, in *Nervo Optico* (*Viennæ* An. 1675, in fol. 2. Alph. 16 plag. Tabb. 28). Multa in praxi jucunda habet, ſed theoria exigui momenti. Quoad praxes opticas opus abſolutum cenſeri poteſt JOHANNIS ZAHN *Oculus artificialis teledioptricus*. Editio altera auctior, ſed vitioſior prodiit *Norimbergæ* An. 1702, in fol. (9 Alph. 8 plag.) cum figuris multis cum ligno, tum æri inciſis. Huc etiam ſpectat ATHANASII KIRCHERI *Ars magna lucis & umbræ* (*Romæ* 1646, in fol. 10 Alph. 16 plag. Tabb. 34).

§. 17. JOHANNES CHRISTOPHORUS KOLHANS in *Tractatu Optico* (*Lipſ.* An. 1663, in 8. 1 Alph. 15 plag.) non contemnenda prorſus dedit excerpta cum ad theoriam, tum ad praxin opticam ſpectantia, retentis inſorummet Autorum verbis. Omnes tres Opticæ partes diſcurſu vulgari recenſuit in gratiam artificum JOHANNES MICHAEL CONRADI in Optica Germanica, quam ſub titulo: *Der dreyfach geartete Sehe-Strahl*, *Coburgi* An. 1710, in 4. edidit (plag. 17, Tabb. 25).

§. 18. *De poliendis vitris Commentarios* reliquit HUGENIUS, qui inter poſthuma leguntur (§. 35). Hac arte excelluit ipſe: primus enim lentes objectivas tanta exactitudine paravit, ut iis pares nullibi reperirentur, quemadmodum in Aſtronomicis docuimus & Dioptricis. In Germania An. 1716, in 8. (plag. 14, Tab. 20) *Halæ* prodiit ſub titulo: *CHRISTIAN GOTTLIEB HERTELS vollſtändige Anweiſung zum Glasſchleiffen wie auch zu Verfertigung der optiſchen Machinen.* Erat Autor Matheſeos Pro-

Profeſſor in Academia illuſtri Lignicenſi & in arte poliendi vitra plurimum exercitatus. Eandem notis illuſtravit JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, qui & ipſe hanc artem non ſine ſucceſſu excoluerat. Prodierunt *Wittebergæ* An. 1719, in 8. (plag. 7, Tabb. 21) ſub titulo: *Neue Anmerckungen vom Glasſchleiffen.*

§. 19. Scriptis opticis accenſeri merentur ea, in quibus microſcopicæ obſervationes recenſentur. Pertinent huc I°. ROBERTI HOOKE *Micrographia* Anglice ſcripta (*Londini* An. 1667, in fol. 3 Alph. 8 plag. Tabb. 38) II°. *Antonii van Leeuwenhoek* ſcripta varia; nempe 1) *Arcana Naturæ detecta*, *Delphis* An. 1695, in 4. (Alph. 2, plag. 6, Tabb. 11) 2) *Continuatio Arcanorum Naturæ detectorum* Ibid. An. 1697, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tab. 7) 3) *Arcana Naturæ ope & beneficio exquiſitiſſimorum microſcopiorum detecta*, *Lugd. Batav.* An. 1696, in 4. Alph. 3, Tabb. 26) 4) *Continuatio epiſtolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinenſem Lugd. Batav.* An. 1696, in 4. (plag. 16½, Tabb. 10) 5) *Epiſtolæ ad Societatem Regiam Anglicam & alios illuſtres viros, Lugd. Bat.* 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 33). 6) *Epiſtolæ phyſiologicæ ſuper compluribus naturæ arcanis*, *Delphis* An. 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 31). Titulus generalis: ANTONII A LEEWENHOEK *Opera omnia*, *ſeu Arcana naturæ ope exactiſſimorum microſcopiorum detecta*, *experimentis variis comprobata*, *epiſtolis ad varios illuſtres viros*, *ut & ad integram*, *quæ Londini floret*, *ſapientem Societatem datis comprehenſa*, impreſſus Lugduni Batavorum & ſcriptis iſtis diverſo tempore nec eadem prorſus forma editis in unum faſciculum collectis præfixus. III°. JOHANNIS FRANCISCI GRIENDELS VON AACH *Micrographia curioſa* Germanica (*Norimbergæ* An. 1687, in 4. plag. 9, Tabb. 35) IV°. PHILIPPI BONANNI *Micrographia curioſa*, adjuncta obſervationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur (*Romæ* An. 1691, in 4. 2 Alph. 12 plag. Tabb. 68).

§. 20. Inter ſcriptores Perſpectivæ omnium maxime commendatur DESARGUES, cujus *methodum univerſalem exercendi Perſpectivam* gallice conſcriptam edidit ABRAHAMUS BOSSE, ex Gallico in Belgicum ſermonem tranſtulit J. BARA. Prodiit *Amſtelodami* An. 1686, in 8. (plag. 12, & figurarum æri inciſarum 1 Alph.).

§. 21. Nec parum Perſpectivæ ſtudioſum juvant ANDREÆ ALBERTI Libri duo *De Perſpectiva*, (*Norimb.* An. 1670, in fol. plag. 19, Tabb. 15): primis vero tyronum conatibus reſpondet BERNHARDI LAMY *Perſpectiva* Gallice conſcripta (*Pariſiis* An. 1701, in 8).

§. 22. Concinnas Praxium Perſpecti-

ſpectivæ demonſtrationes dedit JOH. FRANCISCUS NICERON ex Ordine Minimorum, in hac arte excellens, in *Thaumaturgo Optico*, cujus tantum pars prima *Pariſiis* 1646, in fol. prodiit (2 Alph. 18 plag. Tabb. 42). Poſt mortem ejus immaturam Anno 1652, prodiit *Perſpectiva curioſa* Gallice conſcripta in 4. ſub ejuſdem nomine, in libros quatuor diviſa, in qua plura continentur, quam in Thaumaturgo.

§. 23. Ad praxin properantibus & theoriam ſpinoſam averſantibus ſatisfacit Anonymus Gallus e Societate Jeſu in *Perſpectiva practica* Gallice *Pariſiis* An. 1642, in 4. publicata & a JOHANNE CHRISTOPHORO REMBOLDO Germanice verſa atque *Auguſtæ Vindelicorum* An. 1710, in 4. edita (1 Alph. 8 plag. cum 150 Tabulis æri inciſis atque textui inſertis). Enimvero An. 1663. prodiit editio altera duabus partibus & auctior, & quoad primam emendatior ac locupletior. (Tom. I, Alph. 2, plag. 10. Tom. II, Alph. 1, plag. 13. Tom. III, Alph. 2, plag. 8). In parte ſecunda docetur Perſpectiva corporum inclinatorum: in tertia agitur de laquearibus & anamorphoſibus opticis, catoptricis & dioptricis.

§. 24. Praxin Perſpectivæ multis exemplis illuſtrat P. ANDREAS PUZZO in *Architectura Pictorum & Sculptorum*. Tomus prior prodiit *Romæ* An. 1693, in fol. poſterior ibidem An. 1700, in fol. Uterque totidem continet Tabulas æneas, quot folia, nimirum prior 102; poſterior 120. Prior Germanice prodiit *Auguſtæ Vindelicorum* An. 1706, in fol. poſterior ibidem An. 1709.

§. 25. An. 1711, G. J. GRAVESANDIUS, Juris Doctor, nunc Mathematum Profeſſor Lugdunenſis, *Hagæ Comitum* idiomate Gallico evulgavit Tentamen de Perſpectiva, in 8. (plag. 12, Tabb. 32) Titulus libelli: *Eſſai de perſpective*, in quo multiplices regulas ſeu methodos demonſtrat.

§. 26. Cæterum ſcriptoribus Opticis adhuc accenſendus eſt HONORATUS FABRI, e Societate Jeſu, qui in *Synopſi Optica* (*Lugd.* An. 1667, in 4. 1 Alph. 8 plag.) illa omnia, quæ ad Opticam, Dioptricam & Catoptricam pertinent, breviter quidem, accurate tamen demonſtrat. *

* Imprimis commendari meretur ROBERTI SMITH Optices Syſtema integrum, quod ſub titulo: *A compleat Syſtem of Opticks*, prodiit *Cantabrigiæ*, An. 1738, in 4. reg. (Tom. I, Alph. 1, plag. 15, Tabb. 45. Tom. II, Alph. 2, Tabb. 38)

CAPUT IX.

De Aſtronomia.

§. 1. Scripta Aſtronomica ſunt varii generis. Aut enim obſervationes recenſent, aut calculos motuum cœleſtium trigonometricos & geometricos exponunt, aut tabulas Aſtronomicas compleċtuntur, aut uſum globi cœleſtis, aut denique corporum mundanorum rationem declarant.

§. 2. Veterum obſervationes, quas inter eminent obſervationes HIPPARCHI, conſervavit PTOLEMÆUS in *Almageſto.* An. 882, apud Saracenos obſervationibus operam dedit ALBATEGNIUS. Ab An. 1457, Norimbergæ iiſdem incubuit JOHANNES REGIOMONTANUS (vero nomine MÜLLER), cui ſucceſſere diſcipuli JOHAN. WERNERUS & BERNHARDUS WALTHERUS, ab An. 1475, uſque ad An. 1504, obſervationes ſuas continuantes. REGIOMONTANI atque WALTHERI obſervationes prodiere *Norimbergæ* cum quibuſdam aliis REGIOMONTANI atque PURBACHII ſcriptis An. 1544, in 4. (plag. 22). Titulus operis: *Scripta* JOHANNIS REGIOMONTANI *de Torqueto, Aſtrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica baculoque Aſtronomico & obſervationibus cometarum; item obſervationes motuum Solis ac ſtellarum tam fixarum, quam erraticarum; item libellus* M. GEORGII PURBACHII *de Quadrato Geometrico.* Ab An. 1509, COPERNICUS, poſt eum WILHELMUS Haſſiæ Landgravius cum Mathematico CHRISTOPHORO ROTHMANNO & Mechanico ſuo JUSTO BYRGIO Caſſellis, & TYCHO DE BRAHE Uraniburgi obſervarunt. Incepit obſervationes ſuas TYCHO An. 1582, eaſque continuavit uſque ad An. 1601, majori & meliori inſtrumentorum apparatu, quam ante ipſum fecerat nemo. Omnes obſervationes hactenus recenſitæ continentur in *Hiſtoria cœleſti*, quæ juſſu FERDINANDI III, Imperatoris, *Ratisbonæ* 1672, in fol. prodiit (12 Alph. 6 plag. Tabb. 3). Deſcribuntur quoque in eadem inſtrumenta TYCHONIS; una exhibentur obſervationes MOESTLINI, SCHICKHARDI aliorumque. Ipſe alias Tycho inſtrumenta ſua deſcripſit An. 1602, in *Aſtronomiæ inſtauratæ Mechanica*, *Norimbergæ* An. 1602, in fol. edita (Alph. 1, plag. 11). WILHELMI vero Haſſiæ Landgravii obſervationes, una cum obſervationibus REGIOMONTANI atque WALTHERI edidit WILLEBRORDUS SNELLIUS, *Lugduni Batavorum* An. 1618, in 4. (Alph. 1, plag. 13).

§. 3. Ma-

§. 3. Magis ſumtuoſo inſtrumentorum apparatu & majori ſtudio, quam TYCHO, obſervationibus cœleſtibus vacavit JOHANNES HEVELIUS, Conſul Dantiſcanus. Inſtrumentorum apparatum deſcripſit Tomo primo *Machinæ cœleſtis* (*Gedani* An. 1673, in fol. reg. 5 Alph. 4 plag. Tabb. 30): Tomo ſecundo (*Gedani* An. 1679, in fol. 14 Alph. 6 plag.) obſervationes 48 annorum comprehendit. Dolendum vero, quod Tomi præſertim poſterioris exemplaria pleraque ferali flamma fuerint abſumta. Equidem ROBERTUS HOOKE in *Animadverſionibus in Tomum primum* Anglico ſermone editis *Londini* An. 1674, in 4. (plag. 11, Tabb. æn. 3) inſtrumenta *Heveliana* reprehendit ceu minus exacta; ſed celeberrimus HALLEIUS, conſenſu Societatis Regiæ Britannicæ, Dantiſcum An. 1679, profectus & inſtrumentorum, & obſervandi accurationem approbavit. Obſervationes, quas in gratiam hoſpitis inſtituit, una cum aliis reperiuntur in *Anno climacterico* ſ. *Rerum Uranicarum obſervationum quadrageſimo nono* (*Gedani* 1685, in fol. 2 Alph. 6 plag. Tabb. 8). Jam ante An. 1661, celeberrimus Galliæ Aſtronomus ISMAEL BULLIALDUS Dantiſcum venit Obſervatorium HEVELII viſurus & modum ejus obſervandi examinaturus. Quid uterque, BULLIALDUS nimirum atque HALLEIUS, de eodem ſenſerint; docent *Excerpta ex literis illuſtrium & clariſſimorum virorum ad* D. JOH. HEVELIUM *perſcriptis Judicia de rebus aſtronomicis ejuſdemque ſcriptis*, quæ *Dantiſci* An. 1683, in 4. (Alph. 1, plag. 5) *edidit* JOANNES ERICUS OLHOFIUS p. 67, 68, 71, 79, 187.

§. 4. In Anglia ſeculo ſuperiori obſervandi ſtudio clarus extitit JEREMIAS HOROCCIUS ab A. 1636 uſque ad An. 1640. Ejus obſervationes ex epiſtolis ad GUIL. CRABTRIUM, ſuum in ſtudiis aſtronomicis ſocium, excerptæ leguntur in *Operibus poſthumis* (*Londini* An. 1673, in 4. 3 Alph. 12 plag. Tabb. 2). Adjiciuntur excerpta ex ſchediaſmatis GUIL. CRABTRII de obſervationibus ab ipſo inſtitutis An. 1635, 36, 37 & 38.

§. 5. In Italia JOH. BAPTISTA RICCIOLUS ſuperiori ſeculo obſervatorem egit, qui præcipuas obſervationes ſuas in *Aſtronomia Reformata* (*Bononiæ* An. 1665, in fol. 6 Alph. 5 plag.) cum ſelectis veterum & recentiorum obſervationibus contulit & de Aſtronomiæ perfectione inde judicium tulit.

§. 6. Selectæ celeberrimi CASSINI aliorumque obſervationes extant in præſtantiſſimo opere, cujus titulus: *Recueil d'obſervations faites en pluſieurs voyages par ordre de Sa Majeſté, pour perfectionner l'Aſtronomie & la Géographie, avec divers Traités Aſtronomiques, par Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences.* (*Pariſ.* An. 1693. in fol. 6 Alph. 12 plag. Tabb. 11).

Vide

Vide ſupra §. 37. c. 1. Ejuſdem Cassini, aliorumque Aſtronomorum Regiorum, Cassini *junioris*, Maraldi atque Philippi de la Hire obſervationes complures extant in *Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum*, qui quotannis prodeunt: de quibus ſupra (§. cit.). Habemus quoque obſervationes non contemnendas in *Tranſactionibus Anglicanis*, *Miſcellaneis Berolinenſibus*, *Commentariis Petropolitanis*, *Actis Eruditorum* & *Diario Trevoltienſi*. Vide ſupra (§. 36, 38, 39).

§. 7. In Anglica longa annorum ſerie obſervationes cœleſtes continuavit obſervator celeberrimus Joannes Flamstedius. Quænam in hiſtoria ejus cœleſti, ab Aſtronomis dudum deſiderata, eſſent comparitura, in *Miſcellaneis Berolinenſibus* p. 263 & ſeqq. docetur. An. 1712, *Hiſtoriam cœleſtem* Flamstedii edidit Halleius *Londini* in fol. reg. (Alph. 6, plag. 8, Tabb. 5) Libris duobus, quorum prior exhibet Catalogum ſtellarum Fixarum Britannicum novum & locupletiſſimum, una cum earundem Planetarumque omnium obſervationibus, ſextante, micrometro &c. habitis; poſterior tranſitus ſiderum per planum arcus meridionalis & diſtantias eorum a vertice complectitur. Nimirum An. 1704, aliquot Societatis Regiæ Sodalibus, Francisco nimirum Robartes, Christophoro Wrenno, Isaaco Newtono, Davidi Gregorio & Johanni Arbuthnot ex chartis Flamstedii obſervationes ejus edendas ſuis ſumtibus commiſerat ſereniſſimus Daniæ Princeps Georgius, Reginæ Annæ conjux: Sed cum moreretur, antequam liber obſervationum primus abſolveretur, tandem Regina, Flamstedii oculis in naſcentia indies ſiderum phœnomena intentis & in ætate provecta minus acutis, hanc curam demandavit Edmundo Halleio, ut ea quæ adhuc deerant perficeret. Enimvero cum editio non prorſus eſſet ad mentem Flamstedii, de nova ipſe cogitavit: cui tamen immortuus eſt An. 1719, die ultima Decembris, cum magna ejus pars typis jam eſſet deſcripta, ita ut tandem denuo Halleius editionem hanc novam ad umbilicum perducere teneretur. Prodiere itaque *Hiſtoriæ cœleſtis Britannicæ* Volumina tria, Autore Joanne Flamstedio, Aſtronomo Regio, *Londini* in fol. maj. An. 1725, (Alph. 13). Volumen I, continet ſtellarum fixarum & planetarum omnium obſervationes, ſextante & micrometro peractas, ſubjunctis locis, quæ ex obſervationibus deducta ſunt. Volumen II, complectitur fixarum ſtellarum & planetarum omnium tranſitus, per planum arcus meridionalis & diſtantias eorum a vertice, nec non Solis, Lunæ & Satellitum Jovis obſervationes arcu meridionali habitas & loca planeta-

rum inde derivata ab An. 1689, ad An. 1720. Volumen III, comprehendit Hiſtoriam Aſtronomiæ, Catalogos fixarum ante autorem editos una cum ABRAHAMI SHARPII Indice fixarum auſtralium in noſtro hemiſphærio non conſpicuarum & Catalogum Britannicum Autoris ad A. C. 1689, cui ſubjunguntur longitudines & latitudines ſtellarum fixarum, quæ a Luna tegi poſſunt, ſigillatim & appendicula Tabularum aſtronomicarum a SHARPIO conſtructarum. Optandum quoque foret, ut ſelectæ obſervationes Hafnienſes ROEMERI, Berolinenſes KIRCHII ac viduæ ipſius, Norimbergenſes EIMARTI atque WURTZELBAUERI lucem publicam adſpicerent.

§. 8. FRANCISCI BLANCHINI *Obſervationes aſtronomicas & geographicas per Italiam paſſim habitas* nuperrime *Veronæ* in fol. edi curavit EUSTACHIUS MANFREDI, Aſtronomus Bononienſis.

§. 9. Obſervationes phyſicæ, mathematicæ, atque botanicæ juſſu Regis Chriſtianiſſimi in America Meridionali & India occidentali ab An. 1701, uſque ad annum 1712, a LUDOVICO FEUILLE'E, Minimo, factæ ſub titulo : *Journal des Obſervations phyſiques, mathématiques, & botaniques* prodiere *Pariſiis* duobus Vol. in 4. reg. 1714, & 1725, (Vol. I, Alph. 4, plag. 6, Tabb. æn. 66. Vol. II, Alph. 3, plag. 5, Tabb. æn. 57, & An. 1729. ST. SOUCIET, e Societate Jeſu, idiomate Gallico *Pariſ.* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 18, Tabb. 8) publicæ luci expoſuit *Obſervationes mathematicas, aſtronomicas, geographicas, chronologicas & phyſicas, ex antiquiſſimis Sinarum libris excerptas, & recentius a Patribus Societatis in India & China factas.* Addit An. 1732, Tomum ſecundum, qui continet *Hiſtoriam Aſtronomiæ Sinarum* a R. P. GAUBIL e Societate Jeſu conſcriptam, cum diſſertationibus (Alph. 2, plag. 5, Tabb. 3). Huc etiam referendæ ſunt FRANCISCI NOEL, Societatis Jeſu, *Obſervationes mathematicæ & phyſicæ in India & China factæ ab* An. 1684, *uſque ad* An. 1708, quæ *Pragæ* 1710, in 4. (plag. 14, Tab. 1) prodierunt.

§. 10. Aſtronomiam Geometricam inter veteres juſto volumine expoſuit CLAUDIUS PTOLEMÆUS anno Chriſti 147 mortuus. Opus ejus, quod μεγάλη Σύνταξις inſcribitur, A. C. 827, juſſu MAIMONIS Regis Saracenorum in Arabicum translatum & An. 1528 ex Arabico in Latinum verſum a GEORGIO TRAPEZUNTIO & a LUCA GAURICO Mathematum Profeſſore Neapolitano reviſum, illoque anno primum editum. An. 1551, idem cum ejuſdem PTOLEMÆI ſcriptis Aſtrologicis, libris nempe quatuor *de judiciis*, *Centiloquio* & *ſignificationibus ſtellarum inerrantium* ſub titulo : Cl. PTOLEMÆI *omnia, quæ extant, Opera præter Geo-*

graphiam, *Baſileæ* in fol. (6 Alph.) opera ERASMI OSWALDI recuſum.

§. 11. Cum ipſum Aſtronomiam integram complectatur, ſed ad captum tyronum minime ſit accommodatum; GEORGIUS PURBACHIUS in commodiorem formam id redigere cœpit. Sed cum vix cœpto labore rebus humanis valedicere cogeretur, REGIOMONTANUS diſcipulus, ſuaſu Præceptoris, telam pertextam abſolvit. Recuſi ſunt ejus Libri tredecim *in* PTOLEMÆI *magnam compoſitionem*, *quam Almageſtum vocant*, *Noribergæ* 1550, in fol. (2 Alph. 11 plag.) & in iis univerſa doctrina de cœleſtibus motibus, magnitudinibus, eclipſibus &c. in epitomen redacta proponitur. Commendantur merito Aſtronomiæ ſtudioſis, præſertim ſi qui Aſtronomiam veterem cognoſcere in animum induxerint.

§. 12. Juxta formam *Almageſti* inter Arabes ALBATEGNIUS opus *de Scientia ſtellarum* compoſuit, *Norimbergæ* An. 1537, & *Bononiæ* An. 1545, in 4. editum, in quo ex propriis obſervationibus Aſtronomiam perficere ſtudet.

§. 13. Seculo decimo ſexto NICOLAUS COPERNICUS in libris 6 *Revolutionum cœleſtium* aliquoties recuſis, reſuſcitato PHILOLAI de motu Telluris dogmate, primus ad theoriam cœlo conſonam fundamenta poſuit. Proſtat inter alias editiones *Baſileenſis* An. 1566, in fol. (Alph. 4. plag. 14.) COPERNICUM ſecutus PHILIPPUS LANSBERGIUS theorias motuum cœleſtium faciles dedit (§. 26, cap. 1).

§. 14. Ex adverſo autem CHRISTIANUS SEVERINUS LONGOMONTANUS in *Aſtronomia Danica*, in qua integram Aſtronomiam pertractat & regulas exemplis veris illuſtrat, theorias intricatiores propoſuit, cum motum Telluris annuum circa Solem in Aſtronomiam cum TYCHONE admittere nollet. (*Amſtelod.* An. 1640, in fol. 6 Alph.) Etenim extra omnem controverſiam poſitum eſt, motus Planetarum per hypotheſin Terræ motæ non modo facilius, quam in hypotheſi Terræ quieſcentis explicari poſſe; verum etiam loca planetarum in iſta computata cum cœlo demum conſentire. Unde etiam Inquiſitores in Italia permittunt, ut eadem utantur Aſtronomi, etſi eam pro veritate demonſtrata venditari non ferant.

§. 15. Omnes omnino Aſtronomi uſque ad KEPPLERUM motum planetarum circularem ſtatuerunt: unde theoriæ ipſorum cœlo non ſatis reſponderunt. Hanc Aſtronomiam circularem omnium optime expoſuit ANDREAS TACQUET in octo de *Aſtronomia* libris (§. 28, cap. 1). Dolendum vero, quod præcepta nullis exemplis illuſtraverit, ut magis inſervirent ſtudiis tyronum.

§. 16. Enimvero vir acerrimi judicii ingeniique ſagaciſſimi JOHAN-

NES KEPLERUS obſervationibus TYCHONIS (quas etiam adhibuerunt LONGOMONTANUS atque LANSBERGIUS) feliciſſime uſus in *Commentariis de motibus ſtellæ Martis* ſeu *Aſtronomia nova* αἰτιολογητῷ An. 1609, in fol. (4 Alph.) theoriam planetarum ellipticam propoſuit & in *Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ* (*Franc.* 1635, in 8. 2 Alph. 15 plag. ad omnium planetarum motus ſupputandos adhibuit, ac primus in cauſas phyſicas motuum cœleſtium inquirere cœpit. Hanc theoriam cauſis phyſicis convenientem demonſtravit NEWTONUS lib. 3. Princ. Mathem. Philoſ. Nat. itemque LEIBNITIUS in Tentamine de cauſis motuum cœleſtium phyſicis, quod legitur in *Actis Eruditorum* An. 1689, p. 82, quod idem ſuo modo oſtendere conatus PHILIPPUS VILLEMOT in *Novo ſyſtemate motus Planetarum*, *Lugduni* An. 1707, in 12. (plag. 12, Tabb. 12) edito. Phænomenis rectius, quam cæteras hypotheſes, ſatisfacientem deprehenderunt Aſtronomi.

§. 17. Equidem KEPLERI inventa ſprevit LANSBERGIUS ſuaque iiſdem antepoſuit: ſed optime illum contra hujus inſultus defendit HOROCCIUS in poſthumis (§. 4), qui in extollendis laudibus KEPLERI, a quo, ſub initium ſtudii aſtronomici, LANSBERGII magnificis promiſſis & nimium acerbis in KEPLERUM ſtricturis factus fuerat alienior, veluti extra ſeipſum rapitur.

§. 18. ISMAEL BULLIALDUS in *Aſtronomia Philolaica* (*Pariſiis* An. 1645, in fol. 7 Alph. 20 plag.) KEPLERI theoriam emendare conabatur, ut ſcilicet calculus magis geometricus fieret, cum KEPLERUS regula poſitionum interdum uti cogatur (*§. 691. Aſtron.*): oſtendit vero SETHUS WARDUS, Aſtronomiæ in Academia Oxonienſi Profeſſor, in *Inquiſitione in Aſtronomiam Philolaicam* BULLIALDI, quæ Tractatui de Cometis ſubjecta prodiit *Oxonii* An. 1653, in 4. (plag. 14), errores quoſdam ab ipſo fuiſſe commiſſos: quos agnoſcens BULLIALDUS in *Fundamentis Aſtronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & aſſertis*, *adverſus* WARDI *impugnationem* (*Pariſiis* An. 1657, in 4. plag. 7) emendavit. Cæterum WARDUS *Ideæ* quoque *Trigonometriæ demonſtratæ*, quæ cum prælectione *de Cometis*, *Oxonii* An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, inquiſitionem aliquam in BULLIALDI Aſtronomiæ Philolaicæ fundamenta adjecit.

§. 19. SETHUS WARDUS in *Aſtronomia Geometrica* (*Londini* 1656, in 8. reg. $14\frac{1}{2}$ plag.) methodum geometricam propoſuit motus ſiderum computandi; ſed a veris motuum regulis per KEPLERUM ſtabilitis recedit. Eandem anno ſequenti propoſuit *Comes* DE PAGAN in *Theoria Planetarum*, *Pariſiis* An. 1657, in 4. idiomate patrio edita. Non ignoravit eam KEPLERUS; ſed ex *Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ* haud ob-

ſcure

ſcure colligitur, quod ideo rejecerit, quia veris naturæ legibus adverſam reperit.

§. 20. BULLIALDI hypotheſin excoluit VINCENTIUS WING in *Aſtronomia Britannica* (*Londini* An. 1669, in fol. 7 Alph. 5 plag.) ubi præcepta ſingula Aſtronomiæ practicæ veris exemplis illuſtrantur ad captum tyronum ſtudii Aſtronomici. Præmittit *Trigonometriam* planam & ſphæricam, in qua exemplis illuſtrantur problemata, & in ſphærica exhibet regulam catholicam NEPERI.

§. 21. *Wardianam* ad numeros revocavit JOHANNES NEWTON in *Aſtronomia Britannica* patrio ſermone conſcripta (*Lond.* 1657, in 4. 1 Alph. 20 plag.). Eandem excoluit THOMAS STREETE in *Aſtronomia Carolina*, *Londini* An. 1661, in 4. (plag. 29) primum edita & non ſine augmento ibidem 1710. in 4. (2. Alph. plag. 3,) recuſa. Id peculiare habet, quod motum Apheliorum & Nodorum ſuſtulerit. Aſtronomiam hanc Carolinam ex idiomate Anglico in Latinum tranſtulit GABRIEL DOPPELMAYER & *Norimbergæ* An. 1705, in 4. (Alph. 1, plag. 13, Tab. 5) edidit.

§. 22. Omnia Aſtronomorum tam veterum, quam recentiorum, hypotheſes atque inventa, quæ tunc temporis proſtabant, in unum volumen congeſſit JOHANNES BAPTISTA RICCIOLUS e Societate Jeſu in *Almageſto Novo* (*Bonon.* An. 1651, in fol. 16½ Alph.). Contra DAVID GREGORIUS in *Elementis Aſtronomiæ Phyſicæ & Geometricæ* (*Oxoniæ* 1702, in fol. 5 Alph. 12 plag.) recentiorem Aſtronomiam expoſuit, COPERNICI, KEPLERI atque NEWTONI inventis ſuperſtructam, quorum ille verum ſyſtema mundi, iſte veras planetarum orbitas ac motuum leges, hic tandem omnium cauſas phyſicas detexit. Multum præſtantiæ operis accederet, ſi numeris ex recentioribus obſervationibus illuſtraretur. In Anglia in linguam Anglicam verſa ſunt hæc Aſtronomiæ Elementa: Latina vero recuſa ſunt *Genevæ* An. 1726, in 4. Alph. 5, Tabb. 46) cum nonnullis additamentis.

§. 23. Nucleum Aſtronomiæ recentioris exhibuit GUILIELMUS WHISTON in *Prælectionibus Aſtronomicis* (*Cantabrigiæ* An. 1707, in 8. reg. 1 Alph. 6 plag.), ſolam tamen partem theoricam pertingit. Idem fuit inſtitutum JOHANNIS KEILL in *Introductione ad veram Aſtronomiam* (*Oxoniæ* An. 1718, in 8. Alph. 1, plag. 9½, Tabb. 2), in qua recentiſſima continentur Aſtronomorum inventa. Alias Tyronibus inprimis commendandi ſunt NICOLAI MERCATORIS *Inſtitutionum Aſtronomicarum* Libri duo (*Londini* An. 1676, in 8. 1 Alph.), in quo & Sphærica, & theorica, juxta hypotheſes tam veteres, quam recentiores breviter explicatur & exemplis illuſtratur, calculus quoque aſtronomicus perſpicue docetur.

§. 24. Quodſi cui volupe fuerit, theoricas Veterum animi gratia cognoſcere; ei ſatisfaciet PURBACHIUS in *Theoricis Planetarum* ſæpius editis. Recuſæ ſunt *Baſileæ* An. 1569, in 8. cum REGIOMONTANI *diſputationibus contra Cremonenſia in planetarum theoricas deliramenta* & JOHANNIS ESSLERI *Speculo Aſtrologico* (plag. 18). Acceſſere huic editioni CHRISTIANI WURSTISII, Mathematum Profeſſoris Baſileenſis, *quæſtiones novæ in illas theoricas* (1 Alph. 5 plag.). Explicat autem PURBACHIUS in tyronum gratiam ſolas theoricas planetarum, forma calculi geometrici neglecta, quæ ex REGIOMONTANI *Epitome Almageſti* PTOLEMÆI hauriri debet. Haſce Theoricas prolixo ac perſpicuo Commentario illuſtravit ERASMUS OSWALDUS SCHRECKENFUCHSIUS, qui *Baſileæ* An. 1556, in fol. (Alph. 5, plag. 5) prodiit, ita ut Aſtronomiam veterem, qualem tradidit PTOLEMÆUS, omnium optime ex hoc opere haurire poſſint tyrones. Theoricam Aſtronomiam tantummodo explicavit in gratiam tyronum PURBACHIUS, quia iſto tempore in Scholis doctrina ſphærica tradebatur ex JOANNIS DE SACRO BOSCO libello *de Sphæra*, ſæpiſſime recuſo, quem prolixo Commentario illuſtravit CLAVIUS Tomo tertio Operum (§. 24). MICHAEL MOESTLINUS, Matheſeos Profeſſor Tubingenſis, KEPLERI Præceptor, in *Epitome Aſtronomiæ* (*Tubingæ* An. 1610, in 8. 1 Alph. 12 plag.) non modo theoricas Planetarum, ſed & partem Aſtronomiæ ſphæricam explicat.

§. 25. Tabulæ Aſtronomicæ antiquiſſimæ ſunt *Ptolemaicæ*, in PTOLEMÆI *Almageſto*; ſed hodie cum cœlo non amplius conſentiunt. Eas An. 1252, corrigi curavit ALPHONSUS XI Rex Caſtiliæ, uſus inprimis opera ISAACI HAZAN Judæi, impenſis 400000 aureorum factis. Hinc enatæ ſunt *Tabulæ Alphonſinæ*, quibus ipſe Rex præfationem præmiſit. Sed mox harum etiam defectum agnoverunt Aſtronomi periti PURBACHIUS & REGIOMONTANUS: unde REGIOMONTANUS & poſt ipſum WALTHERUS atque WERNERUS obſervationibus cœleſtibus incubuerunt; non tamen fata permiſere, ut iis emendandis manum admoverent. Sane *Tabulæ reſolutæ*, quas dedit REGIOMONTANUS, ex Alphonſinis derivatæ. Haſce correctas & locupletatas edidit SCHONERUS An. 1536. Ea reperire licet in Operibus ejus mathematicis, de quibus poſtea dicemus. Neque ab his abludunt *Tabulæ reſolutæ de ſupputandis ſiderum motibus* JOANNIS VIRDUNGI HAFFURDII, quas An. 1542, *Norimbergæ* edidit JACOBUS CURIO, nunquam antea typis excuſas, in 4. (plag. 15), niſi quod ſint breviores.

§. 26. NICOLAUS COPERNICUS in libris *Revolutionum cœleſtium* tabulis Alphonſinis alias ſubſtituit ex recentioribus & partim propriis obſervationibus

tionibus a ſe ſupputatas; ſed ex COPERNICI obſervationibus & theoriis mox ERASMUS REINHOLDUS *Tabulas Prutenicas* procudit, aliquoties recuſas. Utor ego editione *Tubingenſi* An. 1571, in 4. 2 Alph. 15 plag.

§. 27. Tabularum Prutenicarum imperfectionem juvenis agnovit TYCHO DE BRAHE: qua agnita permotus, ut tanto cum fervore obſervationes cœleſtes venaretur. Ipſe tamen nonniſi Solis ac Lunæ motus inde reſtituit *Progymnaſmatum* Tomo primo. Sed mox iiſdem utebantur LONGOMONTANUS, qui in *Aſtronomia Danica* exemplo PTOLEMÆI & COPERNICI theoricis ſingulorum Planetarum *Tabulas* motuum ſubjunxit, *Danicarum* nomine hodienum celebratas, & KEPLERUS, cujus opera prodiere *Tabulæ Rudolphinæ* (*Ulmæ* An. 1627, in fol. 2 Alph. 20 plag.), quæ hodienum magno in pretio habentur, anterioribus omnibus prælatæ. Has in aliam formam tranſmutavit MARIA CUNITIA, cujus *Urania protia* ſive *Tabulæ Aſtronomicæ mire faciles* vim hypotheſium phyſicarum a KEPLERO proditarum complexæ, facillimo calculandi compendio, ſine ulla Logarithmorum mentione phænomenis ſatisfacientes Latine & Germanice *Olsnæ* in Sileſia An. 1650, in fol. (6 Alph. 4 plag.) prodiere, ut ſcilicet calculus *Rudolphinus* difficilis facilior redderetur. Idem inſtitutum fuit MERCATORIS in *Aſtronomicis Inſtitutionibus* (§. 23) & JOH. BAPTISTÆ MORINI, cujus *Tabulæ Rudolphinæ* in compendium redactæ verſioni Latinæ Aſtronomiæ Carolinæ STREETII ſubjunctæ (§. 21).

§. 28. Equidem LANSBERGIUS Tabularum Rudolphinarum fidem ſubleſtam reddere tentavit & *Tabulas motuum cœleſtium perpetuas*, quas vocat, condidit (§. 26, cap. 1) ſed non ſolum HOROECCIUS hominis arrogantiam retudit in *Aſtronomia Kepleriana defenſa*, quæ maximam poſthumorum partem abſolvit (§. 4); verum etiam reliqui Aſtronomi parum eidem tribuerunt. Similiter *Rudolphinarum* autoritatem non imminuere *Tabulæ Britannicæ* WINGII (§. 20), quæ in ipſius *Aſtronomia Britannica* leguntur, & NEWTONI, quas in ſua *Aſtronomia Britannica* propoſuit (§. 21), nec Gallicæ Comitis DE PAGAN (*Pariſ.* An. 1658, in 4. 1 Alph. 11 plag.), *Novalmageſticæ* RICCIOLI, quæ extant in ejuſdem *Aſtronomia Reformata* (§. 22), *Philolaicæ* BULLIALDI, quæ leguntur in *Aſtronomia Philolaica* (§. 18) & *Carolinæ* STREETII in *Aſtronomia Carolina* (§. 21). Inter meliores tamen cenſentur Philolaicæ & Carolinæ, ita ut ob benignum FLAMSTEDII, optimi hac in re arbitri, judicium Carolinas *Prælectionibus* ſuis *Aſtronomicis* ſubjunxerit WHISTON (§. 23).

§. 29. Novas quoque Tabulas ex datis *Keplerianis* & *Bullialdinis* juxta propriam hypotheſin Cono-ellipticam

cam ſupputavit JOH. JACOBUS ZIMMERMANN Eccleſiæ Würtemberga-Bieticanæ Diaconus, in *Prodromo Bicipite Cono-elliptica & a priori demonſtrata Planetarum Theorices* (*Stutgardiæ* An. 1679, in 4. plag. 15); ſed nullam hactenus in foro Aſtronomico autoritatem adeptæ.

§. 30. *Tabulæ* omnium noviſſimæ ſunt *Ludovicianæ*, quas Aſtronomus præclarus PHILIPPUS DE LA HIRE ex ſolis obſervationibus, citra ullius hypotheſeos ſubſidium, deduxit: quod ante inventa micrometra, tubos & horologium oſcillatorium impoſſibile habebatur. Prodiere *Pariſiis* An. 1702, in 4. (1 Alph. 4 plag. Tabb. 4) cum ante jam An. 1687, Tabulæ Solares & Lunares ſub titulo *partis prioris Tabularum Aſtronomicarum* (in 4. plag. 17) lucem adſpexiſſent. Haberi poſſunt pro Tabulis Rudolphinis correctis. Dudum etiam in manibus Aſtronomorum verſantur JOH. DOMINICI CASSINI *Tabulæ aſtronomicæ* * & in Anglia novas condidit HALLEIUS.

§. 31. JOHANNES HEVELIUS in *Prodromo Aſtronomiæ* (*Gedani* An. 1690, in fol. 4 Alph. 7 plag. Tab. 1) cum *Catalogo fixarum ex propriis obſervationibus deducto* Tabulas quoque Solares exhibuit domeſticis obſervationibus ſuperſtructas, quæ præſtantiſſimæ habentur. Optandum vero fuiſſet, ut fata permiſiſſent, quo reliquorum quoque Planetarum Tabulas conderet obſervationum ſuarum fructum laturus celeberrimus Autor.

§. 32. Primus fixarum Catalogum confecit ex domeſticis obſervationibus HIPPARCHUS, quem ad ſuum tempus reductum PTOLEMÆUS exhibuit in *Almageſto* lib. 7. Novum dedit TYCHO *Progymnaſmatum* Tomo primo p. 257, & ſeqq. quem extendit KEPLERUS in Rudolphinis. Exhibet fixarum Catalogum, ſed tantummodo correctum, non vero ex propriis obſervationibus conditum RICCIOLUS in *Aſtronomia Reformata*. Aſt *Tabula Longitudinis* ac *Latitudinis ſtellarum fixarum* ex obſervatione ULUGH BEIGHII, TAMERLANI Magni Nepotis, ex MSC. Perſicis Latine vertit, Commentariis illuſtravit & *Oxonii* An. 1665, in 4. (1 Alph. 13 plag.), edidit THOMAS HYDE. Addit MUHAMMEDIS TIXINI *Tabulas declinationum & aſcenſionum rectarum*. HEVELIUS *in Prodromo* catalogos fixarum omnes, qui hactenus proſtant, una exhibet atque inter ſe comparat.

§. 33. Enimvero locupletiſſimus Fixarum omnium, quæ conſpici poſſunt, ex propriis obſervationibus conditus a FLAMSTEDIO & ſub titulo: *Catalogi Fixarum Britannici*, exhibetur in Aſtronomi ſummi Hiſtoria

* Edidit nuperrime JACOBUS CASSINI Domin. filius, *Tabulas Aſtronomicas*, una cum *Elementis Aſtronomiæ* gallice, *Pariſiis*, in 4. 2 Vol. An. 1740. Primum volumen, quod Aſtronomiam complectitur, habet Alph. 3, plag. 15, Tabb. 20. Alterum quod Tabulis deſtinatur, conſtat Alph. 1, plag. 3, Tabb. 5.

ſtoria cœleſti, de qua abunde diximus ſuperius (§. 7).

§. 34. Aſtra deſcribunt & ſchematiſmis illuſtrant JOHANNES BAYERUS in *Uranometria*, *Ulmæ* An. 1661, quæ prodiit textu in 4. figuris in folio impreſſis (plag. 13, Tabb. 48), qua in citandis ſtellis utuntur Aſtronomi, & JOHANNES HEVELIUS in *Firmamento Sobieſciano* (*Gedani* An. 1690, in fol. plag. 6, Tabb. æn. 54). Optandum vero fuiſſet, ut literas, quibus ad indigitandas ſtellas uſus fuit BAYERUS, etiam HEVELIUS retinuiſſet: id quod fecit JOHANNES FLAMSTEDIUS in opere magnifico *Atlantis cœleſtis*, quod *Londini* An. 1729, in fol. reg. (plag. 5, Tabb. 29) prodiit. Compendia uſibus tyronum ſervientia ſunt ÆGIDII STRAUCHII *Aſtrognoſia* (*Vitte bergæ* An. 1684, in 12. plag. 9, Tabb. 25) & WILHELMI SCHICKARDI *Aſtroſcopium* (*Lipſiæ* An. 1698, in 12. plag. 6, Tabb. 2).

§. 35. Globi cœleſtis conſtructionem & uſum perſpicue explicavit SCHONERUS in Tractatu, qui inter opera ipſius extat. Recentius præter alios uſum globi cœleſtis docent GUILIELMUS BLEAU in *Inſtitutione Aſtronomica de uſu globorum* (*Amſtelod.* An. 1690, in reg. 8. plag. 16) & BION in libro Gallico ejuſdem argumenti, qui ſub titulo *Uſage des Globes céleſtes & terreſtres, & des ſphéres*, *Pariſiis* An. 1699, in 12. reg. (16 plag. Tabb. 26) prodiit, ac nuper auctior recuſus.

§. 36. Librum BIONIS Germanice vertit & annotationibus nonnulliſque additamentis locupletavit D. CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGER. Prodiit *Lemgoviæ* ſub titulo: *Des Herrn* BIONS *Abhandlung von der Welt-Beſchreibung und dem Gebrauch derer Himmels und Erd Kugeln auch Sphären* An. 1736, in 8. (Alph. 1, plag. 19, Tabb. 35). Explicat hic Autor in altera præſertim editione, quæ ex Aſtronomia & Geographia tanquam cognita ſupponi debent, ſiquidem uſum utriuſque Globi, terreſtris ſcilicet ac cœleſtis, intelligere volueris. Adduntur etiam phyſica de Meteoris & alia, quæ ad Calendarii notitiam faciunt.

§. 37. Cum LOTHARIUS ZUMBACH DE KOESFELD, Med. D. poſtea Matheſeos Profeſſor in illuſtri Collegio Carolino, quod Caſſellis erat, novos Globos, cœleſtem juxta Catalogum fixarum HEVELII & terreſtrem ex recentiſſimis obſervationibus, GERARDO VALK chalcographo conſtruxiſſet, adornationem quoque & diſtributionem ac uſum Globorum deſcripſit. Enimvero quia Globus cœleſtis tantummodo ſatisfacit phænomenis primi mobilis, novum excogitavit inſtrumentum aſtronomicum, quale adhuc deſiderari arbitrabatur, quo loca & motus Planetarum atque ſtellarum fixarum proprii in longitudinem & latitu-

latitudinem Zodiaci, eclipſes Solis & Lunæ, occultationes ſtellarum, aliaque plurima inde derivata, abſque calculo exacte, facile, ac promte exhibentur. Inſtrumentum hoc *Planetolabium* appellavit & GERARDUS VALK dextre idem præparavit. Deſcriptioni itaque Globorum adjunxit deſcriptionem Planetolabii ſui, explicans omnem ejus rationem & uſum. Utraque deſcriptio ſub titulo: *Praxis Aſtronomiæ utriuſque, ut & Geographiæ exercita per uſum Globi cœleſtis & Terreſtris, tum & Planeto labii*, prodiit *Amſtelodami* An. 1700, in 4. Deſcriptio globorum conſtat plag. 18, Tabb. 4. Planetolabii plag. 9, Tabb. 2. Supponit illa ad manus eſſe Globos, hæc Planetolabium. Equidem SCHONERUS jam invenerat Organum Uranicum, quod vocat, e quo facillime, abſque ſcrupuloſa ſupputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, & quod ſub finem operum deſcribitur; cum tamen ejus conſtructio nitatur hypotheſibus Veterum, ZUMBACHII vero Planetolabium ſecundum hypotheſin recentiorem ellipticam, & *Bullialdi* inprimis Aſtronomiam Philolaicam fuerit conſtructum, & multo accuratius exhibeat loca planetarum; quin non inutilem operam ſumſerit ZUMBACHIUS dubitandum non eſt. Ne quid in mechanica Aſtronomiæ Theoricæ parte deſiderari poſſet, addidit idem *Jovilabium* & *Saturnilabium*, quorum iſto loca Satellitum Jovis, hoc autem loca Satellitum Saturni, abſque calculo, ad datum quodcunque tempus determinantur. *Deſcriptio Jovilabii* prodiit *Amſtelodami* An. 1716, in 4. (plag. 6, Tab. 1); *Saturnilabii* vero ibid. An. 1726, in 4. (plag. 9, Tabb. 2.).

§. 38. Conſtruxit ZUMBACHIUS Planetolabium ſuum ad imitationem Aſtrolabii, inſtrumenti ad explicanda phænomena motus primi dudum adhibiti. Aſtrolabii conſtructionem & uſum rigidiſſime demonſtravit CLAVIUS in Tractatu *de Aſtrolabio*, qui in Operibus ejus legitur (§. 24, cap. 1). Etſi autem CLAVIUS tantummodo de polari, quod vocatur, egerit; tanta tamen uſus prolixitate & ſchemata conſtruxit tam implexa ac intricata, ut a nullo mortalium totum fuiſſe perlectum judicet TACQUETUS. Quamobrem ipſe lib. 3. Opticæ, qui de projectione aſtronomica agit, doctrinam hanc magis perſpicue proponit, & non minus æquinoctiale, quam polare explanat. Ceterum quoad doctrinam de projectione ſphæræ, tam orthographica, quam ſtereographica, commendari meretur Tractatus, quem ſub titulo: *A Treatiſe of the ſphere* patrio ſermone *Londini* An. 1714, edidit JOANNES WITTY (plag. 15, Tabb. 10). Tyronibus autem, qui uſum Aſtrolabii cognoſcere ſtudent, ſatisfaciet BION in Tractatu, qui *Pariſiis* An. 1702, in 12. reg. (plag. $10\frac{1}{2}$, Tabb. 9) ſub titulo: *L'Uſage des Aſtrolabes tant univerſels que particuliers* lucem adſpexit.

§. 39. Ad

§. 39. Ad naturam ſiderum & rationem univerſi cognoſcendam conducunt, præter RICCIOLUM in Almageſto, CHRISTOPHORI SCHEINERI *Roſa Urſina* (*Bracciani* An. 1626, uſque ad An. 1630, in fol. 11 Alph. cum figuris multis textui inſertis) opus de maculis ſolaribus abſolutiſſimum; ejuſdem *Diſquiſitiones Mathematicæ de controverſiis & novitatibus aſtronomicis* (*Ingolſtadii* An. 1614, in 4. plag. 12); opuſculum *de refractionibus cœleſtibus* (*Ingolſtadii* An. 1617, in 4.) & ejuſdem *Sol ellipticus* (*Auguſtæ Vindelicorum* in 4. (plag. 5); GALILÆI Tractatus *de maculis ſolaribus* (*Romæ* An. 1613) & *Nuncius ſidereus* aliquoties recuſus; ejuſdem *Dialogi de Syſtemate mundi* (*Lugd. Bat.* An. 1699, in 4. 3 Alph.), opus lectu digniſſimum; JOHANNIS KEPLERI Tractatus Germanicus *de Cometa* anni 1607, (*Halæ* 1608, in 4. plag. 5) & *De Cometis libelli tres* (*Auguſtæ Vindelicorum* An. 1619, in 4. plag. 20, Tab. 1): ejuſdem *Prodromus diſſertationum coſmographicarum, continens Myſterium coſmographicum de admirabili proportione orbium cœleſtium, deque cauſis cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis, demonſtratum per quinque regularia corpora Geometrica*, cum Narratione GEORGII JOACHIMI RHETICI de libris revolutionum NICOLAI COPERNICI (*Tubingæ* An. 1596, in 4. 1 Alph.): ejuſdem *Somnium* ſeu *opus poſthumum de Aſtronomia lunari* (*Francof.* An. 1634, in 4. 1 Alph.): ejuſdem *Harmonica Mundi* (*Lincii* An. 1619, in fol. 3 Alph. 13 plag.): ejuſdem *Hyperaſpiſtes* TYCHONIS (*Franc.* An. 1625, in 4. plag. 28) adverſus SCIPIONIS CLARAMONTII *Antitychonem*, in quo contra TYCHONEM BRAHE demonſtrare ſatagit cometas eſſe ſublunares, non cœleſtes (*Venetiis* An. 1621, in 4. 2 Alph. 2 plag.); HEVELII *Selenographia* (*Gedani* An. 1647, in fol. 6 Alph. 10 plag. Tabb. 111), in quo ejus facies ſecundum omnes phaſes accuratiſſime delineatur: ejuſdem *Prodromus Cometicus*, quo hiſtoria Cometæ An. 1664 exorti, curſum, facieſque diverſas capitis ac caudæ, accurate delineatas complectens, nec non *Diſſertatio de Cometarum omnium motu, generatione, variiſque phænomenis* exhibetur (*Gedani* An. 1665, in fol. plag. 17, Tabb. 3): ejuſdem *Deſcriptio Cometæ* An. 1664, (*Gedani* An. 1666, in fol. 2 Alph. 5 plag. Tabb. 7): ejuſdem *Epiſtola de Cometa* An. 1672, (*Gedani* An. 1672, in fol. 2 plag. Tab. 1): ejuſdem *Cometogrophia* (*Gedani* An. 1668, in fol. 10 Alph. 19 plag. Tabb. 38) opus de Cometis abſolutiſſimum: ejuſdem *Diſſertatio de nativa Saturni facie* (*Gedani* An. 1656, fol. 12 plag. Tabb. 9), ubi phaſes Saturni delineat & ad cauſas ſuas revocare ſtudet: ejuſdem *Mercurius in Sole viſus*, *cum* HOROCCII *Venere in Sole viſa*, & *Hiſtoria*

ſtellæ miræ (*Gedani* An. 1662, in fol. 2 Alph. 2 plag. 10 Tabb.); CHRISTIANI HUGENII *Syſtema Saturninum* (*Hagæ Comitis* An. 1659, in 4. plag. 12), in quo annulus Saturni deſcribitur & unus ejus ſatellitum annunciatur, & inprimis ejuſdem *Coſmotheoros* (ibid. An. 1698, in 4. plag. 18, Tabb. 5, item *Leoburgi* 1704, in 8. plag. 8, Trbb. 5), in quo natura planetarum ex conjecturis probabilibus eruitur: FRANCISCI BLANCHINI *Heſperi & Phoſphori Nova phænomena, ſive Obſervationes circa Planetam Veneris* (*Romæ* An. 1728, in fol. Alph. 1, plag. 2, Tabb. 10), in quo opere maculæ Veneris exactiſſime delineantur, & Veneri eadem opera impenditur, quam in Luna conſumſit HEVELIUS, præter alia ad parallaxin Veneris & ejus a Terra diſtantiam ſpectantia: DE MAUPERTUIS Diſcurſus Gallice conſcriptus *de Figuris differentibus aſtrorum* (*Pariſ.* An. 1732, in 8. plag. 5½): JACOBI BERNOULLI *Conamen novi ſyſtematis Cometarum* (*Amſtelodami* An. 1682, in 8. 6½ plag. Tabb. 8): JOH. BAPTISTÆ DU HAMEL *Aſtronomia Phyſica* (Tom. 1. Operum Philoſ. *Norimb.* An. 1681, in 4): WILHELMI DERHAM *Theologia Aſtronomica*, quæ ſub titulo: *Aſtro-Theology*, *Londini* An. 1715, in 8. (plag. 20, Tabb. 3) prodiit, & *Hamburgi* ex Anglico ſermone in Germanicum translata lucem adſpexit.

§. 40. Huc etiam referendi ſunt Autores qui motuum cœleſtium cauſas phyſicas tradere aggreſſi ſunt; KEPPLERUS in Phyſica cœleſti ſeu Commentariis de motibus ſtellæ Martis, & in Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ (§. 16), NEWTONUS in Principiis Philoſ. Natur. Mathem. cum GREGORIO in Elementis Aſtronomiæ (§. cit.) VILLEMOT ſupra laudatus (§. cit.): & Cel. J. POLENUS in *Dialogo de Vorticibus cœleſtibus* (*Patavii* An. 1712, in 4. 1 Alph. 6. plag. 7 Tabb.).

§. 41. Syſtema Copernicanum defendunt, præter GALILÆUM ante laudatum in Dialogis de Syſtemate mundi (§. 39), peculiaribus ſcriptis PETRUS MEGERLINUS, Profeſſor Mathematum Baſileenſis in *Syſtemate mundi Copernicano argumentis invictis demonſtrato* (*Amſtelodami* An. 1682, in 8. plag. 6, Tabb. 3); BULLIALDUS in *Philolao ab inferis reſuſcitato* ſeu *Diſſertatione de vero ſyſtemate* (*Amſtelod.* An. 1629, in 4.), PETRUS HORREBOWIUS Mathematum Profeſſor Hafnienſis, in *Copernico triumphante*, ſive *de parallaxi Orbis annui Tractatu epiſtolari* (*Hafniæ* 1727, in 4. plag. 7, Tabb. 1) & JOH. JACOBUS ZIMMERMANN in *Scriptura Copernizante* Germanice ſæpius edita. Utor editione *Norimbergenſi* anni 1709, in 8. (plag. 8).

§. 42. Aſtronomiam, quam in parte prima ſecundum proprias hypotheſes explicaverat, in ſecunda ad uſum concionatorum transfert AN-

TONIUS MARIA SCHYRLÆUS DE RHEITA, Capucinus, in *Oculo Enochi atque Eliæ*, ſeu *Radio ſidereo myſtico* (*Antverpiæ* An. 1665, in fol. 4 Alph. 9 plag.), qui etiam ſub finem partis primæ praxin Dioptricæ explicat.

§. 43. Calculum eclipſium peculiaribus ſcriptis in uſum tyronum illuſtrarunt ELIAS MOLERUS in *Opere novo Aſtronomico*, in quo doctrina de ſupputandis deliquiis juxta Tabulas Prutenicas explicatur (*Lugduni* An. 1687, in 4. 1 Alph. 4 plag.); JOHANNES HANKE, e Societate Jeſu, in *Tenebris ſummatim illuſtratis*, qui ſecundum Tabulas RICCIOLI computum inſtituit (*Moguntiæ* An. 1682, in 4. plag. 15) & inprimis ZIMMERMANNUS modo laudatus in ſcripto Germanico, cui titulus: *Auf alle und jede Hypotheſes applicable Fundamental-Aufgaben von den Sond- und Mond- Finſterniſſen* (*Hamburgi* An. 1691, in 8. 15½ plag.) Eclipſeos ſolaris calculum quoque bene tradidit, & Logarithmos, in uſum Logiſticæ ſexagenariæ exhibuit, quales alibi non proſtant. Commemorari hic quoque merentur Diſſertationes quædam academicæ. Nimirum calculum Eclipſium ſolarium exemplo Eclipſeos anni 1705, illuſtravit JOHANNES BERNHARDUS WIDEBURGIUS, nunc Profeſſor Mathematum Jenenſis (*Helmſtadii* An. 1714, in 4. plag. 12, Tabb. 4) & Eclipſeos ſolaris anni 1723, calculum ſecundum methodum PHILIPPI DE LA HIRE, ex ejuſdem Tabulis, quoad minutiſſima, repræſentat GEORGIUS MATTHIAS BOSE, nunc Phyſicæ Profeſſor in Academia Wittebergenſi, in *Commentatione in Eclipſin Terræ* An. 1723, d. 13 Maji (*Lipſiæ* An. 1723, in 4. maj. Alph. 1, Tab. 1) Huc etiam pertinent *Diſſertationes de Eclipſi lunari* & *de Eclipſi ſolari* CHRISTOPHORI LANGHANSEN, Profeſſoris Mathematum Regiomontani, quarum primam ſub præſidio BLÆSINGII, tum Mathematum Profeſſoris, alteram ipſe Præſes defendit.

§. 44. Equidem Tabularum aſtronomicarum conditores præcepta quoque calculi iiſdem præmittere ſolent, quod etiam fecit PHILIPPUS DE LA HIRE: quoniam tamen ſæpiſſime præcepta breviora ſunt, quam ut ad omnem calculum aſtronomicum abſolvendum tyronibus præſertim ſatisfaciant; ideo JOANNES ALBERTUS KLIMMIUS, idiomate Germanico, *Norimbergæ* An. 1725, in 4. (Alph. 1, plag. 17, Tabb. 16). Tabulas PHILIPPI DE LA HIRE cum nova, completa, & accurata deſcriptione omnis calculi aſtronomici in uſum tyronum calculi edidit. Ad eundem finem tendit opus in hoc genere maxime commendandum, *Aſtroſophia numerica*, ſive aſtronomica ſupputandi ratio ANGELI CAPELLI, Canonici & Aſtronomiæ Profeſſoris Parmenſis, quæ duabus partibus *Venetiis* An. 1733 & 1736, in 4. pro-

diit (Pars I, plag. 14, Tabb. æn. 8. Pars II, Alph. 1, plag. 16). Parte priori abunde docentur, quæ ad calculum faciunt; poſteriori autem Tabulæ aſtronomicæ continentur.

§. 45. JOANNES LEONHARDUS ROSTIUS An. 1718, *Norimbergæ* in 4. (Alph. 3, Tabb. 14), edidit librum aſtronomicum ſub Titulo: *Aſtronomiſches Hand-Buch*, h. e. Manuale Aſtronomicum, in quo doctrinam ſphæricam exemplis perſpicuis illuſtrat, & modum obſervandi declarat, ipſe nimirum in obſervando verſatiſſimus. Addidit deinde An. 1727, (*Norimbergæ* in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 14) partem alteram ſub Titulo: *Aufrichtiger Aſtronomus*, h. e. Aſtronomus ingenuus. In ea plurima tradit, quæ ad doctrinam ſphæricam, motus Cometarum, & obſervationes aſtronomicas ſpectant. Inprimis autem plurima tradit, quæ ad calculum Eclipſium facilitandum conducunt. Ad Aſtronomiam adeo practicam addiſcendam utile opus.

§. 46. Quoniam in anterioribus aliquoties mentionem injecimus *Operum Mathematicorum* JOANNIS SCHONERI, ut de iis adhuc dicamus res ipſa flagitare videtur. Ea in unum volumen congeſſit, & correcta & locupletata *Norimbergæ* An. 1561, in fol. excudi curavit Autoris filius ANDREAS SCHONERUS (Alph. 10). Continentur in hiſce 1. Iſagoge Aſtrologiæ judiciariæ, 2. de Judiciis Nativitatum libri tres, 3. Tabulæ reſolutæ aſtronomicæ, 4. de uſu globi cœleſtis, 5. de compoſitione globi cœleſtis, 6. de uſu globi terreſtris, 7. de compoſitione globi terreſtris, 8. Libellus de diſtantiis locorum per numeros & inſtrumentum inveſtigandis, 9. de conſtructione Torqueti, 10. In conſtructionem atque uſum Rectanguli ſive radii aſtronomici Annotationes, 11. In Fabricam & uſum magnæ Regulæ PTOLEMÆI Annotationes, 12. Horarii Cylindri Canones, 13. Æquatorium aſtronomicum, ex quo errantium ſtellarum motus, luminarium configurationes & defectus colliguntur, oppoſitis ubique planetarum ſphæris & terminorum expoſitionibus, 14. Planiſphærium ſeu Meteoroſcopium, in quo ſingula, quæ per motum primi mobilis contingunt, inveniuntur, 15. Organum Uranicum, quo facillime, abſque ſcrupuloſa ſupputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, 16. Inſtrumentum impedimentorum Lunæ, per quod dies impediti facillime colliguntur his apprime utile, qui Almanach conſcribere geſtiunt. Videmus adeo in hiſce operibus non contineri alia, niſi quæ ad præſens caput pertinent, quæ ſiderum nempe ſcientiam concernunt.

§. 47. Plura nobis recenſenda eſſent ſcripta aſtronomica, ſi omnia promiſcue in medium afferre liberet. Sed cum ea, quæ a veteribus & recentioribus uſque ad Annum 1660, ſeculi ſuperioris literis conſignata fuere,

re, ex Riccioli Almageſto facile ſuppleri queant, cetera ex Diariis Eruditorum, quæ hodie magno numero eduntur, peti queant; potiora a nobis commemorata eſſe ſufficit. De Tychonis tantum *Progymnaſmatibus Aſtronomiæ inſtauratæ*, aliquoties laudatis, obſervamus, quod pars prima equidem inſcribatur *De nova ſtella anni* 1572, generaliter tamen de reſtitutione motuum Solis & Lunæ ſtellarumque inerrantium tractet(*Uraniburgi & Pragæ* 1610, in 4. 4 Alph. 13 plag.); altera vero de Cometa An. 1577, agat (*Pragæ* An. 1610, in 4. 2 Alph. 13 plag.). Tomo ſecundo hujus editionis adjiciuntur Tychonis de Brahe *Epiſtolæ Aſtronomicæ* (*Uraniburgi* An. 1610, in 4. 1 Alph. 16 plag.). Sola Progymnaſmata ſub titulo Operum Tychonis de Brahe poſtea *Francofurti ad Mœnum* in 4. recuſa.

§. 48. Dignum quoque eſt, cujus ſingularem mentionem injiciamus, Automatum Planetarium Hugenii, motus planetarum motu ſuo accurate indicans, deſcriptum ſub finem poſthumorum (*§.* 35, cap. 1). Etſi enim ante ipſum iſtiuſmodi automata conſtruxerint alii, quorum nonnulla recenſet Schottus in Technica curioſa: eorum tamen uſus hodie nullus amplius eſt, poſtquam *Hugenianum* ad Aſtronomiæ recentioris perfectionem compoſitum.

§. 49. Præterea nobis adhuc commemoranda ſunt ſcripta quædam recentiora, quæ ſilentio præteriri nefas. Nimirum An. 1697, *Norimbergæ* in fol. (Alph. 1, plag. 4, Tabb. 4) Joh. Philippus a Wurtzelbau edidit Tractatum de ſitu Geographico ſecundum latitudinem & longitudinem civitatis Norimbergenſis ſub titulo: *Uranies Noricæ Baſis*; in uſum obſervationum ſuarum, quas ibidem multa ſolertia & inſtrumentis exquiſitis inſtituebat. Sed cum in longitudine ac refractionibus aliquid immutandum eſſe poſthac deprehenderet, ejus ſupplementum An. 1713, in fol. (plag. $5\frac{1}{2}$) addidit ſub titulo: *Stabilimentum Baſeos Uranies Noricæ Aſtronomicæ & Geographicæ, pro deducta antehac inclitæ urbis latitudine & corrigendis longitudinum Geographicarum numeris* &c. ubi etiam de obliquitate Eclipticæ & refractione horizontali agit. Tandem An. 1719, acceſſit opus Motuum ſolarium, in qua ex Solis obſervationibus in Meridiano Norimbergenſi per tria ſecula habitis iidem definiuntur, & eorundem Tabulæ exhibentur, ſed intra dimidium ſeculum variabiles ob eccentricitatis, quam ſtatuit, mutabilitatem. Prodiit *Norimbergæ* An. 1719, in fol. (plag. $22\frac{1}{2}$, Tabb. 1) ſub titulo: *Uranies Noricæ Baſis aſtronomica*, ſive *Rationes motus annui ex obſervationibus in Solem hoc noſtro & ſeculo abhinc tertio, Norimbergæ ſub eodem Meridiano habitis quam plurimis deductæ & propliter demonſtratæ.* Operi huic ſolari adjicitur tractatus de ſitu geographico Norim-

Norimbergæ & ejus ſupplementum, de quo ante diximus, ut adeo integrum, quale nunc in bibliopoliis proſtat, conſtet (Alph. 2, plag. 9, Tabb. 5).

§. 50. An. 1735, *Hafniæ* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 11) PETRUS HORREBOWIUS, Phil. & Med. D. in Univerſitate Hafnienſi Aſtronomiæ Profeſſor, edidit *Baſin Aſtronomiæ*, ſive Aſtronomiæ partem mechanicam, in qua deſcribuntur obſervatoria atque inſtrumenta aſtronomica Rœmeriana Danica, ſimulque eorundem uſus, ſive methodi obſervandi Rœmerianæ in uſum publicum, & præſertim in gratiam una prodeuntis valde inſignis atque uſus ampliſſimi, nunquam non poſteris memorandi, Tridui obſervationum Tuſculanarum ROEMERI ex fundamentis exponuntur. Dolendum vero, quod duo libri, in quo obſervationes ſuas deſcripſerat ROEMERUS ferali iſto incendio An. 1726, quod circa finem Octobris totam fere Hafniam vaſtavit, una cum obſervationibus *Horrebovianis* perierint.

§. 51. Multum deſudavit ROEMERUS in detegenda parallaxi orbis annui, nec ſine ſucceſſu hoc ſe præſtitiſſe ſibi videbatur. Ex ejus adeo obſervationibus HORREBOWIUS eandem demonſtrandam ſibi ſumſit, ediditque ea ſini Hafniæ in 4. (plag. 8, Tab. 1) ſuis ſumtibus *Copernicum triumphantem*, ſive *de parallaxi orbis annui Tractatum epiſtolarem* ad Sereniſſimum Principem CHRISTIANUM, Daniæ & Norwegiæ hæredem An. 1727, cujus pleraque exemplaria ferale iſtud, quod modo commemoravimus, incendium conſumſit.

§. 52. Enimvero nondum triumphare Copernicum in *Commentariis Bononienſis Scientiarum & Artium Inſtituti* (§. 40, cap. 1) oſtendit EUSTACHIUS MANFREDI, cum ex obſervationibus Rœmerianis, quæ colligitur in fixis, quoad declinationem & aſcenſionem rectam, mutatio parallaxi orbis annui minime conſentiat. Nimirum hactenus Aſtronomi in parallaxin orbis annui inquiſituri id tantummodo agebant, ut omni circumſpectione diſpicerent, num aliqua fixarum a loco fixo aberratio annua deprehendatur, parum ſolliciti utrum præciſe talis ſit, qualem exigit motus annuus Telluris circa Solem, an vero eidem contrarietur. Saluberrimo igitur conſilio MANFREDIUS *Theoriam de annuis inerrantium ſtellarum aberrationibus*, in Aſtronomia hactenus deſideratam condidit eamque publici juris fecit *Bononiæ* Anno 1729, in 4. (plag. 10, Tabb. 6), ut juxta eam obſervationes examinari queant, ne per errorem parallaxis orbis annui inde colligatur, quæ inde colligi nequit.

§. 53. Celebratiſſimus hodie inter Aſtronomos eſt Gnomon Meridianus Bononienſis ad D. *Petronii*, cui Aſtronomia multa debet incrementa & cujus hiſtoriam dederunt JOAN-

Joannes Dominicus Cassini atque Dominicus Gulielminus. Hujus inſtrumenti deſcriptionem & obſervationes aſtronomicas omnes eodem, ab ejus conſtructione uſque ad hoc tempus, peractas An. 1736, *Bononiæ* in 4. reg. (Alph. 2. plag. 2) edidit idem Manfredius. In hoc opere de obliquitatis eclipticæ mutatione & theoria Solis præclara leguntur, & illa inprimis extra omnem controverſiæ aleam ponitur.

§. 54. Anno 1725, Horrebowius edidit *Hafniæ* in 4. (plag. 16, Tab. 1) *Clavem Aſtronomiæ*, ſive *Aſtronomiæ partem phyſicam*, *in qua potiſſimum in parallaxin Solis inquirit.* Pendet autem methodus ab hypotheſi quadam phyſica. Unde ipſi poſthac conſultum viſum, ut miſſis omnibus hypotheſibus elementa Aſtronomiæ quoad refractiones, obliquitatem eclipticæ, polique altitudinem nudis obſervationibus Roemeri ſuperſtrueret. Eo conſilio in publicam lucem emiſit, An. 1732, *Hafniæ* in 4. (plag. 16, Tab. 1). *Atrium Aſtronomiæ*, ſive *de inveniendis refractionibus*, *obliquitate eclipticæ*, *atque elevatione poli* Tractatum. Subjunxit ſchediaſma de arte interpolandi, quod jam antea ſeorſim publicatum ad ſcripta analytica referendum. Ceterum in Atrio hoc aperiendo ampliſſimum uſum oſtendit Tridui illius *Roemeriani*, quod in Baſi Aſtronomiæ extat (§. 50), & ſe in poſterum uberiorem adhuc oſtenſurum pollicetur. Unde non mireris Roemerum morti vicinum ejus editionem, una cum deſcriptione inſtrumentorum ſuorum ſerio commendaſſe, & eo fine ejus exemplar nitide deſcriptum S. R. Selandiæ Epiſcopo C. W. Wormio tradidiſſe.

§. 55. Ad ſcripta Aſtronomica referendæ etiam ſunt Ephemerides, in quibus loca planetarum eorumque adſpectus, ad ſingulos anni dies computati, una cum Eclipſium deſcriptionibus exhibentur. Juxta Tabulas Prutenicas, *Ephemerides* ab An. 1577, ad annum 1590, conſtruxerat Joannes Stadius. Juxta eaſdem ab An. 1581 uſque ad annum 1620, computatas *Venetiis* excudi curavit Joannes Antonius Maginus, Mathematum Profeſſor Bononienſis, edito opere *Primi Mobilis*, duodecim libris contenti, in quibus habentur Trigonometria ſphæricorum & aſtronomica, gnomonica, geographicaque problemata, magnus trigonometricus canon emendatus & auctus, ac magna primi mobilis Tabula ad decades primorum ſcrupulorum ſupputata (*Bononiæ* An. 1609, in fol. Alph. 10, plag. 21), celebris: ſed cum eas examinaret Davides Origanus, Mathematum Profeſſor Francof. ad Viadrum, eas non ſatis accuratas deprehendit. Quamobrem ipſe An. 1599, *Franc. ad Viadrum* in 4. (4 Alph. 12 plag.) novas edidit *Ephemerides*, ab An. 1595 uſque ad An. 1630, deinceps continuatas

uſque ad finem ſæculi. Præmiſſa eſt Introductio ſeu compendiaria Ephemeridum enarratio, qua non ſolum, quæ ad motum primi & ſecundorum mobilium uſumque pleniorem Ephemeridum faciunt, ſed & plurima alia chronologica & aſtrologica præcepta ea facilitate explicantur, ut inde quiſque calendaria anniverſaria & nativitatum texere poſſit judicia. Hæ Ephemerides ſeculo decimo ſexto celebratiſſimæ fuerunt, iiſdemque uſi ſunt calendariographi. Etſi enim KEPLERUS ab An. 1617 uſque ad An. 1636, ex Tabulis ſuis Rudolphinis ſupputatas *Lincii* in 4. (3 Alph. 17 plag.) edidiſſet, inchoatas *Lincii* 1616, & abſolutas *Sagani* Sileſiæ typis Autoris An. 1630, quibus præmittitur explicatio fundamentorum Ephemeridis & inſtructio ſuper nova ejus forma; facile tamen apparet, cur uſum Ephemeridum ORIGANI impedire minime potuerint.

§. 56. Cum ORIGANI Ephemerides cum ſeculo præcedente exſpiraſſent, initio hujus complures de novis computandis conſilia agitarunt: quo ſucceſſu, noſtrum jam non eſt enarrare. Initio hujus ſeculi Ephemerides dederat MEZZAVACCHA, quibus deficientibus, manum eidem operi admovit Marchio ANTONIUS GHISLERIUS, cujus *Ephemerides motuum cœleſtium* ab An. 1721 ad An. 1740, ex Tabulis DE LA HIRE, STREETII & FLAMSTEDII ad Meridianum Bononiæ ſupputatæ prodierunt *Bononiæ* An. 1720, in 4. (Alph. 3, plag. 9½). Anno autem 1725, ibidem lucem adſpexere *Noviſſimæ Ephemerides motuum cœleſtium e Caſſinianis Tabulis ad meridianum Bononiæ ſupputatæ*, autoribus EUSTACHIO MANFREDIO Bononienſis Scientiarum Inſtituti Aſtronomo & ſociis ad uſum Inſtituti. Tomus primus continens Ephemerides ex An. 1726 in An. 1737, conſtat Alph. 2, plag. 4, Tabb. 8: Tomus II, complectens Ephemerides ex An. 1738 in An. 1750, Alph. 2, plag. 6, Tabb. 7. Id ſingulare habet MANFREDIUS, quod dederit typos eclipſium ſolarium, quales per totam Telluris faciem, ubi conſpicuæ ſunt, apparent, juxta principia projectionis.

§. 57. Singulis annis Pariſiis in uſum anni ſequentis, juſſu Academiæ Regiæ ſcientiarum, ad Meridianum Pariſienſem editur Ephemeris ſub titulo: *Connoiſſance des Tems pour l'Année* v. gr. 1753. Ephemeridi ſubjiciuntur Tabulæ quædam aſtronomicæ cum earundem explicatione & uſu, una cum Catalogo ſingulorum membrorum Academiæ Regiæ ſcientiarum, qualis eſt menſe Novembri ejus, quo editur, anni. Extant in iiſdem eclipſes Satellitum Jovis, cum in caſum obſervationum aſtronomicarum potiſſimum edantur iſtæ Ephemerides, quæ præterea uſum Calendarii præſtant.

§. 58. Olim uſque ultra dimidium ſeculi ſuperioris ad Aſtronomiam quo-

quoque relata fuit *Aſtrologia judiciaria*, ars divinandi ex aſtris : omnes enim & naturæ, & hominum actiones, horumque fata iiſdem ſubjecerunt Veteres. Magna ea fuit autoritas, exculta & defenſa a gravibus Autoribus, ita ut ipſe PTOLEMÆUS de eadem commentatus fuerit, eamque Aſtronomiæ ſociam fecerit (§. 10, cap. 9). Noſtro autem ævo, vanitate ejus agnita, indigna cenſetur, quæ inter ſcientias mathematicas referatur : quæ etiam ratio eſt, cur nullum eidem in Elementis noſtris Matheſeos univerſæ fecerimus locum. Quodſi tamen cui volupe fuerit Aſtrologiæ præcepta cognoſcere, ei ſatisfaciet SCHONERUS in *Opuſculo aſtrologico*, quod ex diverſorum libris ſumma cura pro ſtudioſorum utilitate collegit & *Norimbergæ* An. 1539, in 4. (plag. 14) edidit. Legitur idem in Operibus, in quibus primum tenet locum (§. 46). In his autem prolixa quoque occurrit tractatio de judiciis nativitatum, ut in hac Aſtrologiæ parte nihil amplius deſiderari poſſit. Compendioſior eſt *Tractatus aſtrologicus de genethliacorum thematum judiciis, pro ſingulis nati accidentibus ex vetuſtis & optimis quibuſque auctoribus collectus induſtria* HENRICI RANZOVII, *Producis Cimbrici*, qui *Francofurti ad Mœnum* An. 1633, in 8. (Alph. 1, plag. 2) prodiit, & quo in juventute uſus, cum artem illam pernoſcere geſtirem.

§. 59. Superiori adhuc ſeculo Aſtrologiæ maxime deditus fuit JOANNES BAPTISTA MORINUS, Medicinæ Doctor, & Pariſiis Regius Mathematum Profeſſor, cujus *Aſtrologia Gallica principiis & rationibus propriis ſtabilita*, atque in 26 libros diſtributa, prodiit *Hagæ Comitis* An. 1661, in fol. cum prolixa præfatione apologetica (Alph. 6, plag. 12), qui vulgo dicitur Aſtrologiam demonſtraſſe. Sed quantum diſtent a veris demonſtrationibus ejus probationes, haud difficulter judicabit, qui genuinæ demonſtrationis formam animo concepit.

CAPUT X.

De Scriptis Chronologicis, Geographicis & Gnomonicis.

§. 1. DOctrinam temporum primus in Scientiæ formam redegit JOSEPHUS SCALIGER, cujus *De emendatione temporum* libri primum An. 1587, lucem adſpexerunt, deinde quindecim annis elapſis prorſus immutati denuo prodierunt. Multa eruditione conſcriptum eſt hoc opus;

ſed ad captum Tyronum minime compoſitum.

§. 2. Præclarum quoque in Chronologia opus eſt DIONYSII PETAVII *Doctrina Temporum*, *Pariſiis* An. 1627, in fol. primum edita; ſed An. 1703, tribus Tomis in fol. reg. (21 Alph. 7 plag.) Antverpiæ recuſa. Acceſſit editioni novæ integer Tomus tertius, in quo continentur *Uranologium ſive ſyſtema variorum auctorum, qui de Sphæra ac ſideribus eorumque motu Græce commentati ſunt*, An. 1630, ſeorſim editum; Libri VIII. variarum Diſſertationum Chronologiam illuſtrantium & Libri tres epiſtolarum. Nimirum in Uranologio continentur GEMINI Elementa Aſtronomiæ; PTOLEMÆI de Apparentiis inerrantium & ſignificationibus, cui Tractatui ſubjungitur Calendarium vetus Romanum, cum ortu occaſuque ſtellarum ex OVIDIO, COLUMELLA, PLINIO; ACHILLIS TATII Iſagoge ad ARATI Phænomena; Ejuſdem fragmenta a VICTORIO edita, quæ cum anterioribus eadem fere continent; HIPPARCHI BITHYNI ad ARATI & EUDOXI Phænomena Enarrationum libri tres; ARATI Genus & Vita; THEODORI GAZÆ liber de menſibus; S. MAXIMI Martyris Computus eccleſiaſticus; ISAACI Monachi Computus; S. ANDREÆ Hieroſolymitani methodus inveſtigandi Cycli ſolaris & lunaris, nec non Paſchatis. Ceterum paulo durius tractat SCALIGERUM, cui opus ſuum oppoſuit.

§. 3. Dogmata SCALIGERI ad faciliorem intelligentiam propoſuit SETHUS CALVISIUS, Cantor Lipſienſis, vir longe ultra ſortem ſui ſimilium eruditus, cujus *Introductio ad Chronologiam* ſæpius cum in 4. tum in folio recuſa.

§. 4. Triumviris iſtis jungi meretur JOANNES BAPTISTA RICCIOLUS in *Chronologia Reformata*, quæ *Bononiæ* An. 1669, in fol. prodiit (Alph. 11, plag. 18).

§. 5. Tyronibus inſerviunt DIONYSII PETAVII *Rationarium temporum* (*Moguntiæ* An. 1646, in 8. 2 Alph. 22 plag.), GUILIELMI BEVEREGII *Inſtitutiones Chronologicæ*, quæ cum *Arithmetica Chronologica* recuſa *Londini* An. 1705, in 4. (1 Alph. 11 plag.) & ÆGIDII STRAUCHII *Breviarium Chronologicum* (*Wittebergæ* An. 1664, in 12. 2 Alph. 10 plag.).

§. 6. Ad Chronologiam Hiſtoricam ſpectat opus ISAACI NEWTONI, quod *Londini* An. 1728, in 4. ſub titulo: *The Chronology of ancient Kingdoms amended* Alph. 2, plag. 4, Tabb. 3) prodiit, in quo agitur de Chronologia Græcorum, Ægyptiorum, Aſſyriorum, Babyloniorum & Medorum, atque Perſarum. Traditur etiam in eodem deſcriptio templi SALOMONIS. Cum nobis jam ſit negotium cum Chronologia mathematica; facile patet, Chronologiam NEWTONI non eſſe hujus

hujus loci. Ne tamen quis miretur, cur ejus nullam injecerimus mentionem, cum NEWTONUS inter Mathematicos ſummus emineat; eum ſilentio præterire noluimus. Singulares vero prorſus ſibique proprias de Chronologia antiquorum imperiorum fovet opiniones NEWTONUS, ita ut enormis detur inter ipſum & ceteros Chronologos diſſenſus. Quamobrem eodem adhuc anno, ARTHURUS BEDFORD idiomate patrio Animadverſiones in Chronologiam NEWTONI edebat *Londini* in 8. (plag. 15). Oſtendit autem, NEWTONUM e diametro eſſe adverſum ſcriptoribus ſacris: quæ adeo ratio eſſe videtur, cur ad eum confutandum adeo properaverit.

§. 7. Ad Calendariographiam ſpectant, quæ Tomo quinto operum CLAVII habentur (§. 24, cap. 1): SETHI CALVISII *Elenchus Calendarii Gregoriani* (*Franc. ad Mœn.* An. 1612, in 4. plag. 27); FRANCISCI VIETÆ *Relatio Calendarii vere Gregoriani & Calendarium Gregorianum perpetuum* (§. 25, cap. 1); BLONDELLI *Hiſtoria Calendarii Romani* Gallice conſcripta (*Pariſ.* An. 1682, in 4.); ERHARDI WEIGELII *Bürgerlicher Zeit-Spiegel*, ſeu ſpeculum temporis civile (*Jenæ* An. 1664, in 4. plag. 15), GUILIELMI BONJOUR *Calendarium Romanum* (*Romæ* An. 1701, in fol. 21 plag.) FRANCISCI BLANCHINI *Solutio Problematis paſchalis* (*Romæ* An. 1703, in 4. plag. 13, Tabb. 5); DOMINICI QUARTAIRONII *Reſponſiones ad aſſertiones* DOMINICI CASSINI *pro reformatione Calendarii Gregoriani* (*Romæ* 1703, in 4. plag. 4); EUSTACHII MANFREDII *epiſtola ad* QUARTAIRONIUM, *qua* CASSINI *aſſertiones* 16 vindicantur (*Venetiis* An. 1705, in 4. reg. plag. 8); THOMÆ PII MAPHÆI Opus *De Cyclorum Soli-Lunarium inconſtantia & emendatione* (*Venetiis* An. 1706, in 4. $1\frac{1}{2}$ Alph.).

§. 8. *Calendarium Judaicum* ex Hebræorum penetralibus cum verſione Latina edidit SEBASTIANUS MÜNSTERUS *Baſileæ* An. 1527, in 4. (1 Alph. 5 plag.); in quo computus Judæis uſitatus exponitur. *Rabbi* ORI Calendarium Palæſtinorum & univerſorum Judæorum ex Hebræo ſermone in Latinum vertit, & *Francof. ad Mœnum* publicavit JACOBUS CHRISTMANNUS, in Academia Heidelbergenſi Profeſſor An. 1594, in 4. (plag. 20).

§. 9. Inter veteres Geographos eminet PTOLEMÆUS, cujus *Geographiæ* libri octo, in quibus non modo traduntur ad Geographiam mathematicam ſpectantia, ſed inprimis etiam quæ ad hiſtoricam faciunt, *Baſileæ* prodiere plus ſimplici vice, e. gr. An. 1542, in fol. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 48). Inter compendia vero maxime celebre fuit JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus *de ſphæra*, ſæpius recuſus: in quem

poſt alios commentatus eſt Clavius (§. 24, cap. 1).

§. 10. Præſtantiſſimum in hoc ſcientiarum genere & fere unicum eſt Joannis Baptistæ Riccioli *Geographia & Hydrographia Reformata* (*Venetiis* An. 1662, in fol. 7 Alph. 17 plag.), ex quo Erhardus Weigelius ſcitu præ cæteris neceſſaria, in tyronum gratiam, in compendium miſit in ſpeculo Terræ, (*Erd-Spiegel*), quod vocat, patrio idiomate conſcripto, (*Jenæ* Anno 1665, in 4. 1 Alph. 3. plag.).

§. 11. Multa habet Ricciolus, quæ ad Geographiam proprie non ſpectant, ſed ab eo in eadem pertractantur, ne ea aliunde ſupponere habeat opus. Unde tyronum conatibus magis reſpondet *Geographia*, quæ in curſu Mathematico Millieti Dechales extat (§. 4, cap. 1).

§. 12. Ceterum applauſum Eruditorum dudum quoque meruit Bernhardi Varenii *Geographia generalis*, ſæpius recuſa. Elegans eſt editio *Cantabrigienſis* anni 1672, in 8, (1 Alph. 9 plag. Tabb. 5), juxta quam recuſa eſt *Jenæ* An. 1693, in 8. ſed præſtantiſſima omnium prodiit *Cantabrigiæ* An. 1712, in 8. reg. (1 Alph. 15 plag. 9 Tabb.) cum Appendice Jacobi Jurin, in qua nova habentur inventa, poſt obitum ſcilicet Varenii demum detecta. Varenio autem non ſolum mathematica, verum etiam phyſica curæ cordique ſunt.

§. 13. Laudantur quoque *Elementa Geographiæ generalis* Cl. J. G. Liebknecht Prof. Gieſſ. (*Franc.* An. 1712, in 8. 1 Alph. 10 plag. fig. plag. $3\frac{1}{8}$. Leonhardus Christophorus Sturmius vero in *Compendio Geographico*, quod idiomate vernaculo in gratiam tyronum *Francof.* An. 1705, in 8. edidit (plag. 10, Tabb. 5) praxin inprimis conficiendi mappas geographicas bene tradit, quamvis demonſtrationes omiſerit, utpote quæ non ſunt ad palatum tyronum.

§. 14. De *Hydrographia*, ſeu arte navigandi, commendatur Tractatus in Curſu mathematico Millieti Dechales (§. 4, cap. 1). Data opera omnium prolixiſſime ſcripſit de eadem Georgius Fournier e Societate Jeſu in *Hydrographia* Gallice edita *Pariſ.* An. 1653, in fol. (10 Alph. 10 plag.). Habebatur pro opere præſtantiſſimo in hoc genere: verum poſtea in Anglia prodiere libri complures de arte navigandi, qui præ illo commendari merentur.

§. 15. Jacobus Hodgson, Matheſeos in ſchola mathematica regia orphanotrophii ad S. Salvatorem conſcripſit *Theoriam navigationis demonſtratam*, in uſum Navigationis docendæ. Eam deinde multo auctiorem ſub titulo, *A ſyſtem of the Mathematicks*, hoc eſt, ſyſtema Matheſeos, *Londini* An. 1723, in 4. duobus Voluminibus (Alph. 7, plag. $19\frac{1}{2}$, Tabb. æn. 14, cum figuris mul-

multis ligno inciſis & textui inſertis) multo auctiorem recudi curavit. In hoc ſyſtemate ex Matheſi non traduntur, niſi quæ ad Navigationem rigide demonſtrandam faciunt & in ea uſum habent. Præmittuntur ex EUCLIDIS Elementis ſex prioribus, quæ ad hunc ſcopum conducunt, una cum Trigonometria plana ex inventis recentiorum plurimum illuſtrata. Reperies hic porro Trigonometriam ſphæricam, & doctrinam de projectione ſphæræ, tam ortographica, quam ſtereographica prolixe explicatam, quarum hæc ad ſolvenda problemata trigonometrica & aſtronomica applicatur. Ex Aſtronomia docentur, quæcumque uſui eſſe poſſunt in navigatione, veluti modus computandi appulſum Lunæ ad ſtellas fixas, & harum per illam occultationes, quarum in determinandis longitudinibus locorum uſus eſt. Inſeruntur novæ Tabulæ ſolares, quarum docetur conſtructio & uſus. Adduntur Tabulæ aliæ, quibus opus eſt in navigatione. Ipſa autem praxis Navigationis omnis perſpicue docetur, exemplis illuſtratur, & Theoriæ demonſtratæ ſuperſtruitur. Id nimirum egit Autor, ut ex ſuo opere Navigationis theoriam & praxin ſolide addiſcere liceat, & quæ ex reliqua Matheſi præſupponuntur aliunde hauriri non demum opus ſit.

§. 16. Anno 1715, HENRICUS WILSON, problemata nautica variis modis ſoluta dedit in Tractatu, quem ſub titulo: *Navigation new modell'd*, hoc eſt, Navigatio in novam formam redacta, *Londini* in 8. maj. (Alph. 1, plag. 12) publici juris fecit. Docet problemata iſta ſolvere 1. per conſtructiones geometricas triangulorum, in locum ſolutionum trigonometricarum ſurrogandas, 2. per calculum trigonometricum, & ope peculiarium Tabularum, ut calculo nullo ſit opus; 3. per calculum, qui canone ſinuum, tangentium, ſecantium & logarithmorum non habet opus, ſed tantummodo paucis quibuſdam numeris in Tabulam redactis; 4. ope circini & ſcalæ geometricæ; tandemque 5. per novam methodum a ſe inventam, qua problemata Trigonometriæ planæ ſine Tabulis ac inſtrumentis ſolvuntur. Navigationem primam geometricam, ſecundam trigonometricam, tertiam arithmeticam, quartam inſtrumentalem, quintam vero practicam appellat. Nullum adeo dubium eſt, quin hunc librum multo cum fructu legant, qui artem navigandi addiſcere cupiunt, modo ex ceteris partibus Matheſeos hauſta theoria fuerint inſtructi, quæ hic præſupponitur.

§. 17. Quoniam libri, qui magno numero de navigatione conſcripti ſunt, vel ſolam praxin tradunt, vel nimis diffuſi ſunt, nec levi pretio comparandi; ideo ARCHIBALDUS PATOUN praxin navigationis ex primis principiis demonſtratam ſub titulo: *A Compleat Treatiſe of practi-*

cal

cal navigation demonſtrated from its firſt Principles, una cum tabulis omnibus neceſſariis, *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 10, Tab. 1) edidit. Præmittit adeo ea, quæ ex Geometria, Trigonometria plana, Geographia, Aſtronomia & Chronologia perſpecta eſſe debent ei, qui artem navigandi penitus perſpicere voluerit.

§. 18. Eodem anno idiomate itidem Anglico *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 9) a GEORGIO GORDONIO publicata ſunt ex MSC. originali *Opera poſthuma* JOHANNIS WARDI. In horum parte prima, præmiſſis principiis Geometriæ & Trigonometriæ planæ, Navigatio explicatur, ubi nova quædam methodus ſimul proponitur ab Autore inventa; in parte autem ſecunda Trigonometria ſphærica traditur, ubi ſimul ſphæræ projectio, tam orthographica, quam ſtereographica explicatur. Ad demonſtrationes illius facilius percipiendas ſchemata ita conſtruxit, ut caſus ſinguli in ſolido repræſentari poſſint; quo artificio etiam uſus eſt JOANNES KEILL in *Trigonometria*, quam EUCLIDIS Elementis ex verſione COMMANDINI a ſe editis ſubjunxit.

§. 19. Apud Batavos de arte navigandi Tractatum conſcripſit WILLEBRORDUS SNELLIUS, qui ſub titulo: *Tiphys Batavus, ſive Hiſtiodromice de navium curſibus & re navali, Lugduni Batavorum* An. 1624, in 4 Alph. 1, plag. 7) prodiit. De Loxodromia accuratas affert demonſtrationes quæ hactenus deſiderabantur. Theoriam tradit libro primo; praxin ſecundo.

§. 20. Inter problemata vexata refertur problema de invenienda longitudine maris, quod hactenus multum exercuit ingenia Mathematicorum, irrito ſucceſſu ſolutionem ejus aggreſſorum. Nimis prolixum foret recenſere tentamina, quæ publice deſcripta proſtant. Non tamen poſſumus, quin mentionem injiciamus Autoris cujuſdam perſonati DOROTHEI ALIMARI, Mathematici (ſi credimus) Veneti, cujus *Methodus longitudinis aut terra, aut mari inveſtigandæ, adjectis demonſtrationibus & inſtrumentorum Iconiſmis, Londini* An. 1715, in 8. (plag. 13, Tabb. 4) prodiit. Etſi enim ea non ſatisfaciat, continentur tamen in hoc Tractatu quæ legi merentur.

§. 21. Pars nauticæ difficillima eſt manuaria nautica, quia reconditam Geometriæ ſublimioris notitiam ſupponit. Agit autem manuaria nautica de diſpoſitione velorum, gubernaculi & navis. Equidem Vir & generis nobilitate, & experientia maritima præſtans RENAU An. 1689, libellum de ea ediderat; ſed mox HUGENIUS principium ejus unum, dein ex intervallo celeberrimus BERNOULLIUS alterum impugnavit, & theoriam aliam ſubſtituit in Tentamine novæ theoriæ nauticæ, quæ

idio-

idiomate Gallico ſub titulo : *Eſſai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux*, una cum epiſtolis nonnullis de eadem materia perſcriptis, *Baſileæ* An. 1714, in 8. reg. (plag. 15, Tabb. 10) prodiit. Theoriam hujus artis ad praxin aptare ſtuduit PITOTUS in libro Gallice conſcripto, qui ſub titulo : *Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux reduite en Pratique*, *Pariſiis* in 4. An. 1731, prodiit.

§. 22. Ad Geographiæ potiſſimum perfectionem tendunt *Obſervationes Mathematicæ & Phyſicæ in India & China factæ a R. P.* FRANCISCO NOEL, *e Societate Jeſu ab* An. 1684, uſque ad An. 1708, (*Pragæ* 1710, in 4. plag. 17, Tabb. 2) & *Obſervationes* argumenti ſimilis *a R. P.* FRANCISCO FEUILLE'E *juſſu Regis Chriſtianiſſimi in regionibus potiſſimum Auſtralibus factæ*, de quibus ſupra (§. 9, cap. 9). Summæ harum obſervationum leguntur in Actis Eruditorum Lipſienſibus.

§. 23. Commemorandi hic denique ſunt Autores, qui in magnitudinem & figuram Telluris inquiſiverunt. Laudandus hic nobis WILLEBRORDUS SNELLIUS, cujus *Eratoſthenes Batavus de Terræ ambitus vera quantitate*, *Lugduni Batavorum* An. 1617, in 4. (Alph. 1, plag. 11½) prodiit. Sed errores quoſdam in metiendis angulis, tum & in calculo admiſit, quos ipſe agnovit : Unde obſervationes repetiit & in MSC. correctas reliquit. Emendationes videre licet in *Diſſertatione de magnitudine Terræ* PETRI VAN MUSCHENBROEK, Mathematum Profeſſor in Academia Ultrajectina, quæ legitur in opere *Diſſertationum phyſicarum experimentalium & geometricarum de magnete, tuborum capillarium vitreorumque ſpeculorum attractione, magnitudine Terræ, cohærentia corporum firmorum*, *Lugduni Batavorum* An. 1729. in 4 reg. edito p. 354, & ſeqq.

§. 24. In Gallia feliciori ſucceſſu laborem hunc exantlatus eſt PICARDUS, poſtea continuatus a CASSINO. Menſurationem PICARDI videre licet in Tractatu, quem ex ſermone Gallico in Anglicum tranſtulit RICHARDUS WALLER & *Londini* ſub titulo : *The Meaſure of the Earth* 1688, (plag. 6, Tabb. 4), edidit, tum in Commentariis Academiæ Regiæ ſcientiarum Pariſinæ ab An. *1666*, uſque ad An. *1699*, Tom. 7, *Caſſinianam* vero in Commentariis An. 1718.

§. 25. Quoniam per menſurationes *Caſſinianas* alia prodibat figura Telluris, quam per demonſtrationes NEWTONI atque HUGENII; ideo juſſu Regis Chriſtianiſſimi DE MAUPERTUIS cum Sociis, ſummo cum ſtudio & pluſquam Herculeo labore, gradum Meridiani prope circulum polarem dimenſus eſt aliaſque obſervationes huic inſtituto inſervientes inſtituit. Legatur Tractatus, quem *Pariſiis* An. 1738, in 8. edidit (plag. 13, Tabb. 10). Obſervationibus hiſce

exactiſſimis figura Telluris confirmatur *Newtoniana & Hugeniana*. Conſtat juſſu Regis Chriſtianiſſimi eodem fine miſſos eſſe Mathematicos in regnum Peruvianum, qui ubi redierint, cum publico dubio procul communicabunt abſque mora ſuas quoque obſervationes.

§. 26. Theoriam atque praxin Gnomonicam more veterum rigidiſſime, ſed adeo intricate demonſtravit CHRISTOPHORUS CLAVIUS (§. 24, cap. 1) ut vix credibile ſit, ullum unquam ejus demonſtrationes omnes perlegiſſe. Faciliores vero exhibent DECHALES atque OZANAM in curſibus (§. 4, 7, cap. 1).

§. 27. Demonſtrationes quoque affert GUARINUS GUARINI in parte poſteriore *Mathematicæ cœleſtis* (*Mediol.* An. 1683, in fol. 1 Alph. 3. plag.). Pars prior, quæ una cum poſteriore prodiit (7 Alph. 5. plag.) integram Aſtronomiam complectitur.

§. 28. Novam methodum horologia ſolaria magna conficiendi, lineis horariis per calculum determinatis, invenit PICARDUS, quæ in Operibus Mathematicis Academicorum Gallicorum (§. 31, cap. 1) legitur. Et Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in ſua *Gnomonica*, quam patrio ſermone *Pariſiis* 1683, in 12. reg. publici juris fecit, methodum Geometricam expoſuit, ex quibuſdam punctis per obſervationem determinatis lineas horarias ducendi.

§. 29. Anno 1625, EBERHARDUS WELPERUS, Artium Magiſter, *Argentorati* propriis ſumtibus typis deſcribi curavit ſuum de *Gnomonica* tractatum vernaculum in 4. (plag. 8) in quo ex facili fundamento horologia in planis primariis deſcribere docet. Idem fundamentum jam antea perſpicue expoſuit eodemque in deſcribendis horologiis uſus eſt SEBASTIANUS MUNSTERUS in *Rudimentis Mathematicis*, quorum liber prior prima elementa Geometriæ, poſterior omnigenum horologiorum genus delineare docet. (*Baſileæ* An. 1551, in fol. 2 Alph. 20. plag.).

§. 30. WELPERI Gnomonicam An. 1672, *Norimb.* in 4. (plag. 21, Fig. plag. 14½) recudi curavit & integra parte ſecunda de horologiis inclinatis & declinatis, ac figuris Zodiacalibus, arcubuſque diurnis, & horis varii generis inſcribendis auxit, notiſque partem primam illuſtravit JOH. CHRISTOPHORUS STURMIUS, Math. Prof. Altorfinus. Addidit An. 1681. (*Norimbergæ* in 4. plag. 19, Fig. plag. 9) partem tertiam de horologiis reflexis & portatilibus. Eadem Gnomonica cum inſigni augmento *Sturmiano* denuo recuſa *Norimbergæ* An. 1708, in fol. (2 Alph. 16. plag. Tabb. 35). Acceſſit vero pars quarta, in qua methodi, *Picardiana & Lahiriana*, magna horologia deſcribendi exponuntur (§. 28). In hoc adeo opere plura continentur, quam ullibi in unum volumen con-

congeſta reperire licet, ita ut inſtar omnium eſſe poſſit, niſi quis demonſtrationes exaſciatas praxium deſideret, theoriæ magis, quam praxi intentus. Appendicis quoque loco adjicitur Tractatus de horologiis automatis ex Anglico in Germanicum ſermonem translatus, quemadmodum jam ſupra monuimus (§. 26, cap. 6.).

§. 31. Commendandum hic quoque eſt opus de horologiis majoribus delineandis, methodo univerſali, quod debetur J. G. DOPPELMAYERO, Matheſeos Profeſſori Norimbergenſi, & ſub titulo: *Neue und gründliche Anweiſung*, wie *nach einer Univerſal-Methode groſſe Sonnen-Uhren aus einem arithmetiſchen und geometriſchen Fundament zu zeichnen*, *Norimbergæ* An. 1719, in fol. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. 20) prodiit. Quodſi idem cum noviſſima & auctiori Gnomonica *Welperiana* conjungas, vix eſt ut quicquam in praxi Gnomonica, ſive utilitatem, ſive curioſitatem ſpectes, amplius deſideres. Ceterum ALEXANDER in eximio de horologiis Tractatu egregiam quoque tradit methodum horologia majora ſolaria accurate in quovis pariete delineandi (§. 26, cap. 6.)

§. 32. Solas praxes tradunt JOHANNES PETERSON STENGEL in *Gnomonica univerſali*, idiomate vernaculo (*Ulmæ* An. 1706, in 8. plag. 18, Tabb. 109) edita, rerum varietate commendanda, GEORGIUS MICHAELIS in *Praxi Gnomonica* Germanice An. 1701, *Jenæ* in 8. edita (12 plag. fig. æn. plag. 1½), qui tamen tantum communiora exponit; JOH. ULRICUS MULLER in *Indice horarum infallibili* Germanice itidem *Ulmæ* An. 1702, in 8. edito (1 Alph. plag. 9, Fig. æn. plag. 9) & HENRICUS COETSIUS in *Horologiographia plana* (*Lugd. Batav.* An. 1689, in 4. plag. 12, Tabb. 20), qui tamen inſcriptiones ſignorum & arcuum diurnorum negligit, nec ad horologia portatilia deſcendit.

§. 33. Anno 1711, *Auguſtæ Vindelicorum* in 4. (2½ Alph. Tabb. æn. 21¼ plag.) prodiit JOHANNIS GAUPPENII *Gnomonica Mechanica univerſalis*, ſermone vernaculo in eorum gratiam conſcripta, qui in theoria Mathematica parum verſati. Inſeruit operi ſuo Tractatum brevem, quem HENRICUS BIERUM, Architectus militaris, An. 1676, (plag. 4) ediderat, & ejus fundamento mechanice deſcribendi horologia utitur. Rerum varietate commendatur iis, qui variis horologiorum ſolarium generibus conficiendis delectantur.

§. 34. Eodem fundamento nititur JOHANNES JACOBUS SCHEUBLERUS in libro Germanico, qui ſub titulo: *Neue und deutliche Anleitung zur practiſchen Sonnen-Uhr-Kunſt*, *Norimbergæ* An. 1726, in 8. reg. (plag. 14, Tabb. 44) prodiit, & ubi inter alia ornamenta, quibus horologia ſolaria parietibus inſcripta circumſcribi poſſunt, delineat. Alias jam

initio ſeculi præteriti CASPARUS UTTENHŒFER, civis Norimbergenſis, Pedem Mechanicum invenit, cujus ope horologia ſolaria mechanice delineari poſſunt. Deſcriptionis editio altera auctior prodiit *Norimbergæ* An. 1620, in 4. (plag. 7).

§. 35. Horologiorum ſolarium omnis generis, præſertim portatilium, deſcriptionem etiam tradit NICOLAUS BION in opere Gallico *De conſtructione & præcipuis uſibus inſtrumentorum mathematicorum* (*Pariſiis* An. 1709, in 8. reg. 1 Alph. Tabb. 28), quod unicum fere in hoc genere a J. G. DOPPELMAYERO Prof. Math. Noribergenſi ex Gallico in Germanicum ſermonem verti meruit (*Noribergæ* An. 1712, in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 28).

§. 36. Commendari quoque merentur Machinæ duæ, quæ pro deſcribendis horologiis ſolaribus publicavit aliquoties jam citatus IGNATIUS GASTON PARDIES (*Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. 2 plag.). In hac editione tertia ſubjunguntur Elementis Staticæ.

§. 37. Methodum trigonometricam deſcribendi horologia ſolaria excoluit BERNARDUS GRUBER, S. Ordinis Ciſtercienſis in Monaſterio B. V. Mariæ de Alto Vado Profeſſus, in Collegio Archiepiſcopali Pragæ A. L. L. & Philoſophiæ Profeſſor, in *Horographia trigonometrica*, ſeu *Methodo accuratiſſima arithmetice per ſinus & tangentes horologia quævis ſolaria in plano ſtabili qualitercunque ſituato, etiam declinante & ſimul inclinato, facile negotio deſcribendi, & quædam alia, quæ vialia dicuntur, expoſitis eorundem fundamentis & rationibus*, *Vetero-Pragæ* An. 1718, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 11) edidit. Idem inſtitutum fuit BENEDICTI MARIÆ CASTRONII, Ordinis Prædicatorum ac Panormi Matheſeos Profeſſoris, qui *Horographiam univerſalem*, *ſeu Sciatericorum omnium planorum, gnomonice nova methodo deſcribendorum, pro quovis horologio ſive aſtronomico, ſive Italico, ſive Babylonico, ſive Judaico doctrinam uniformem atque univerſalem, ſola triangulorum analyſi breviter expoſitam, cum Iſagogicis nonnullis Mathematum & triplici Appendice de nautica ſcientia, de militari Architectura, ac de temporum Janua*, *Panormi* An. 1728, in fol. (Alph. 4, plag. 10, Tabb. 19) edidit. Temporum Januam vocat Calendarium quoddam perpetuum, Januæ formam præ ſe ferens, quod a ſe inventum. Tenendum hic eſt methodum trigonometricam, quæ & arithmetica dici ſolet, in Gnomonica præferendam eſſe geometricæ, cum hæc facilius errori obnoxia fiat, qui per illam evitari poteſt.

§. 38. Quoniam non cujuſvis eſt per calculum trigonometricum eruere numeros, quibus in deſcribendis horologiis ſolaribus opus eſt; ideo JOANNES LUDOVICUS QUADRI, Academiæ Inſtituti ſcientiarum Bononienſis

nienſis adſcriptus idiomate Italico *Bononiæ* An. 1733, in 4. (Alph. 1, plag. 5. Tabb. 6) edidit *Tabulas Gnomonicas delineationi Horologiorum ſciatericorum inſervientes*; quæ conſentiunt cum horologiis Italicis, ſonitu campanæ pulſæ horas indicantibus: ut adeo Italorum tantummodo uſui deſtinentur. Dederat jam ante iſtiuſmodi Tabulas in Italia P. ANGELUS MARIA COLOMBONUS & apud Noſtros JO. GAUPPIUS in *Gnomonica mechanica* (§. 33) & BERNARDUS GRUBER in Horographia trigonometrica modo laudata (§. 37). Edidit quoque Tabulas Gnomonicas, ſed pro horarum quovis genere, ſub titulo *Deliciarum mathematicarum*, ſermone patrio, una cum brevi deſcriptione praxeos univerſæ Geometriæ & Trigonometriæ tam ſphæricæ, quam planæ, quæſtionibuſque & problematibus aſtronomicis chronologiciſque ad Calendarium eccleſiaſticum pertinentibus, ope tabularum logarithmicarum facili modo ſolvendis, *Romæ* An. 1730, in 4. reg. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 14).

§. 39. Hic denique commemorare lubet ADRIANI METII, Med. D. & Matheſeos Profeſſoris in Academia Friſiorum, *Primum mobile aſtronomice, ſciographice, geometrice & hydrographice nova methodo explicatum.* Prodiit editio nova ab innumeris mendis vendicata & inſtrumentis mathematicis aucta a GUILIELMO BLAEU *Amſteledami* An. 1633, in 4. (Tomus I, Alph. 2. Tom. II, Alph. 1, plag. 12. Tom. III, Alph. 1, plag. 10. Tom. IV, plag. 20). Primo exponitur doctrina Sphærica, Gnomonica & Geographica; ſecundo continetur accurata deſcriptio Aſtrolabii utriuſque & ejus uſus, una cum Trigonometria ſphærica; tertio ſolvuntur problemata primi mobilis per aſtrolabium, Trigonometriam ſphæricam & Tabulas Aſtronomicas; quarto denique problemata primi mobilis geometrice delineantur & arithmetice ſolvuntur, atque Tabulæ geographicæ & hydrographicæ deſcribuntur, & per eaſdem, tumque per Canones ex ſecantibus conflatos, Ars navigandi abſolvitur.

CAPUT XI.

De Architectura Civili.

§. 1. INtegram Architecturam civilem tradidit VITRUVIUS, qui ſub AUGUSTO floruit, cui decem *De Architectura* libros dedicavit. Optima editio Latina prodiit *Amſtelodami* An. 1649, in fol. (6 Alph.).

Acceſſere huic editioni novæ caſtigationes & obſervationes GUIL. PHILANDRI integræ, DANIELIS BARBARI & CLAUDII SALMASII excerptæ & paſſim inſertæ. Præmittuntur *Elementa Architecturæ* HENRICI WOTTONI, Equitis Angli: ſubjiciuntur *Lexicon Vitruvianum* BERNHARDI BALDI, ejuſdem *Scamilli impares Vitruviani*, *De pictura* libri tres LEONIS BAPTISTÆ DE ALBERTIS, *De ſculptura* excerpta ex Dialogo POMPONII GAURICI & Commentarius *De ſculptura & pictura* LUDOVICI DEMONTIOSII.

§. 2. Reprehendunt in egregio alias opere *Vitruviano*, quod nullum ordinem tenuerit; quod obſcure ſcripſerit, nempe judice LEONE BAPTISTA DE ALBERTIS (*a*) Græcis Latine & Latinis Græce; quod denique multa ſuperflua ac aliena immiſcuerit. Hinc PERRAULT, quemadmodum olim ſuaſerat PHILIBERTUS DE L'ORME, regulas Architectonicas Vitruvianas ex opere prolixo excerpſit & in ordinem redactas ſub titulo: *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* publici juris fecit (*Amſtelodami* An. 1681, in 8. 16½ plag. & fig. æn. plag. 1½). Textum obſcurum VITRUVII in verſione Germanica, & adjecta ſingulis capitibus paraphraſi clariorem reddidit D. GUALT. H. RIVIUS. Recuſa eſt hæc verſio *Baſileæ* An. 1614, in fol. (7 Alph. 2 plag.). In paraphraſi ſeu Commentario, ſi mavis, more *Vitruviano*, multa aliena admiſcuit. Magis commendanda eſt verſio Gallica, quam primum An. 1673, typis deſcribi, ſed An. 1684, auctiorem & emendatiorem recudi curavit PERRAULT adjectis notis ſelectis & figuris æri nitidiſſime inciſis (*Pariſiis* in fol. reg. 4 Alph. 5 plag.). Idem PERRAULT opus præclarum de Ordinibus An. 1684, in fol. addidit ſub titulo: *Ordonnance des cinq eſpéces de Colonnes ſelon la méthode des anciens*, in quo præjudicia Architectorum refellit & quod inſtar ſupplementi Architecturæ VITRUVII haberi poteſt, qui doctrinam de Ordinibus imperfectam tradidit.

§. 3. Poſt VITRUVIUM libros decem *De re ædificatoria* edidit LEO BAPTISTA DE ALBERTIS aliquoties recuſos & ex idiomate Latino in varias Linguas translatos. Prodiit Latine *Pariſiis* An. 1512, in 4. (2 Alph.) & *Florentiæ* An. 1585. Italice lucem adſpexit *Venetiis* An. 1546, in 8. (1 Alph. 9½ plag.); Gallice An. 1553. Multa habet utilia; ſed VITRUVIO, quemadmodum intenderat, palmam præripere non potuit. Doctrinam de Ordinibus non ſatis perfectam tradidit.

§. 4. Mox ſecuti ſunt SEBASTIANUS SERLIUS & ANDREAS PALLADIUS coætanei, quorum ille ſeptem, hic quatuor *De Architectura* libros

(*a*) Lib. 6. cap. 1. de re ædificatoria pag. 80. & ſeq.

bros compoſuit. Architecturæ *Serlianæ* libri quinque Italice *Venetiis* An. 1602, in fol. Germanice, *Baſileæ* An. 1609, in fol. (4 Alph. 13 plag.) prodiere. Quinque tantum ordines cum variis ædificiorum generibus deſcribit; regulas ex VITRUVIO ſupponit, a quibus recedere religioni duxit. Vid. lib. 3, f. 46, edit. Venetæ. Liber ſextus de ædificiis privatis in publicum nondum prodiit: Septimum de ædificiis publicis JACOBUS STRADA Latine & Gallice *Francofurti* An. 1575, in fol. imprimi curavit.

§. 5. PALLADIUS hanc laudem meruit, quod ſplendorem ordinibus ac operibus ſuis conciliaverit. Libro primo regulas fundamentales Architecturæ tradidit; reliquis varia ædificiorum & operum architectonicorum genera delineavit. Commendatur Architecturæ purioris ſtudioſis. Prodiere libri omnes Italice An. 1575, in fol. recuſi anno ſuperiore An. 1714, *Venetiis* in fol. adjecto ipſius de Antiquitatibus Romanis tractatu. Libros duos priores GEORGIUS ANDREAS BOECKLER, Germanice vertit & multis annotationibus auxit (*Norimbergæ* 1689, in fol. 1 Alph. 3 plag. Tabb. 88). Idem PALLADIUS ſcripſit *de Templis Romanis* (An. 1554, in 8).

§. 6. PHILIBERTUS DE L'ORME, Caroli IX. Conſiliarius, Eleemoſinarius & Architectus An. 1567, *Pariſiis* in fol. edidit novem *De Architectura* libros idiomate vernaculo. Architecturæ peritia adeo celebris erat, ut ad excitanda palatia Principum ex Gallia in exteras regiones evocaretur.

§. 7. JACOBUS BAROZZIUS VIGNOLA An. 1631, Italice de quinque ordinibus ſcripſit, cujus liber in varias linguas translatus. Utor ego editione Gallica, quæ ſub titulo: *Régles des cinq Ordres d'Architecture de* J. B. DE VIGNOLE, *avec pluſieurs augmentations de* MICHEL ANGE-BUONAROTI, cura DURÆI DE CHAMPDORE', *Lugduni Batavorum* An. 1712, in 8. prodiit (plag. $9\frac{1}{2}$). Eundem prolixis additamentis locupletavit DAVILER & idiomate Gallico Pariſiis in 4. edidit cum Lexico Architectonico. Mox recuſum eſt opus ſub titulo: *Cours d'Architecture, qui comprend les Ordres de* VIGNOLE, *avec des Commentaires, les figures & deſcriptions des plus beaux bâtimens & de ceux de* MICHEL ANGE *&c. Amſtelodami* An. 1694, in 4. (3 Alph. 20 plag. Tabb. 103, magnam partem textui inſertæ). LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS Germanice vertit & notis quibuſdam auctum, omiſſo Lexico, *Amſtelodami* An. 1699, in 4. (2 Alph.) edidit, figuram plagulis $3\frac{1}{2}$, adjectis ultra eas, quæ in editione Gallica habentur. Prodiit nuper nova editio Gallica *Pariſiis* in 4. auctior. Laudatur ob facilitatem & perſpicuitatem. Unde omnibus fere ſeſe probavit, qui praxi operam dant.

§. 8. VIN-

§. 8. VINCENTIUS SCAMOZZI An. 1615, Venetiis ſermone patrio edidit librum primum, ſecundum, tertium, ſextum & ſeptimum *Ideæ Architecturæ univerſalis* in fol. Præſtantiſſima editio eſt, quæ idiomate Gallico *Lugd. Batav.* An. 1713, in fol. reg. (3 Alph. 5. plag. Tabb. 105, quarum 84 textui inſertæ) ſub titulo: *Oeuvres d'Architecture de* VINCENT SCAMOZZI prodiit. Liber ſextus & tertius Germanice verſus ſub titulo: *Klärliche Beſcreibung der fünf Säulen-Ordnungen und der gantzen Bau-Kunſt. Norimbergæ* An. 1697, in fol. (2 Alph. 6 plag. Tabb. 85) lucem adſpexit. Laudatur, quod Symmetriam unus omnium optime excoluerit, ſed intricate ſcribit.

§. 9. CAROLUS PHILIPPUS DIEUSSART in *Theatro Architecturæ civilis*, quod vernaculo ſermone *Bambergæ* An. 1697, in fol. reg. (1 Alph. 3 plag. Tabb. 95) prodiit, non modo regulas Architectonicas explicavit, verum etiam Ordines juxta inſtitutum PALLADII, VIGNOLÆ, SCAMOZZI, PETRI CATANEI, SEBASTIANI SERLII & BRANCÆ inter ſe comparavit: quod idem executus eſt ante ipſum ROL. FREARD DE CHAMBRAY in *Paralleliſmo Architectonico* Gallice *Pariſiis* An. 1650, in fol. publicato. Et poſtea idem fecit LE BLOND in Libro ſub titulo: *Parallele des V. Ordres d'Architecture*, *Pariſiis* An. 1710, in 4. edito. Plurium quoque Architectorum Ordines inter ſe confert JOHANNES CHRISTIANUS SEYLER, in *Parallelifmo Architectonico* Germanice *Lipſiæ* in fol. edito.

§. 10. FRANCISCUS BLONDEL in *Curſu Architecturæ* Gallico (*Pariſiis* An. 1698, in fol. reg. 8. Alph. 14. plag. Tabb. 24, cum figuris plurimis textui inſertis) parte prima Ordines VITRUVII, VIGNOLÆ, PALLADII & SCAMOZZI explicat; in ceteris quatuor ex omnium Architectorum celebrium ſcriptis congeſſit, quicquid circa ordinum uſum notatu dignum occurrit. Habentur etiam in eodem alia nonnulla ad Architecturam ſpectantia, v. gr. de feneſtris & ſcalis. Curſus hujus aliquid jam 1675 prodierat. Ea potiſſimum explicare intendit, quæ ad ornatum ædificiorum faciunt.

§. 11. NICOLAUS GOLDMANNUS, Vratislavienſis, in Tractatu *de Stylometris* (*Lugd. Batav.* An. 1661, fol. Lat. & Germ. 9. plag. Tabb. 40) oſtendit, quomodo Ordines Architectonici ab ipſo ad majorem perfectionis gradum deducti ope peculiarium quorundam inſtrumentorum facile delineari poſſint: quorum & conſtructionem, & uſum docet, textui Latino ad latus adjecta verſione Germanica. In opere vero Architectonico, quod LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS ſub titulo: *Vollſtändige Anweiſung zu der Civil-Bau-Kunſt* (*Guelpherbyti* An. 1696, in fol. reg. 2 Alph. 4 plag.

Tabb.

Tabb. 74) publici juris fecit, præter Ordinum doctrinam, magna dexteritate tradidit quicquid in VITRUVII, & Architectorum Italorum ſcriptis atque VILALPANDI Commentario in Prophetam Ezechielem, ex quo ſe plura didiciſſe ait, quam ex Architectorum ceterorum omnium ſcriptis, boni continetur : ita ut hoc opus ceteris omnibus præferatur. Cl. Editor An. 1699, Appendicem ſub titulo : *Ausübung der Civil-Bau-Kunſt des Goldmanns*, in fol. (1 Alph. 14 plag. Tabb. 19) adjecit, in quibus ex aliis ſupplet, quæ in eo ſcitu neceſſaria deſiderantur. Ordinem quoque ſextum, quem Germanicum appellat, proponit ; ſed hactenus in uſum non receptum. Fallitur autem plurimum editor, dum ſibi aliiſque perſuadere vult, GOLDMANNUM regulas Architecturæ demonſtraſſe & eam in formam ſcientiæ redegiſſe. Plura ad operis hujus illuſtrationem poſthac edidit STURMIUS, qui Architecturæ totus erat deditus. Sed de his dicemus mox apertius.

§. 12. DOMINICUS DE ROSSI in *Studio Architecturæ civilis in ornamentis portarum & feneſtrarum, delineatis ex inſignioribus Romæ ædificiis* An. 1702, ſeu potius 1712, *Romæ* in fol. reg. edito figuris æneis 143, celeberrimorum Architectorum monumenta circa ornatum portarum & feneſtrarum repræſentat. *Auguſtæ Vindelicorum* figuris ad minorem modulum reductis recuſum eſt hoc opus, ut facilius & minori ſumtu comparari poſſit. Plurima tamen habet, quæ imitari non licet, niſi a puritate Architecturæ Græcorum recedere velis.

§. 13. Ad eam perſpiciendam inſervit opus, quod ANTONIUS DESGODETZ, qui ædificia antiqua Romæ ex ruderibus nitidiſſime delineavit, ſub Titulo : *Edifices antiques de Rome* (*Pariſiis* An. 1697, in fol. (3 Alph. 17 plag.) edidit.

§. 14. JOHANNES BALTHASAR LAUTERBACH in *Compendio Architecturæ* (*Amſtelodami* An. 1699, in 8. Gall. 2 plag. Tabb. 18) ordines Architectonicos delineandi methodum facillimam proponit.

§. 15. In *Gallia* An. 1728, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 19½ Tabb. 150) prodiit opus architectonicum ſub titulo : *Architecture moderne, ou l'Art de bien bâtir pour toutes ſortes de Perſonnes, tant pour les Maiſons des particuliers, que pour les Palais.* Explicantur ſatis perſpicue omnia, quæ ad exſtructionem ædificiorum omnis generis ſcitu neceſſaria, excepta doctrina de Ordinibus, quæ aliunde nota ſupponitur. Maximam operis partem complent omnis generis ædificiorum delineationes, quibus doctrina de diſtributione ædificiorum illuſtratur, vulgo vel neglecta, vel ſaltem nonniſi levi brachio pertractata. Commendatur etiam Tractatus de Architectura, quem LE MUET in 4 edidit, inventiones quaſdam novas continens ; ſed nobis non viſus.

§. 16. Ædificia magnifica, cura Petri Post Architecti inſignis, paſſim per Bataviam exſtructa accurate deſcribuntur, tum quoad ichnographiam, tum quoad orthographiam cum externam, tum internam in opere ſplendido, quod ſub titulo: *Les Oeuvres d'Architecture de* Pierre Post, *Lugd. Batav.* An. 1715, in fol. reg. (plag. 22, Tabb. 75) prodiit. Orthographiæ externæ & ichnographiæ ædificiorum, quæ in Batavia extruxit Philippus Vingboon, Architectus Amſtelodamenſis, exhibentur in alio opere, quod ſub titulo: *Les nouvelles Oeuvres d'Architecture de* Philippe Vingboons *Lugduni Batav.* An. 1715, in fol. reg. (plag. 11, Tabb. 80) lucem adſpexit.

§. 17. Villas Veterum, in quibus deſcribendis admodum parcus eſt Vitruvius, idiomate Anglico plenius deſcripſit Robertus Castellus & ſub titulo: *The Villa's of the Ancients illuſtrated*, *Londini* ſuis ſumtibus in fol. (Alph. 1, plag. 12, Tabb. 11) edidit. *De Amphitheatris* vero & præcipue Veronenſi libros duos idiomate Italico *Veronæ* 1718, in 12, (plag. 15, Fig. æn. 15) edidit Scipio Maffeius, in quo non minus ea, quæ ad hiſtoriam, quam architecturam eorundem pertinent, exponuntur. Formam minorem elegit autor ob commodiorem uſum in ruderibus eorundem perluſtrandis.

§. 18. Anno 1721, *Viennæ Auſtriæ* in fol. reg. (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 93) prodiit opus ſplendidiſſimum Johannis Bernhardi Fischeri ab Erlachen, S. Cæſareæ Majeſtatis Architecti primarii, ſub titulo: *Entwurff einer hiſtoriſchen Architectur*, hoc eſt, Speciminis Architecturæ hiſtoricæ, ſumtibus Autoris, in quo varia exhibentur ædificia, quæ ab antiquis hiſtoricis celebrantur, vel hodienum apud exteras gentes conſpiciuntur, æri nitidiſſime inſculpta. Textui Germanico adjicitur verſio Gallica, ut exterorum quoque uſui inſerviat.

§. 19. In *Opere architectonico* Francisci Borromini, Patrum Congregationis Oratorii, quod Romæ eſt, Architecti, deſcribuntur Oratorium Ædeſque Romanæ P. P. Congregationis Oratorii S. *Philippi Neri*. Prodiit *Romæ* An. 1725, in fol. (plag. 8, Tabb. 67).

§. 20. In *Schola* vero *civili Architectura*, quam Ferdinandus Ruggieri, Architectus Italus, idiomate patrio *Florentiæ* An. 1722, in fol. reg. (Tabb. 80) edidit, præmiſſa præfatione & dedicatione cum indice contentorum, exhibentur ornamenta januarum & feneſtrarum cum menſuris, ichnographia, orthographia & ſectionibus verticalibus e potioribus Florentiæ ædificiis deſumta, quæ a celeberrimis Italiæ Architectis extructa eſſe conſtat, ita ut nulla per totam Italiam occurrat urbs, quæ ædificiis ſe magis commendet Florentia.

§. 21. Non

§. 21. Non exiguus eſt numerus illorum ſcriptorum, quæ illuſtrandæ Architecturæ *Goldmanniæ* cauſa reliquit LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS & quæ poſt fata ipſius *Auguſtæ Vindelicorum* impenſis Chalcographi Auguſtani JEREMIÆ WOLFII lucem adſpexerunt. Eorum argumentum ex ipſo titulo comparet, quos hic ex Germanico in Latinum verſos exhibere lubet. *Nimirum* An. 1718, in fol. (plag. 8, Tabb. 11) lucem adſpexerunt *Idea & compendium Architecturæ Civilis*, explicationem terminorum technicorum & præcipuarum regularum exhibens; An. 1717, (plag. 17, Tabb. 17) *Officina ornatus architectonici perfecta*, in qua ordines architectonici juxta GOLDMANNUM, cujus inſignia in hoc genere merita, deſcribuntur; An. 1730, (plag. 4½, Tabb. 10) *Regulæ ſymmetriæ*, eæque in Architectura templi Salomonæi conſpicuæ & ab eodem mutuo in noſtra opera tranſſumtæ; An. 1718 (plag. 4½, Tabb. 9) *Tractatio de arcuationibus architectonicis triumphalibuſque arcubus rite deſignandis*; An. 1720, (plag. 3, Tabb. 17) *Inſtitutio de interioribus ædificiorum rite ordinandis & diſponendis*, ubi etiam de aperturis feneſtrarum & januarum, & de caminis, ſcalis, cœlis conclavium, aulis ſubdialibus præcepta reperiuntur. Anno eodem (plag. 4½, Tabb. 5) *Inſtitutio Goldmanniana de ornatu architectonico extraordinario* veluti picturis, quibus ædificia exornantur, ſtatuis & ſculpturis, obeliſcis, encarpis, cornibus Amaltheæ &c. An. 1715, (plag. 4, Tabb. 15) *Inſtitutio de commoda diſpoſitione ædium privatarum & civilium*; An eodem (plag. 5, Tabb. 8) *De ſuburbanis & nobilium ædibus in agris*; An. 1718, (plag. 21, Tabb. 35) *De conſtruendis palatiis Principum* ad Architecturæ regulas & genium ſeculi noſtri; An. eodem (plag. 6, Tabb. 13) *De ædificiis ad conventus publicos Provinciæ rectorum, magiſtratuum, mercatorum &c. inſtituendos aptis*; An eodem (plag. 8, Tabb. 22) *De templis varii generis bene conſtruendis*; An. 1720, (plag. 6½, Tabb. 15) *De ædificiis publicis, quæ curæ orphanorum, liberalibus ſtudiis erudiendorum, ob flagitia caſtigandorum, ſenum, ægrotorum, peregrinorum & vinctorum cuſtodiæ deſtinantur, rite parandis*; An. eodem (plag. 2, Tabb. 5) *De monumentis defunctorum, cenotaphiis, caſtris doloris* &c. An. eodem (plag. 4½, Tabb 10) *De machinis hydraulicis, aquæ ductibus, fontibus & ciſternis publicis*, & tandem An. 1721, (plag. 2½, Tabb. 4) *De Navium armamentariis & ſtationibus, itemque partibus rite parandis.* Ceterum huc etiam pertinet Prodromus Architecturæ Goldmannianæ editioni novæ & auctiori præmiſſus, qui ſub titulo: *Vorbereitung zu einer neuen und vermehrten Edition der vollſtändigen Anweiſung zur Civil-Bau Kunſt, Auguſtæ Vindelicorum* An. 1714, in fol. reg. (plag. 10, Tabb. 29) prodiit.

diit. In eo de cognitione Architecto neceſſaria agit, conſilium impertitur; quomodo Princeps efficere poſſit, ut omnis materia ſufficienti copia in promtu habeatur, ædificium publicum deſcribit, in quo materiæ cum machinis & inſtrumentis aſſerventur, & denique ſpecimina quædam Architecturæ exhibet, veluti ideam palatii principalis, domus ſuburbanæ Ducis Megapolitani & turris alicujus prægrandis.

§. 22. In Anglia GUILIELMUS HALFPENNY *Londini* An. 1728, in 4. (plag. 3, Tabb. 15) edidit libellum ſub titulo: *Magnum in parvo*, ſeu *The Marrow of Architecture*, hoc eſt, Medulla Architecturæ. In eo ordines architectonicos juxta PALLADIUM una cum arcubus delineare docet.

§. 23. Artem tignariam illuſtrant DECHALES in curſu (§. 4, cap. 1) JOHANNES WILHELM in *Architectura civili* idiomate Germanico edita *Norimbergæ* in fol. (5 plag. Tabb. 74.) & JOHANNES VOGEL in *Architectura moderna* Germanico itidem idiomate conſcripta (*Hamburgi* An. 1707, in fol. 3 plag. Tabb. 36). In Anglia JACOBUS SMITH edidit Tractatum de Arte tignaria *Londini* An. 1733, in 8. maj. (plag. 2, Tabb. 41) ſub titulo: *The Carpenters Companion*, h. e. Fabrorum lignariorum Comes. Sed non alia habet quam WILHELMUS, niſi quod appendicem de ordinibus delineandis adjecerit.

§. 24. Artem ſecandi lapides in uſum architectonicum, quam primus dediſſe creditur PHILIBERTUS DE L'ORME in Architectura (§. 6), docent DECHALES in curſu (§. 4, cap. 1), qui ſua ex opere, quod P. DERAN An. 1643. publicavit, præſtantiſſimum in hoc genere, deſcripſit & DES ARGUES, cujus liber ex Gallico in Germanicum verſus ſub titulo: *Kunſtrichtige und probmäſſige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau Kunſt*, *Norimbergæ* An. 1699, in 8. (15 plag. Tabb. 154) prodiit.

§. 25. Quoniam vero Autores iſti, ſi P. DECHALES excipias, omiſſis demonſtrationibus tantummodo praxin inculcant, neque etiam hic perfectam dedit Theoriam; ideo hunc defectum ſupplere conatus eſt FREZIER in *Theoria & Praxi de Sectione Lapidum*, ſeu *Tractatu de Stereotomia*, ſermone Gallico duobus Tomis *Argentorati* 1737, & 1738, in 4. maj. edito (Tomus I, Alph. 2, plag. 14, Tabb. 27. Tom. II, Alph. 2, plag. 19½, Tabb. 69). In uſum eorum, qui praxi operam navant, ex Tomo ſecundo excerpi poterant, quæ huc faciunt, aut opus inſigne P. DERAN in Linguam Germanicam verti mereretur.

§. 26. Ad Architecturam aquarum ſpectant libri Italici ſequentes: 1. JO. BAPTISTÆ BARATTERI *Architettura d'Acque* (*Piacenza* An. 1656, in fol. 3 Alph. 6 plag.) 2. CORNELII MEYERI, Batavi, *L'Arte di reſtituire*

tuire a Roma la tralaſciata navigatione del ſuo Tevere (*Romæ* 1675, in fol. 2 Alph. 3 plag. cum multis figuris textui inſertis) & ejuſdem *Nuovi ritrovamenti* (*Romæ* An. 1689, in fol. plag. 8, & 1696, in fol. plag. 12, cum figuris plurimis) 3. Dominici Guielmini *della natura de' fiumi Trattato* (*Bononiæ* An. 1697, in 4. 2 Alph. 2 plag. 15 Tabb.). Ex *Meyeri* libro inſigni plagio ſua omnia deſcripſit Anonymus Gallus in libello *Amſtelodami* An. 1696, in reg. 8. edito (6 plag. Tabb. 12) ſub titulo : *Traité des moyens de rendre les Rivières navigables.* Quoniam vero Theoriæ loco eſt, quod ab Italis præſertim de motu aquarum traditum; ideo non alienum a ſcopo præſente eſt injicere mentionem ſylloges ſcriptorum de motu aquarum, quæ ſub titulo: *Raccolta d'Autori, che trattano del moto dell' Aque*, Tomis tribus in 4. maj. *Florentiæ* An. 1723, (Alph. 9, plag. 6, Tabb. 44, cum multis figuris textui inſertis) prodiit.

§. 27. Ad Architecturam aquarum referri quoque poteſt Tractatus de pontibus & aggeribus & diſſertatio de criſmatis, fornicibus, pilis & anteridibus pontium Henrici Gautier, Architecti & Inſpectoris viarum regiarum, pontium & aggerum in Gallia. Prodiit ille ſub titulo : *Traité des ponts & chauſſées*, *Pariſiis* An. 1716, in 8. (plag. 14, Tabb. 26); hæc vero ſub titulo : *Diſſertation ſur les Culées, vouſſoirs, piles & pouſſées des Ponts.* Habemus ab eodem autore Tractatum de viis muniendis ſub titulo : *Traité de la Conſtruction des Chemins* (*Pariſiis* An. 1716, in 8. (plag. 8, Tabb. 5) editum.

§. 28. De Architectura navali ſermone Anglico commentatus eſt Wilhelmus Sutherland, cujus quinque tentamina huc ſpectantia ſub titulo : *The Shipbuilders Aſſiſtant, or Some Eſſays towards compleating the Art of Marine Architecture*, *Londini* An. 1711, in 4. (Alph. 1, Tabb. 13) lucem adſpexerunt. Inprimis autem hanc Architecturæ partem tradidit Anonymus in Arte extruendi naves & earum conſtructionem perficiendi, quæ *Amſtelodami* ſub titulo : *L'Art de bâtir les Vaiſſeaux*, in 4. (Alph. 1, plag. $5\frac{1}{2}$, Tabb. 147, quarum 35 textui inſeruntur) edita.

§. 29. Geometriam practicam ad Architecturam civilem applicatam addiſcere licet ex opere Anglico, quod ſub titulo : *Practical Geometry applied to the uſefull Arts of Building, Surveying, Gardening and Menſuration*, *Londini* 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. 40) edidit Batty Langley. Eodem inſtituto inſervit *Architectura practica*, quam Bullet, Architectus Regius, An. 1691, in 8. maj. (Alph. 4, plag. 4) *Pariſ.* publici juris fecit.

§. 30. In Dictionario Architectonico, quod *Londini* 1734, in 8. reg. (Alph. 2, plag. 18, Tabb. 33) ſub titulo : *The Builder's Dictionary* prodiit.

diit, non modo termini explicantur, verum etiam ex Architectorum celebrium ſcriptis excerpuntur, quæ res ipſas vocabulis denotatas concernunt. Unde non modo uſui eſt Anglis, verum etiam exteris uſui eſſe poteſt. Ceterum nullam hic mentionem facimus ſcientiæ Architectorum militarium de BELIDOR, in qua multa habentur ad Architecturam ſpectantia ſingularia, quæ alibi fruſtra quæſiveris, quia de hoc libro dicemus capite 13.

CAPUT XII.

De Pyrotechnia.

§. 1. INter noſtros, qui Pyrotechniæ operam dant, maximi fiunt CASIMIRUS SIMIENOWITZ, Polonus, JOHANNES SIGISMUNDUS BUCHNERUS & ERNESTUS BRAUNIUS. Illius opus a THOMA LEONHARDO BEEREN ex Latino idiomate in Germanicum translatum & a DANIELE ELRICH integra parte ſecunda auctum prodiit *Francofurti ad Mœnum* An. 1676, in fol. ſub titulo: *Vollkommene Büchſen-Meiſterey-Kunſt.* Ex eo ſua plerumque deſcripſit DECHALES in Curſu (§. 4, cap. 1). Iſtius *Theoria & praxis Artilleriæ* Germanico idiomate *Norimbergæ* An. 1685, in fol. (2 Alph. 18 plag. Tabb. 53) Hujus denique *Noviſſimum Fundamentum & praxis Artilleriæ* eodem ſermone conſcriptum *Dantiſci* An. 1687, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tabb. 60) lucem adſpexit. Ceterum Autores iſti non tantum de iis agunt, quæ in bello uſui ſunt, ſed ignium quoque feſtivorum rationem exponunt.

§. 2. MICHAEL MIETH in *Artilleriæ recentiori praxi* lingua nobis vernacula conſcripta (*Francof.* An. 1684, in fol. 3 Alph. 10 plag. Tabb. 60) tormentorum & mortariorum deſcriptionem omnium exactiſſimam dedit & ignium nocivorum rationem declaravit, feſtivis omiſſis. Atque hi Autores abunde ſatisfaciunt iis ipſis, qui Pyrotechniæ data opera incumbunt.

§. 3. Inter Gallos eminet SURIRÆUS DE S. REMIGIO, cujus Commentarii Pyrotechnici (*Mémoires d'Artillerie*) accuratam deſcriptionem continent omnium machinarum & inſtrumentorum bellicorum hodie uſitatorum, una cum rebus aliis eo pertinentibus. Optima editio eſt *Pariſienſis* An. 1707, in 4. reg. (4. Alph. 17 plag. Tabb. 196), quæ ceteris quoque longe auctior.

§. 4. Ob peritiam bellicam celeberrimus COEHORNIUS ſermone Batavo de Artilleria libellum brevem,

ſed

ſed autore ſuo dignum, conſcripſit, qui ſuppreſſo ejus nomine in Germanicum translatus ſub titulo : *Der gründliche Unterricht von der Artillerie*, *Hamburgi* An. 1699, in 8. (10 plag. Tabb. 23) prodiit.

§. 5. Tyronum uſui ſervit Fabrica *Vulcani*, quam *Eques de S. Juliano* (*Chevalier* DE SAINT JULIEN) *Hagæ* An. 1706, in reg. 8. (10 plag.) edidit. Titulus libri : *La Forge de Vulcain*, *ou l'Appareil des Machines de Guerre.*

§. 6. An. 1713, idiomate vernaculo prodiit Compendium pyrotechnicum, Pyrotechniæ ſtudioſis commendandum, ſub titulo : *Gründlicher Unterricht von der Theoria und Praxi der heutigen Büchſenmeiſterey*, *Francofurti* An. 1713, in 8. (2 Alph. 4 plag. 29 Tabb.). Si titulo fidem habemus, lingua Gallica ipſum conſcripſit *Eques* DE S. JULIANO modo laudatus, & inde in Germanicam tranſtulit AUGUSTINUS BRAND. Sed diverſum non modo eſt a Fabrica *Vulcani* paulo ante laudata; verum etiam partem primam integram verbotenus ex MIETHII Artilleria deſcriptam reperio, quod quomodo in verſione libri a Gallo Gallice conſcripti accidere potuerit, non ſatis apparet.

§. 7. Aliud compendium, ſed minoris pretii, ante dedit GEORGIUS ANDREAS BOECKLER Tom. III, & IV, *Manualis Architecturæ militaris* (*Francof.* & *Lipſ.* An. 1689, in 16, Tom. III, 4 plag. Tabb. 11, & Tom. IV, 10 plag. Tabb. 34). Cum tamen COEHORNIUS, *Eques* DE S. JULIANO & BRANDIUS tantum tradant, quæ uſui bellico inſerviunt, BOECKLERUS quoque de ignibus feſtivis tractat.

§. 8. Ceterum huc etiam referri debet BLONDELLI Tractatus de bombis jaciendis, qui ſub titulo : *L'Art de jetter les Bombes*, *Pariſiis* An. 1683, in 4. prodiit & in Germanicam linguam translatus *Sulzbaci* An. 1686, in 8. recuſus. Scriptum Mathematico dignum. Huic affine eſt ſcriptum, quod ſub titulo : *Le Bombardier François*, DE BELIDOR, *Pariſiis* editum, *Amſtelodami* recuſum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 8), in quo ſimul praxis Pyrotechniæ concinna perſpicuitate exponitur. Pertinet huc etiam F. E. Comitis DE HERBERSTEIN *Cyclodiatomia*, qua pro rei tormentariæ incremento motum ac tempus projectorum menſurat & demonſtrat. (*Pragæ* An. 1716, in 8. Alph. 1, Tabb. 20).

CAPUT

CAPUT XIII.

De Architectura Militari.

§. 1. QUi de Architectura militari commentati ſunt, vel formas muniendi proprias, vel alienas exponunt.

§. 2. Primum forma muniendi Belgica admodum celebris extitit, de qua ſcripſit ADAMUS FREYTAG, Polonus, cujus *Architectura militaris* Germanice prodiit *Amſtelodami* An. 1665, in fol. (2 Alph. 9 plag. Tabb. 1½ Alph.). Eandem in numeris tantum immutavit GERHARDUS MELDER, cujus *Praxis fortificatoria*, *Francofurti* An. 1666, in fol. lucem adſpexit (plag. 36, Tabb. 8).

§. 3. Minori autem in pretio ſtatim haberi cœpit, cum An. 1645, Comes DE PAGAN ſuam muniendi formam publicaret *Pariſiis* in fol. (1 Alph. 6 plag. Tabb. II.) ſub titulo: *Les Fortifications de Comte* DE PAGAN, poſtea in ſermonem Germanicum translatam. Cum eo in multis convenit HENRICUS RUSIUS *Baro de* RUSENSTEIN, cujus muniendi forma cum *Melderiana* prodiit (§. 2).

§. 4. Eidem quoque agnata eſt, magis tamen quam *Ruſiana* ab eadem diſſidet, quam BLONDELLUS ſub titulo: *Nouvelle maniére de fortifier les places*, *Pariſiis* An. 1686, in 12. reg. (5 plag. Tabb. 12) in lucem emiſit, recuſam *Hagæ Comitum* (An. 1686, in 8) bonam quidem, ſed ſumtuoſam nimis.

§. 5. Comes DE VAUBAN duas muniendi formas invenit & ſecundum eas celebria munimenta exſtruxit; ſed neutram ipſemet deſcripſit. Priorem optime delineavit Abbas DU FAY, qui eam ſub titulo: *La véritable maniére de bien fortifier de M.* DE VAUBAN in lucem publicam emiſit. (*Amſtelod.* An. 1692, in 12. plag. 9). Poſteriorem primus deſcripſit Autor Anonymus in libro Gallico, cujus titulus: *L'Ingénieur François* (*Pariſ.* An. 1691, in 8. reg. 13½ plag. Tabb. 33). Utramque STURMIUS, aliquoties jam laudatus, in libro Gallico ſub titulo: *Le Véritable* VAUBAN explanavit (*Hagæ Comitum* 1709, in reg. 8. plag. 14, Tabb. 31). Recenſet idem regulas Architecturæ militaris fundamentales & principia Arithmeticæ ac Geometriæ practicæ more communi præmittit, ut adeo tyronum inſtituto inſerviat hic liber.

§. 6. COEHORNIUS ſuam muniendi methodum primum ſermone Batavo edidit *Leeuwardiæ* An. 1685, in fol. (45 plag. Tabb. 14). Poſtea in ſermonem Gallicum translatus prodiit *Hagæ Comitum* An. 1706, in reg. 8.

(19 plag.

(19 plag. Tabb. 14) ſub titulo: *Nouvelle Fortification, tant pour un terrain bas & humide, que ſec & élevé.*

§. 7. Singulares muniendi formas, a reliquis prorſus diſſidentes, apud Italos dedere ALEXANDER DE GROTTE & DONATUS ROSETTI. Prior prodiit Italice *Venetiis* An. 1617, (3 Alph. in fol.) anno ſequente Monachii Germanice recuſa: poſterior itidem Italice *Auguſtæ Taurinorum* An. 1678, in fol. (Alph. 2, plag. 5).

§. 8. Similiter apud noſtros inuſitatam reliquis formam dedit BERNHARDUS SCHEITER in libro Germanico, cui titulus: *Neu vermehrte und verſtärckte Veſtungs-Bau- und Kriegs-Schule* (*Brunſwigæ* An. 1672, in fol. 11 Alph. 7 plag. Tabb. 24). Eam cum anno ſequente oppugnaret CHRISTIANUS NEUBAUER eidemque aliam ſuam opponeret in libro Germanico, cui titulus: *Wohlmeinende Gedancken, oder Diſcurs über ausgegange Fortification des* Tit. *Herrn JOH. BERNHARD SCHEITERS* (*Coloniæ ad Spream* in 8.); SCHEITERUS An. 1677, *Argentorati* in fol. (1 Alph. 2 plag. Tabb. 8) *Examen fortificatorium* in lucem publicam emiſit, in quo *Neubauerianam* oppugnat, ſuam defendit, aliamque novam ſuperaddit. NEUBAUERUS autem An. 1679, ſuam in *vera praxi Architecturæ militaris* (*Stargardiæ* An. 1679, in fol. plag. 19, Tabb. 8) uberius expoſuit.

§. 9. ERNESTUS FRIDERICUS DE BORGSDORF novas muniendi methodos publicavit cum in Munimento inexpugnabili, cui titulus: *Unüberwindliche Feſtung* (*Ulmæ* An. 1682. in 8. plag. 7, Tabb. 8), tum in ſcripto altero, cui titulus: *Die befeſtigte Stütze eines Fürſtenthums, oder neu erfundene Defenſion wieder das ſonſt Welt bezwingende Canoniren, Bombardiren und Miniren.* (*Norimbergæ* An. 1687, in 8. cum aliquot figuris).

§. 10. GEORGIUS RIMPLERUS in libello Germanico, cui titulus: *Die beveſtigte Feſtung* (*Francofurti* An. 1674, in 12. plag. 16) hactenus uſitatas muniendi formas omnes rejicit, tanquam principiis ſpuriis nitentes, & axiomata prorſus nova ſubſtituit: quibus tamen convenientem muniendi formam ipſe non delineat. Nemo autem magis in ea delineanda deſudavit, quam Cl. STURMIUS in libello, cui titulus: *Entdeckung der unſtreitig allerbeſten Manier zu beveſtigen* (*Francof. ad Oderam* An. 1704, in 8. plag. 12, Tabb. 9). Alias quoque eandem operam ſumſit DANIEL SUTTINGER in ſcripto Germanico *Dreſdæ* in fol. edito (plag. 14, & 9½ plag. fig.).

§. 11. Scripta RIMPLERI admodum rara annotationibus & ſchematiſmis, quæ deſiderabantur, illuſtrata, additis nonnullis aliis, *Dreſdæ* in 4. An. 1724, (Alph. 3, plag. 9, Tabb. 10) recudi curavit LUDOVICUS ANDREAS HERLIN, qui STUR-

STURMII de RIMPLERI inventis judicium parum probat.

§. 12. RIMPLERI principia probat J. H. LANDSBERGIUS, Germanus, Statuum Belgii fœderati Architectus militaris primarius, & iiſdem conſonam muniendi formam delineat: cum tamen non ex aſſe ipſi ſatisfaciat, novam quandam aliam ſubſtituit, in libro Gallico, cui titulus: *Nouvelle maniére de fortifiér les places* (*Hagæ Comitum*, An. 1712, in 4. plag. 11, Tabb. 8).

§. 13. Idem laudatus LANDSBERGIUS, una cum aliis Architectis militaribus peritis, valde probat *Architecturam militarem*, quam DANIEL SPECKLE, Architectus Argentoratenſis, jam An. 1589, in fol. (2 Alph. 10 plag. Tabb. 36) publici juris fecit. Hinc etiam factum eſt, ut præclarum in hoc genere opus *Dreſdæ* An. 1705, in fol. fuerit recuſum (2 Alph. 12 plag. Tabb. 24).

§. 14. Sunt vero adhuc plures inter noſtros, qui ſingulares muniendi formas dedere, attentione Architectorum militarium non indignas. Huc refero JOHANNEM FRANCISCUM GRIENDEL AB AACH, qui ſeptem muniendi formis, utut eidem fundamento ſuperſtructis, inclaruit (*Norimbergæ* An. 1683, in fol. plag. 14. Fig. plag. 15), CHRISTOPHORUM HEER, qui in *Theoria & praxi Artis muniendi* (*Francof.* An. 1689, in 4. plag. 16, Tabb. 30) elegantes dedit ſibique proprias conſtructiones; in *Speculo* vero *Artis muniendi* (*Lipſiæ* An. 1694, in 4. plag. 17, Tabb. 31) præterea varia munimenta celebria Europæ deſcribit, & CHRISTOPHORUM HEIDENMANN, cujus *Architectura militaris* una prodiit *Monachii* An. 1664, in fol. (1 Alph. 22 plag. 27, & fig. plag.) altera ibidem An. 1673, in fol. (plag. 10, & Fig. plag. 14).

§. 15. Nec forte e re eſſet WILHELMI DILICHII *Peribologiam* (*Francofurti* An. 1640, in fol. 2 Alph. 2 plag. Tabb. 409, ſeu 9. Alph. 1 P plag. (in ſcenam adducere, quoniam Architecturæ militaris periti multa ad praxin proficua in ea reperient. Immo ſi verum fateri fas eſt, in hoc autore occurrunt, quæ dudum poſthac in Gallia tanquam nova inventa prodita fuerunt. Unde melius de eo judicium ferendum, quam tulit DECHALES in Tractatu de illuſtribus Mathematicis Tomo I, Mundi Mathematici (§. 4, cap. 1). Idem quoque edidit *Scholam militarem* (*Francof. ad Mœn.* An. 1689, in fol. 10 Alph. 13 plag. cum ingenti numero figurarum partim æri, partim ligno inciſarum), in qua omnia ad bellum tam veterum, quam noſtris moribus neceſſaria deſcribuntur & illuſtrantur.

§. 16. In eadem ſcena mimi vices adimplebit WENDELINUS SCHILDKNECHT, qui muniendi formam Batavam ſtylo hiſtrionico deſcribit (*Stetini* An. 1652, in fol. plag. 129, & fig. plag. 20½).

§. 17.

§. 17. Eclecticam quandam muniendi formam ex ANTONII DE VILLE, *Comitum* DE PAGAN & VAUBAN methodis deductam propoſuit Autor Anonymus in libro, cui titulus: *Nouvelle maniére de fortifier les places, tirée des méthodes du Chevalier* DE VILLE *&c.* (*Amſtelodami* An. 1689, in reg. 12 plag. 10 Tabb. 15), qui regulas Architecturæ militaris bene explicat, ſimulque ideam exhibet, quomodo diverſorum Architectorum muniendi formas una ad praxin transferre liceat. ANTONII DE VILLE *Ars muniendi* prodiit *Amſtelodami* An. 1675, recuſa juxta editionem *Pariſinam* An. 1672, in 8. (1 Alph. 3 plag. cum figuris multis partim textui inſertis, partim ſeorſim excuſis). Multa hic diſtincte exponuntur, quæ alibi vel omittuntur, vel ſtrictim proponuntur.

§. 18. MATTHIAS DOEGEN in *Architectura militari moderna*, quæ An. 1647, in fol. (Alph. 5, plag. 13, Tabb. 78), Latina lingua prodiit, formam equidem muniendi Batavam nonniſi deſcribit, quæ illo tempore uſitatiſſima erat; multa tamen lectu digna habet iis præſertim, qui in extructione munimentorum ſcitu neceſſaria noſſe deſiderant. Regulas, quas tradit, exemplis veris celebrium tunc temporis per Europam munimentorum illuſtrat, calculos, ubi iis opus eſt, perſpicue explicat, de figurarum irregularium fortificatione experientia confirmata tradit, modumque munimenta oppugnandi & defendendi declarat. Singula variis hiſtoriis tam veteribus, quam novis confirmat. Partem Architecturæ militaris, quæ de locis muniendis agit, *Hercotectonicen*; alteram vero, quæ de munimentis oppugnandis & defendendis tractat, *Areotectonicen* vocat. Et hujus partem oppugnatoriam *Poliorceticen*; repugnatoriam vero *Antipoliorceticen* appellat.

§. 19. BONAJUTUS LORINUS, Nobilis Florentinus, cujus *De Archichitectura militari* Libri quinque a DAVIDE WORMBSER ex Italico in Germanicum verſi *Francofurti ad Mœnum* An. 1607, in fol. prodierunt, multa habet, quæ etiam in Architectura civili uſui ſunt, & libro quinto Mechanicam practicam tradit, variaque inſtrumenta & machinas varias deſcribit.

§. 20. DONATUM ROSETTI ſingularem quandam muniendi methodum inveniſſe, quæ a ceteris prorſus diſſidet, eandemque ſub titulo: *Fortificazione à roveſcio* ſermone patrio edidiſſe, ſupra jam meminimus (§. 7). Ejus ideo mentionem injicere lubet, quia peritis viam ad ulteriora ſternit. Unde eidem multum tribuit ALEXANDER CHRISTIANUS LE MAITRE in *Troja vetere & nova* An. 1684, in 8. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 14), ob principia utilia lectu digniſſimus.

§. 21. Nec minus ſingularis ea eſt, quam pro inexpugnabili vendi-

tat JACOBUS DE LA VERGNE, Architectus militaris Cæſareus primarius, cujus *Nouvelle Fortification imprenable par force d'Armes*, lucem adſpexit *Viennæ Auſtriæ* An. 1700, in 4. (plag. 17, Tab. 1). Oſtendit idem, quomodo munimenta ordinaria ad novam iſtam formam reduci queant. Edidit idem ibidem An. 1698, duos Tractatus alios in 4, quorum unus inſcribitur: *De l'utilité d'avoir un bon Ingénieur ou Directeur général des Fortifications dans un Etat &c.* alter vero: *Nouveau exercice du Gabion & de la Faſcine.* Conſtat ille plag. 11, hic itidem plag. 11, & Tabb. 3. Quemadmodum vero illi jungit Tractatum de officiis Architectorum militarium, qui ſubſunt Directori generali; ita in altero quoque agit de modo oppugnandi munimenti ſatis perſpicue.

§. 22. Hactenus recenſitas muniendi formas omnes, ſola Landsbergiana excepta, una cum aliis a nobis brevitatis ſtudio prætermiſſis atque propriis, breviter deſcribit & ad examen revocat, vir in hoc ſtudiorum genere probe verſatus ſæpiuſque jam nobis laudatus STURMIUS in *Architectura militari hypothetica & eclectica* (*Norimbergæ* An. 1702, in 8. plag. 10, & fig. plag. 6), ex quo adeo libro brevi temporis ſpatio cognoſcere licet, quæ alias ex vaſtis voluminibus cum multo ſumtuum & temporis diſpendio forent conquirenda. In prima editione deſideratur orthographia munimentorum. Hic vero defectus ſuppletur in altera, quæ multo auctior *Norimbergæ* An. 1719, in 4. (Alph. 1, Tabb. 41) prodiit.

§. 23. Novam quoque muniendi methodum dedit ROZARD, Architectus militaris Electoris Bavariæ, quam in libro ſub titulo: *Nouvelle Fortification Françoiſe*, *Norimbergæ* in 4. reg. An. 1731, Alph. 1, Tabb. 42) editio deſcribit. In parte altera deſiderio aliorum ſatisfacturus adjecit explicationem trium ſyſtematum Comitis DE VAUBAN, qualem ex ipſis munimentis ab eodem extructis hauſit, una cum omni praxi offenſiva & defenſiva, ubi etiam præliorum rationem habet, addens ubivis obſervationes, quas experientia domeſtica ſuggerebat.

§. 24. Reſtat ut de iis Autoribus dicamus, qui in gratiam Architecturæ militaris ſtudioſorum libros ediderunt. Commendandi hic nobis ſunt *Don* SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO in Architectura militari, quæ ſub titulo *Ingénieur pratique*, *Bruxellis* An. 1696, in 8. (1 Alph. Tabb. 35) lucem adſpexit; Cl. OZANAM, cujus Tractatus de Architectura militari (*Traité de Fortification*) *Pariſiis* An. 1694, in 8. reg. (17 plag. Tabb. 44) prodiit; *Eques de* S. JULIANO ſupra laudatus, cujus *Architectura militaris* publicata eſt ſermone Gallico, *Hagæ Comitum* An. 1705, in 8. (plag. 11, Tabb. 25). In eundem cenſum venit

Ano-

Anonymi Architectus militaris Gallicus ſupra laudatus (§. 5).

§. 25. In vernacula noſtra notiſſimi ſunt libri ſequentes : 1 GEORGE CONRAD MARTII *Europäiſcher Ingenieur* (*Norimbergæ* An. 1696, in 8. 2 Alph. 16 plag. Tabb. 60), qui præter Architecturam militarem etiam Arithmeticam & Geometriam practicam prolixe tradit : 2. JOH. HEINRICI BEHRS *aufs neu verſchantzter Turenne oder gründlich-alt und neue Kriegs-Bau-Kunſt* (*Francofurti* An. 1690, in 8. 1 Alph. 16 plag. Tabb. 32) : 3. JOHANN SEBASTIAN GRUBERS *Friedens-und Krieges-Schule* (*Norimbergæ* An. 1697, in 8. 2 Alph. 11½ plag.) : 4. Ejuſdem *Examen Fortificatorium* (*Lipſiæ* An. 1703, in 8. 1 Alph. 22 plag. Tabb. 19) : 5. ejuſdem *neuer und gründlicher Unterricht von der heutigen Fortification und Artillerie* (*Norimb.* 1700, in 8. 1 Alph. 17. plag. 16 Tabb.) aliique.

§. 26. Anno 1722, *Bruxellis* prodiere Principia Architecturæ militaris modernæ (*Les Principes de la Fortification moderne*) Directoris Academiæ militaris Cæſareæ, quæ Bruxellis eſt, HARTMANNI in reg. (plag. 19, Tabb. 9). Explicat principia *Comitis de* VAUBAN & COEHORNII, ac multus inprimis eſt in uberius explicanda munimentorum oppugnatione & defenſione, quam ab aliis factum : ut hinc addiſcere liceat, quomodo munimentorum forma ad examen revocanda, ubi quidem rectum de iis judicium ferre velis.

§. 27. Inprimis autem commendari meretur Anonymi * Inſtitutio Architecturæ militaris, quam ſub titulo : *Le parfait Ingénieur François*, *Amſtelodami* An. 1734, in 4 (Alph. 1, plag. 22, Tabb. 42) edidit. Omnem enim artem muniendi ſecundum triplicem non modo methodum Comitis DE VAUBAN, verum etiam ERRARDI, SARDII, Equitis DE VILLE, Equitis DE S. JULIANO, MAROLOISII, BOMBELLI, BLONDELLI, Comitis DE PAGAN, COEHORNII, SCHEITERI, STURMII aliorumque anonymorum explicat, artem muniendi irregularem reformat, & praxin offenſivam ac defenſivam conſummatam tradit. De STURMII cogitatis parum honorifice ſentit, quantuſcunque ſibi viſus fuerit Apollo.

§. 28. Antea celebrabatur liber Gallicus, quem ſecunda vice multo auctiorem ſub titulo : *Les Travaux de Mars ou l'Art de la Guerre*, ſeu Artis militaris, *Pariſiis* An. 1685, in 8. reg. ediderat ALLAIN MANESSON MALLET tribus tomis. Tomus I, conſtat Alph. 1, plag. 2, Tabb. 152; Tomus II, plag. 22, Tabb. 111; Tomus III, Alph. 1, plag. 3. Figuræ ipſi textui inſertæ ſunt: & ornatus gratia multa adjiciuntur, quæ ad rem non faciunt, quemadmodum fecit in Geometria practica ſupra laudata (§. 30, cap. 3). Etſi

* Abbatis DEIDIER.

autem ab eo tempore Architectura militaris multum ſubierit mutationis, in primo tamen præſertim ac tertio tomo habentur, quæ non ſine fructu leguntur. Editionis primæ verſionem Germanicam dedit An. 1672, *Amſtelodami* in 8. reg. excuſam ſub titulo: MANESSON MALLET *Kriegs-Arbeit*, qui puritatem linguæ Germanicæ ridicule affectabat PHILIPPUS A ZESEN, ſed ob inſuetum dicendi genus nullius momenti.

§. 29. Regulas fundamentales Architecturæ militaris qui cognoſcere avent, iis abunde ſatisfaciet JOHAN. JACOBUS WERTMULLER in Theatro regularum fundamentalium Architecturæ militaris tam veterum, quam recentiorum, *Schauplatz der alten und neuen Fortifications-Maximen*, *Francof. ad Mœn.* An. 1691, in 8. 1 Alph. 20 plag. Tabb. 12) & in Lapide Lydio Architectorum militarium, *Probier-Stein der Ingenieur* An. 1685, in 8. 16 plag. Tabb. 4), tum etiam in *Apologia fortificatoria*, in qua Belgicam muniendi formam defendit, quamvis eam aliqua emendatione indigere fateatur (*Francof.* An. 1691, in fol. 1 Alph. 15 plag. & Fig. plag. 16).

§. 30. Quæ in excitatione munimentorum obſervari merentur, docent JOHANNES FAULHABER in *Schola Architectorum militarium* (*Norimbergæ* An. 1637, in 4.) & HEER in *Praxi Artis muniendi* (§. 14) præter alios, quos antea laudavimus. Inprimis hic commemorari meretur LAMBERTUS LAMBION in Praxi Architectonica (*der Bau Practica*) (*Viennæ* An. *1696*, in 8. plag. 16, & Fig. plag. 1½), ubi multa ſingularia occurrunt præſertim de cuniculis ſubterraneis, niſi quod linguæ Germanicæ non ſatis peritus male ſcripſerit, ut adeo libellus Germanice ſcriptus in idioma Germanicum verti meretur.

§. 31. De praxi militari tam offenſiva, quam defenſiva data opera ſcripſit GOULON in libello Gallico, cui titulus: *Mémoires pour l'attaque & pour la défenſe d'une Place* (*Hagæ Comitum* An. 1706, in 8. plag. 13, Tabb. 4) & qui eodem adhuc anno recuſus *Weſelii* in 8. reg. (plag. 5, Tabb. 4) poſtea in Germanicum idioma translatus (*Norimb.* An. 1709, in 8. plag. 5½, Tabb. 4).

§. 32. Etſi autem multa utilia dederit, quæ domeſtica experientia ipſum docuit, non tamen dedit, quæ ſufficiunt. Anno autem ſuperiori 1737, *Hagæ Comitum* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 5½, Tabb. 33) prodiit *Comitis* DE VAUBAN de praxi offenſiva & defenſiva opus poſthumum, ſub titulo: *De l'attaque & de la défenſe des places*, quod obſervationibus ultra dimidium ſeculum a ſe continuatis ſuperſtruitur. Compoſuerat idem in uſum Ducis Burgundiæ, cui MSC. dederat, non ea intentione, ut publici juris fieret; ſed ut arcani inſtar aſſervaretur. Neque adeo

facile

facile erat MSC. iſtud deſcribi, propter Tabulas majores, in quibus Schemata nitidiſſime delineata erant. Cum in eo candide de ſingulis mentem ſuam aperuerit; nullum ſupereſſe poteſt dubium, quin inſigni cum fructu legatur ab iis, qui caſtra ſequuntur, vel de praxi offenſiva & defenſiva judicium ſibi ſumunt.

§. 33. JOHANNES TEYLER in *Architectura militari* (*Rot.* 1697, in 4. plag. 8, Tabb. 41) ad Architecturam militarem Algebram applicare cœpit, quoad calculum inprimis probabilium, ſpem feriendi planum ſclopeto vel tormento ad menſuram revocaturus. Aliud vero Specimen Algebræ ad Artem Fortificatoriam applicatæ, diverſum prorſus a *Teyleriano*, etiam dedit JOH. MATTHIAS HASIUS, nunc Mathematum Profeſſor Wittebergenſis, *Lipſiæ* An. 1707, in 4. (plag. $3\frac{1}{2}$, Tab. 1).

§. 34. Tandem hic commemorandum eſt opus, quod in uſum Architectorum militarium conſcripſit BELIDOR, Commiſſarius ordinarius Artilleriæ, Profeſſor Mathematum Regius in Scholis eidem deſtinatis, editum *Pariſiis*, mox vero *Hagæ Comitum* recuſum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. maj. 53) ſub titulo: *La Science des Ingénieurs dans la conduite des Travaux de Fortification & d'Architecture civile.* In eo Autor, qui omni ſtudio id agit, ut ad ſolidam ſcientiam Architectos militares perducat, eoque fine in eorum gratiam Curſum mathematicum jam ante edidit, recuſum *Pariſiis* An. 1725, in 4. reg. cum 24 Tabulis figuras nitidiſſime æri inciſas exhibentibus, in quo ea inprimis docentur, quæ iiſdem ſcitu neceſſaria ſunt ad finem iſtum conſequendum, non modo ea tradit, quæ ex Architectura militari, verum etiam quæ ex civili iiſdem perſpecta eſſe debent. Traditur hic theoria multorum, quæ hactenus in utraque Architectura nudæ experientiæ fuere ſuperſtructa. Videre hoc eſt ex libro primo atque ſecundo, quorum iſto quæ ad muros, hoc autem quæ ad fornices pertinent, ex principiis geometricis & mechanicis demonſtrat, uſus hinc inde demonſtrationibus algebraicis. Uſui eſſe poteſt hoc opus iis, qui ad formam ſcientiæ vere mathematicæ utramque Architecturam reducere voluerint ea demonſtraturi, quæ hactenus experientiæ fide ſumuntur nondum ſatis limata. Opus hoc etiam in cenſum ſcriptorum de Architectura civili referendum, inter quæ eminet, quatenus viam ad ulteriora ſternit.

§. 35. Non ſilentio prætereundus eſt libellus Germanicus, quem JOHANNES CHRISTOPHORUS GLASERUS *Halæ Saxonum* An. 1728, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 6 (ſub titulo: *Vernünfftige Gedancken von der Kriegs-Bau-Kunſt erſte Probe* edidit, in quo oſtendit in omnibus muniendi formis, quæ hactenus proſtant, deficere defenſionem foſſæ ſufficientem, novamque

vamque proponit, qua huic defectui ſuccurritur. Addit adhuc aliam per Algebram erutam. Plura dare conſtituerat ſpecimina Architecturæ militaris perficiendæ : ſed neſcio qui factum, ut a propoſito ſuo deſtiterit.

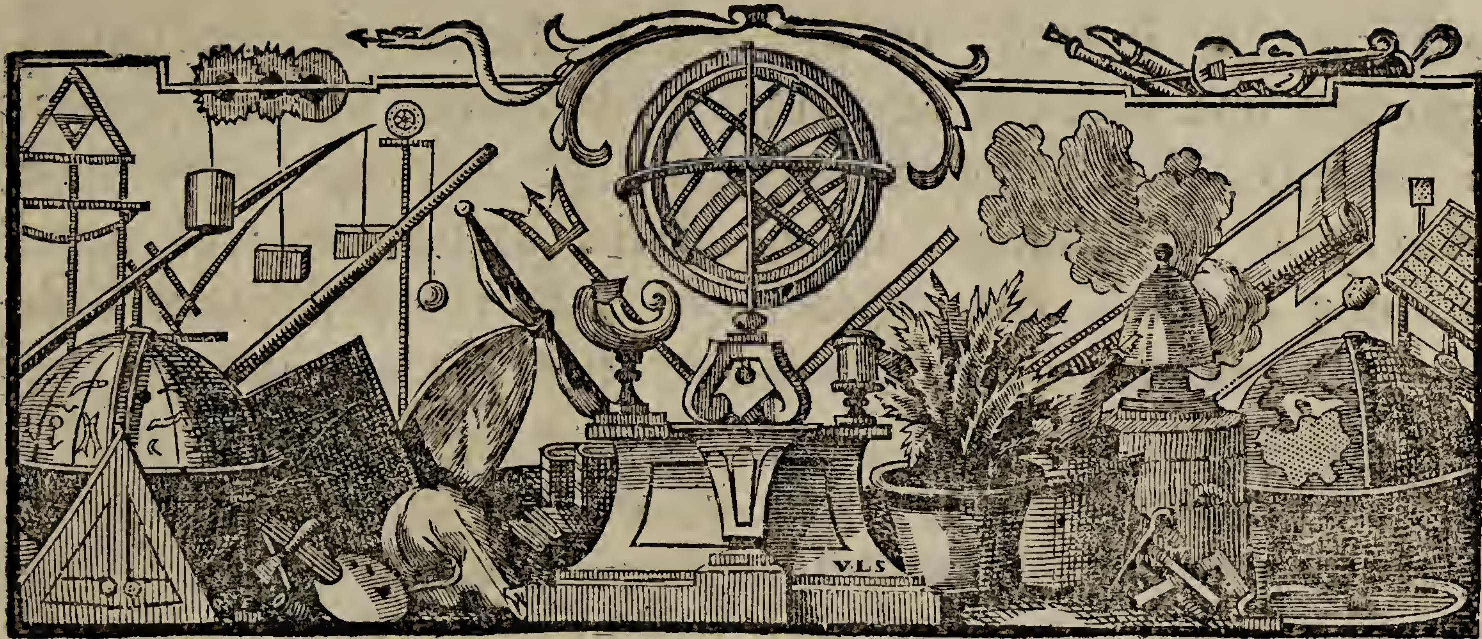
§. 36. Artem militarem univerſam deſcribit GEORGIUS ANDREAS BOECKLER in Schola militari moderna : *Neu vermehrte Kriegs-Schule*, quæ *Francofurti ad Mœnum* An. 1635, in 8. (Alph. 2, plag. 8, cum figuris multis æri inciſis) prodiit. Tradit autor ea omnia, quæ in bello uſui eſſe poſſunt, ita ut etiam jus militare Cæſareum, Suecium & Batavum libro ſuo inſeruerit, & ſub finem in Appendice varia arcana doceat, quæ militibus ſcitu neceſſaria.

§. 37. Huc etiam pertinet JOHANNIS FRIDERICI A FLEMMING, Regis Poloniarum & Electoris Saxoniæ Tribuni militum pedeſtrium, Miles Germanus perfectus, *der volkommene Deutſche Soldat*, qui *Lipſiæ* An. 1726, in fol. (Alph. 9, plag. 8, Tabb. 64) prodiit, in quo autor omnem ſcientiam militarem, inprimis quæ ad militem pedeſtrem ſpectant, dilucide exponit. In eundem quoque cenſum referri poteſt liber Gallice conſcriptus, quem ſub titulo : *Les Fonctions du Capitaine de Cavalerie & les principales de ſes Officiers ſubalternes*, multo auctiorem *Pariſiis* edidit DE BIRAC, recuſum *Hagæ* An. 1693, in 8. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 14). Optandum vero foret, ut quis rei militaris peritus, in Matheſi verſatus & methodi gnarus Artem militarem in eam formam redigeret, qua nos Pyrotechniam, Architecturam militarem & civilem repræſentavimus, iis ſimul perluſtratis, quæ Autores modo laudati tradiderunt, & ex Autoribus ſuperioribus aliiſque peti poſſunt.

F I N I S

Commentationis de præcipuis ſcriptis mathematicis.

PRÆFATIO



COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHESEOS RECTE INSTITUENDO.

PRÆFATIO.

QUI Matheſi addiſcendæ operam navant, non eundem ſibi ſcopum præfigunt. Elementa noſtra Matheſeos univerſæ ita conſcripſimus, ut pro multiplici diſcentium ſcopo ſatisfaciant omnibus. Quoniam vero non omnes eadem induſtria eidem incumbere tenentur, nec omnia addiſcenda omnibus; igitur nobis propoſitum eſt docere, quid unicuique conveniat. Mul-

tum omnino intereſt, ut ſtudium Matheſeos rite tractetur, ſiquidem ſine moleſtia ac temporis diſpendio feliciter progredi volueris. Quamobrem noſtrum eſſe duximus, monſtrare viam, qua ſit eundum, ne ad devia declinemus: id quod facillime accidit. Eam igitur, quam in nos ſuſcepimus, de ſtudio mathematico rite inſtituendo tractationem utilitate ſua non deſtitutum iri confidimus. Quamobrem ſuademus, ut omni attentione eandem legat & relegat, qui Matheſeos addiſcendæ animo ad Elementa noſtra legenda accedit. Quodſi quis ſtudioſe obſervet, quæ præcipimus, eum participem futurum fructus, quem eidem pollicemur, nulli dubitamus. Inſignem vero percipiet voluptatem, ubi ſenſerit voto reſpondere eventum: quem ubi prævidet, eo ipſo accendetur ardor majore induſtria Matheſeos ſtudium continuandi, quam quo idem inchoavit. Noſtrum inprimis eſt amplificare Matheſeos ſtudium, nunquam ſatis commendandum, nunquam pro dignitate deprædicandum. Nihil igitur omittendum, quod huc quomodocunque facit. Alienam felicitatem qui noſtram exiſtimamus, id unice intendimus, ut dicamus, ut ſcribamus, quæ proſunt aliis. Quamobrem nec quicquam magis in votis habemus, quam ut omnes, qui ad Matheſin addiſcendam animum appellunt, participes fiant ejus fructus, qui ex ſtudio mathematico percipi poteſt.

COM-

COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHESEOS RECTE INSTITUENDO.

CAPUT PRIMUM.

De diverſis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur.

§. 1. TRes dantur gradus cognitionis humanæ in omni veritatis genere, quos recto facultatum cognoſcendi uſu acquirere licet. Aut enim in eo acquieſcimus, quod veritatem ab aliis propoſitam intelligamus; aut ulterius progreſſi id agimus, ut ejuſdem etiam convincamur; aut denique operam damus, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio marte eruere valeamus.

§. 2. Primus gradus acquiſitu omnium facillimus & a ceteris præſupponitur: neque enim veritatis, niſi intellectæ, convincitur animus; ſive eum a priori, ſive a poſteriori convincere volueris; multo minus autem ex iis, quæ cognoviſti, alia incognita deducere potueris, niſi ea, quæ cognoviſti, ſatis intellexeris. Gradus ſecundus difficilius comparatur primo, cum multo ampliorem requirat facultatum uſum; nec ad tertium adſpirandum, niſi ubi ad ſecundum aſcenderis. Tertium denique omnium difficillime conſequi licet, cum ampliſſimum omnium exigat facultatum uſum. Qui in Logica & Pſychologia ſatis fuerint verſati veritatem dictorum abunde perſpicient: ceteris ſatisfaciet experientia domeſtica, ubi diverſis hiſce gradibus acquirendis non ſine ſucceſſu operam dederint. Eluceſcet quoque quodammodo veritas ex iis, quæ mox de illis uberius dicentur.

§. 3. Cognitionem gradus primi

acquiſiturus, definitiones, theoremata & problematum reſolutiones ſibi perſpecta reddere tenetur, omiſſis demonſtrationibus. Cognitionis ſecundi gradus compos futurus addere debet demonſtrationes. Ad cognitionem tandem tertii gradus perventurus, in rem præſentem veniat neceſſe eſt, & ex iis, quæ ipſi cognita & perſpecta ſunt, acquiſito cum ſecundo gradu facultatum uſu, eruere ſtudeat opus eſt ſibi nondum nota: quod quomodo fiat, poſthac indigitabimus, quantum præſentis inſtituti ratio permittit. Neque enim nobis jam propoſitum eſt explicare Artem inveniendi, quæ legitimum facultatum uſum in eliciendis incognitis ex cognitis diſtincte docet.

§. 4. Theoremata & problemata eorumque reſolutiones non intelliguntur niſi per definitiones terminorum, qui in iiſdem occurrunt. Incipiendum igitur eſt a definitionibus, quæ ideo propoſitionibus præmittuntur; vel omnes ſimul, quemadmodum in Arithmetica & Geometria fecimus; vel eo ſaltem loco, ubi occurrunt propoſitiones, quæ per eas intelligendæ, quemadmodum in reliquis Matheſeos partibus non ſine ratione factum eſſe apparet.

§. 5. Ad definitiones intelligendas afferenda eſt attentio, ſub initium præſertim moleſta, adeoque omni modo excitanda & fovenda. Conducit huc, ſi definitiones exemplis, veluti in Arithmetica numeris, illuſtrentur, &, in Geometria, ad figuram oculis præſentem applicentur. Ita enim facilius intelliguntur; ut moleſtia vaneſcat, quæ attentionis conſervandæ difficultatem parit. Ita definitio ſimilitudinis illuſtratur exemplis duorum horologiorum, & duorum ædificiorum, quæ in ſcholio definitioni adjecto in medium attulimus (§. 27. *Arith.*). Definitionem partis aliquotæ illuſtramus exemplo lineæ in quatuor partes æquales diviſæ, cum enim pars una quater ſumta lineam integram adæquet, erit ea pars aliquota (§. 30. *Arithm.*). Ita, in ipſa Arithmetica, definitionem numeri quadrati & radicis quadratæ numeris adjectis illuſtravimus, ut tali exemplo non ſit opus. Cum definitiones in Geometria retulerimus ad figuras; me tacente apparet, quomodo ad eas applicari poſſint, veluti dicendo in definitione trianguli æquilateri (§. 88. *Geom.*), quod ſit $AB=BC=CA$ (*Tab. I. Fig.* 16); perinde ac ſi ratiocinio oſtendi deberet, figuram, quæ oculis ſubjicitur, eſſe triangulum æquicrurum. Senſus nimirum, aut imaginatio, quæ ſenſu antea percepta denuo præſentia ſiſtit, attentionem in objectum trahit, cujus idea exhibet, quæ in definitione continentur; quo ipſo & attentio excitatur & conſervatur: cumque definitionem a nobis intelligi nobis jam conſcii ſimus, moleſtia evaneſcit, quam termini non ſatis intellecti primum nobis objiciebant, immo in voluptatem abit, quæ ardorem

ardorem dicendi accendit & inflammat, prout caſus tulerit.

§. 6. Definitiones eo ordine collocantur, ut termini in anterioribus jam fuerint definiti, qui datam ingrediuntur. Ex. gr. Commenſurabilia definiuntur, quod partem aliquotam communem habent, vel eorum unum ſit pars aliquota alterius (*§.* 31. *Arithm.*). Pars vero aliquota jam fuit definita (§. 30. *Arithm.*), immo pars in genere (§. *9. Arithm.*). Similiter Quadratum definitur per figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam (§. *98 Geom.*). Sed figura jam ante (§. 34. *Geom.*), figura quadrilatera (§. *97. Geom.*), figura æquilatera (§. 88. *Geom.*), figura rectangula (§. *97. Geom.*) fuit definita. Unde conſequitur, definitiones legendas eſſe eo ordine, quo in ſingulis diſciplinis numerantur, & definitiones terminorum eſſe repetendas, qui datam ingrediuntur. Ita nimirum obtinetur, ut quælibet earum penitus intelligatur, & animo ingenerentur notiones adæquatæ, in quibus nihil latet obſcuri, ut intellectus plena luce perfruatur. Ex. gr. ubi definitionem commenſurabilium expendere volueris, illuſtranda primum eſt exemplis (§. 5.), utrumque ejus caſum repræſentando in numeris atque lineis. Ad exempla tam arithmetica, quam geometrica applicanda eſt definitio; ita ut primum contentus ſis notionibus confuſis, quas conſpectus numerorum & figurarum ſuggerit. Deinde applicandæ ad eadem exempla ſunt definitiones partis & partis aliquotæ; ita enim futurum, ut definitionem commenſurabilium in utroque quantitatum genere penitus intelligas, nec quicquam relinquatur obſcuri, ubi eadem induſtria in definitionibus anterioribus fueris verſatus. Sint ex. gr. duo numeri 3 & 12. Quoniam 3, ſive ternarius, quater ſumtus, numerum 12, ſive duodenarium adæquat, erit ille hujus pars aliquota (§. 30. *Arithm.*); adeoque numerus unus eſt pars aliquota alterius. Numeri igitur hi 3 & 12 commenſurabiles ſunt. Et quoniam 3, 3, 3 & 3 ſimul conficiunt unum numerum, nempe 12 ſive duodenarium, adeoque idem ſunt cum duodenario; 12 eſt totum, 3, 3, 3 & 3 ſunt ejus partes, conſequenter 3 pars una (§. 9. *Arithm.*). Similiter ſint duo numeri alii *6* & 8, quorum primus componitur ex 2, 2, & 2, ſeu binario ter ſumto, alter ex 2, 2, 2 & 2, ſeu binario quater ſumto. Habent igitur partem aliquotam communem 2 (*§.* 30. *Arithm.*), adeoque commenſurabiles ſunt. Et quia 2, 2 & 2 ſimul ſumti idem ſunt cum *6*, & 2, 2, 2 & 2 ſimul ſumti idem cum 8; in genere etiam patet, eſſe 2 ſive binarium partem ipſorum *6* & 8 (§. *9. Arithm.*), adeoque communem. Idem etiam in lineis repræſentatur, ſi linea AB ter transferatur in CD, ita ut ſit CE=EF=FD=AB. Erit enim AB pars aliquota ipſius CD (§. 30. Tab. II. *Fig.* 14.

(§. 30 *Arithm.*). Unde lineæ AB & CD commenſurabiles ſunt, & CE = AB intelligitur pars ipſius CD (§. 9. *Arithm.*). Eodem modo patet
Tab. I. *Fig.* 2. caſus alter, ſi recta AB concipitur diviſa in tres partes æquales, ut ſit AC = CD = DB, & EF in quatuor partes æquales EG, GH, HI & IF, ut ſit EG = GH = HI = IF ac præterea EG = AC. Erit enim AC pars aliquota communis (§. 30 *Arithm.*), & eadem AC pars utriuſque lineæ AB & EF intelligitur, quia AC + CD + DB & recta AB, itemque EG + GH + HI + IF & recta EF ſunt una eademque linea (§. 9. *Arithm.*). Unde lineas AB & EF commenſurabiles eſſe liquet.

§. 7. Ne evidentiæ quid deſit, probe obſervandum eſt, intellectum lucem fœnerari debere a ſenſu, quatenus huic obvia ſunt, quæ ille concipere debet, ut, dum ſenſus ſuo munere fungitur, intellectus ſua veluti ſponte fungatur itidem ſuo, atque ad cooperandum leniter trahatur; quatenus fieri nequit, ut operationes intellectus ceſſent, dum ſenſus facit quod ſuum eſt, &, attentione in hunc converſa, illarum ne quidem conſcius eſſe videaris, operationibus intellectus cum ſenſuum actionibus perceptione confuſa in unum confuſis. Eo ipſo obtinetur, ut ad rectum intellectus ſeu facultatis cognoſcendi ſuperioris uſum adducaris; dum ſenſu tantummodo, concurrentibus ceteris ſua veluti ſponte facultatibus cognoſcendi inferioribus, imaginatione ſcilicet atque memoria, tibi uti videris: id quod mirifice conducit tyronibus, ut uſui intellectus recto abſque ulla moleſtia adſueſiant. Tyrones enim non adſueti ſunt niſi ſenſuum, imaginationis atque memoriæ uſui, quatenus is haſce indivulſas comites habet. Eum vero, qui requiritur, intellectus uſum hactenus non fecerunt. Quamobrem moleſtum accidit, ſi a ſenſu ad operationes intellectus per ſaltum adducantur.

§. 8. Quamvis adeo levia ac puerilia videantur, quæ de definitionibus rite expendendis inculcavimus (§. 6), ut eædem penitus intelligantur & notiones adæquatæ ab omni obſcuritate liberatæ animo inſinuentur; principiorum tamen pſychologicorum gnarus; quæ in Pſychologia præſertim empirica explicavimus, ex indubia experientia derivata, profunditatem in obviis, non ſine voluptate, deprehendet. Et ubi attenta mente perlegerit, quæ de uſu facultatum, in parte altera Philoſophiæ practicæ univerſalis, ad recte vivendum requiſito demonſtravimus, fructum inde ſperandum facile prævidebit: qui quod quantivis pretii ſit, in dubium minime revocabit. Qui vero Logicam noſtram perluſtravit & inprimis ſibi cognitum atque perſpectum reddidit, quod de praxi ejus docetur; is abunde intelliget quam neceſſarius ſit hic intellectus uſus, de quo in præſenti nobis ſermo eſt. Quodſi ergo in Philoſophia veriori hoſpites contem-

contemnant, quæ nos maximi facimus, & ambages inutiles pronuncient, per quas incedere volumus animum ad Mathemata diſcenda appellentes; ii haud ægre ferant contradictionem, cum nos æquo animo, non indignabundo, feramus contemtum.

§. 9. Quamobrem non piget exemplo etiam geometrico docere, quomodo in perpendendis definitionibus ſit procedendum. Sumamus v. gr. definitionem rhombi, quem definimus (§. 99 *Geom.*), quod ſit figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.
Tab. I. Ut cum idea rhombi notio diſtincta
Fig. 3. animo inſinuetur, nec quicquam in ea relinquatur obſcuri; oculos convertamus neceſſe eſt in figuram L M N O. Numerentur latera L M, M N, N O & L O, quæ numero quatuor deprehenduntur; unde liquet figuram hanc eſſe quadrilateram (§. 97 *Geom.*). Circino capiatur intervallum LM, idemque ſucceſſive transferatur ex M in N, ex N in O atque ex O in L; quo ipſo patet, latera omnia eſſe inter ſe æqualia; atque hinc colligitur, figuram hanc eſſe æquilateram (§. 88 *Geom.*). Contemplemur jam angulos L, M, N & O, quos obliquos eſſe patet (§. 66 *Geom.*); unde infertur, figuram eandem eſſe obliquangulam (§. 97 *Geom.*). Sola attentio ad ea, quæ oculis uſurpamus, omnem ex idea rhombi arcet obſcuritatem, nec quicquam in notione diſtincta relinquit obſcuri, quo minus penitus intelligatur. Quodſi definitiones anteriores, in quas definitio rhombi reſolvitur, rite applices; iis ſuppoſitis familiaribus, notio evadit adæquata.

§. 10. Non ignoro in figuris non requiri veritatem, ſed ſufficere ea ſumi, quæ per definitionem ineſſe debent, ut definitio intelligatur: neque enim demonſtrandum eſſe, quod, in noſtro exemplo, figura L M N O ſit rhombus; ſed docendum potius, qualis eſſe debeat, ut rhombus dici poſſit, ubi non intenditur, niſi ut definitio intelligatur. Ita, in caſu noſtro, ſufficit dicere, ſi figura eſſe debeat rhombus, requiri ut latera LM, MN, NO & LO, quibus terminatur, ſint numero quatuor; ut ſit LM=MN=NO=LO, ſeu ut latera hæc ſingula ſint inter ſe æqualia; ut denique anguli L, M, N & O ſint obliqui. Hoc pacto enim conſtat, quænam figuræ cuidam datæ ineſſe debeant, ut rhombi nomen eidem tribui poſſit: id quod ſufficit ad definitionem intelligendam. Et ubi hæc noveris atque memoriæ mandaveris, verendum non eſt, ne rhombum appelles figuram tibi obviam, quæ hoc nomen non meretur: quo ſane fine definitio præmittitur. Immo patet, quænam de rhombo ſumenda ſint, aut ſumere liceat, ubi alia de eodem demonſtranda, quando ex definitione rhombi deducere volueris, quæ eidem conveniunt: quem alterum eſſe definitionum finem, non minus ex Logica, quam Geometra-

rum & recta methodo philoſophantium praxi conſtat. Ipſa etiam definitionum nominalium natura aliud non requirere videtur, quam ut intelligatur, quænam in ea ſumantur de definito; cum nondum quæratur, utrum definitio ſit poſſibilis, nec ne, ſeu utrum detur iſtiuſmodi ens, cui ea inſint, quæ in definitione ſumuntur; ſed de eo tantum quæſtio ſit, qualia requiramus, ut inſint, ſiquidem id nominis convenire debeat, ſeu quidnam hoc nomine inſignire velimus. Enimvero cum in Matheſi non proponantur definitiones, niſi quæ veræ ſunt; ubi, ſenſuum ope, operationes intellectus elicere &, eorundem beneficio, eidem lucem affundere, atque ad rectam definitionum applicationem tyronem manuducere volueris, nil obſtat, quo minus tacite ſupponas, quod deinceps demonſtrandum, definitionibus ineſſe veritatem, hoc eſt, dari iſtiuſmodi entia, quibus inſunt, quæ in definitione nominali ſumuntur. Abſit itaque, ut tibi perſuadeas, nos eorum, quæ in Logica docemus & in philoſophando, non tantummodo in universa Matheſi, ſancte obſervamus, oblitos tradere, quæ iiſdem contraria ſunt. Ecquis vero adeo veſanus erit, qui reprehendat, quod utilitatis inſignis gratia, abſque ullo præjudicio veritatis, tacite ſumatur quod verum eſt, immo quod ſumi neceſſe eſt, ubi in primo gradu cognitionis humanæ pedem ſiſtere, nec ulterius progredi volueris (§. 1).

§. 11. Etſi itaque præcepta verioris Logicæ, quæ nos tradidiſſe certi ſumus, inviolabilia exiſtimemus, & methodi adeo ſimus tenaces, ut ab iis recedere nefas reputemus; tanta tamen religio minime obſtat, quo minus in favorem ejus faciamus, quod eidem promovendæ conducit. Quamobrem, ut finem tam præclarum ex aſſe conſequamur, quem intendimus (§. 7), & ſenſus omnes ferant ſuppetias intellectui, quæ ab eodem expectari poſſunt; id adhuc monendum eſſe duximus, in exemplis Arithmeticis non arbitrarium eſſe, quocunque modo numeri ſcribantur, quibus definitionem illuſtrare volueris, ſed eos potius ita ſcribendos eſſe, ut ſenſui ſubjiciantur, quæ intellectus concipere tenetur, ut omnis arceatur obſcuritas, & notio evadat tam adæquata, quantum per anteriores definitiones permittitur. Dedimus in ſuperioribus exempla, quibus definitionem commenſurabilium illuſtravimus (§. *6*). Duo ſunt commenſurabilium caſus. Aut enim numerus minor eſt pars aliquota majoris, aut uterque numerus partem aliquotam communem habet (§. 31 *Arithm.*). Exemplum caſus primi præbent numeri 3 & 12, quorum prior quater ſumtus poſteriori fit æqualis. Repræſentandus igitur eſt ternarius tanquam pars duodenarii, definitioni partis convenienter (§. *9 Arithm.*); & tanquam pars aliquota ejuſdem, defi-

definitioni partis aliquotæ conformiter (§. 30 *Arithm.*). Quamobrem non ſufficit, duodenarium, ſive 12, reſolvere in 3, 3, & 3, ſed ipſis etiam oculis quaſi ſpectandum exhiberi debet, quod ternarius ſit pars duodenarii, & hic conſideretur tanquam pars aliquota ejuſdem, quatenus ea oculis uſurpare licet, quæ definitiones partis, atque partis aliquotæ, tamquam notas continent. Exhibetur autem 3 tanquam pars ternarii, ſi ſcribatur $3+3+3+3=12$: etenim ſignum + oſtendit quatuor iſtos ternarios ſimul ſumtos conſtituere duodenarium, ſeu numerum, qui idem eſt cum duodenario. Unde unus intelligitur pars duodenarii (§. 9 *Arithm.*). Et dum apparet, eundem numerum 3 aliquoties, nimirum quater repetitum, numerum 12 adæquare; illum hujus partem aliquotam eſſe perſpicitur (§. 30 *Arith.*). Nimirum, hoc modo, ipſis oculis exhibetur, quod plura, ſcilicet 3, 3, 3 & 3 ſint idem cum uno, ſcilicet 12, & pars una 3 aliquoties, ſcilicet hic quater ſumta, adæquet totum; quemadmodum volunt definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ. Sola igitur hac ſcriptione in conſpectuum adducuntur, quæ in oculos per ſe minime incurrunt, & definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ, inſtar rei viſibilis exhibentur. Dum vero ternarius, ſive 3, etiam ſolitarie ſcribitur, juxta duodenarium in partes ſuas aliquotas reſolutum, quemadmodum hic factum eſſe apparet,

$$3 \qquad 3+3+3+3=12,$$

tum ipſis oculis exhibentur 3 & 12 tanquam duo numeri, qui ad ſe invicem referuntur, & primus 3 repræſentatur tanquam pars aliquota alterius 12; ut nihil inſit in definitione commenſurabilium, quoad caſum primum, quod non pateat conſpectui. Immo, hac ipſa ſcriptione, non minus manifeſtum eſt, quomodo, dato quocunque numero, prodeat alius ipſi commenſurabilis; nimirum, ſi numerus quidam, ſemel poſitus, deinceps ponatur aliquoties, quoties nempe viſum fuerit, & iterato poſiti ſumantur ſimul tanquam unum: id quod clarius perſpicitur, ſi duo vel tria exempla ſibi invicem ſubſcribantur, quemadmodum hic factum vides.

$$\begin{array}{ll} 3 & 3+3=6 \\ 3 & 3+3+3=9 \\ 3 & 3+3+3+3=12 \\ \&c. & \&c. \text{ in infinitum.} \end{array}$$

Ad illuſtrandum caſum alterum, qui in definitione commenſurabilium continetur, adduximus exemplum numerorum 6 & 8, qui partem aliquotam communem 2 habent. Quodſi ergo ſingula ut ante repræſentare volueris, numeri ita ſcribendi ſunt

$$\begin{array}{ll} 2+2+2=6 & 2+2+2+2=8 \\ 2+2+2+2+2=10 & 2+2+2+2+2+2+2=14 \\ \&c. & \&c. \\ \text{in infinitum} & \text{in infinitum.} \end{array}$$

Ita nimirum etiam conſpicitur, quomodo

do numeri commenſurabiles in altero caſu procreentur, nimirum, ſi idem quicunque numerus, veluti hic 2, ponitur toties, quoties libuerit, veluti hic ter, quinquies &c. & deinceps adhuc pluries, veluti hic quater, ſepties &c. ac iterato poſiti ſumantur ſimul tanquam unum. Hoc pacto, definitio commenſurabilium nominalis reducitur ad genericam, adeoque realem : id quod multiplicem habet uſum. Quodſi numeris ſubjiciantur lineæ in tot partes æquales diviſæ; quoties idem numerus repetitur ad conſtituendum numerum eundem; in continuo jam magis claret, quænam ſit vis ſigni +, quo indigitatur plura coaleſcere in unum, ut unum ſit idem cum multis, quemadmodum vult definitio partium, atque totius. (§. 9 *Arith.*)

§. 12. Quoniam in definitionibus partis, atque totius, relativis, quarum una abſque altera intelligi nequit, diverſa utique ſunt pluralitas eorum quæ ad totum conſtituendum concurrunt, plurium concretio qua fit unum ſeu totum conſtituitur, & inde reſultans identitas plurium cum uno; adeoque ubi definitionem penitus intelligere volueris, notionem diſtinctam formaturus, opus habes totidem actibus intellectus, quibus pars & totum concipitur, quot definitioni diverſa inſunt, tanquam totidem notæ. Siquidem ſenſus ſuppetias ferre debet intellectui; ſingulis intellectus operationibus reſpondere debent ſinguli actus externi, qui in ſenſus incurrunt & illas individuas comites habent : id quod in dato caſu obtinetur, ſi numeri, quibus ſimul ſumtis efficitur totum, primum ſcribantur juxta ſe invicem abſque ullo ſigno interpoſito, deinde autem ſignum + interponatur, tandemque iiſdem, hoc ſigno inter ſe connexis, adjiciatur ſignum æqualitatis =, cum nota numerica, qua indigitatur numerus ex iiſdem coaleſcens, veluti in exemplo primo 12, qui ex 3, 3, 3 & 3 in unum coaleſcentibus reſultat. Hac enim ſucceſſiva ſcriptione, eo, quem diximus, ordine facta; actu ſcriptionis primo determinatur intellectus ad concipiendam pluralitatem ad totum conſtituendum concurrentium; actu ſecundo exhibetur concretio in unum, quam cogitare tenemur; & tertio denique repræſentatur plurium cum uno identitas, in quam aciem mentis intendi neceſſe eſt. Hoc pacto efficitur, ut nihil ſit in intellectu, quod non etiam ſit in ſenſu, & ſenſus intellectum blande trahit ad cooperandum, dum operationes intellectus per actus in ſenſum incurrentes determinatur, adeoque, cum actibus ſenſus, una ponuntur; modo animo præſens ſis, attentione allata ad ſingula quæ fiunt. Quodſi ergo in illuſtrandis definitionibus eam, quam monſtramus, viam ingredi volueris; ſenſus ſuppetias omnes ferent intellectui, quas ab eo expectare licet.

§. 13. Si-

§. 13. Simile quid obtinet in exemplis geometricis; ſi ſingulas determinationes, quæ definitionem ingrediuntur, ita ſcribere volueris, ut ad figuram oculis ſubjectam referantur ſigna, quibus repræſentatur. Dedimus in ſuperioribus exemplum rhombi, qui per definitionem eſt figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Quamobrem ſi ſcribas, quemadmodum hic factum eſſe vides,

Tab. I. *Fig. 3.*

$$LM + MN + NO + LO = 4$$

$$LM = MN = NO = LO$$

$$\left.\begin{array}{l} L\\ M\\ N\\ O \end{array}\right\} \text{angulus obliquus}$$

LMNO rhombus;

ipſi ſenſui obvium eſt, quomodo ex determinationibus definitionem ingredientibus, ſeu notis in eadem contentis, colligatur figuram datam eſſe rhombum. Etenim $LM + MN + NO + LO = 4$ indigitat, figuram datam LMNO quatuor habere latera; adeoque æquilateram eſſe: $LM = MN = NO = LO$ ſignificat, latera omnia eſſe inter ſe æqualia; conſequenter figuram datam LMNO eſſe æquilateram: denique

$$\left.\begin{array}{l} L\\ M\\ N\\ O \end{array}\right\} \text{angulus obliquus,}$$

indigitat ſingulos figuræ datæ LMNO angulos eſſe obliquos; conſequenter figuram ipſam obliquangulam. Linea his ſubducta ſignum eſt quo indigitatur, id quod eidem ſubſcribitur, inde inferri, ſeu per ſupra ſcripta determinari; nimirum quod figura oculis ſubjecta LMNO ſit rhombus. Evidens adeo eſt, ad quænam ſucceſſive promovenda ſit attentio, ubi rhombum agnoſcere, atque ab aliis figuris diſtinguere volueris. Hoc pacto ſenſus diſtinguit, quæ intellectus diſtinguere tenetur, dum diſtincte rhombum concipit.

§. 14. Repræſentatio definitionum ſymbolica, qua oculis conſpicienda exhibentur, quæ ab intellectu concipiuntur, eo quidem ordine, quo operationes intellectus eliciuntur, convenit regulis Artis characteriſticæ; cujus theoria, hactenus deſiderata, partem quandam Artis inveniendi abſolvit, propterea quod in inveniendo uſum multiplicem habet, quemadmodum ſuo tempore oſtendemus, ubi, philoſophia ad umbilicum perducta, Artem inveniendi ad eam formam redigemus, qua Logicam exhibuimus. Major enim eſt Artis characteriſticæ uſus, quam vulgo creditur; ut adeo conſultum ſit, quaſi aliud agendo mature eidem adſueſcere. Non loquimur niſi experta, & quæ ex ipſa animæ humanæ natura a priori demonſtrare valemus; etſi a præſenti loco alienum ſit ipſas demonſtrationes afferri, ex principiis noſtris pſychologicis haud difficulter contexendas, ſed Arti inveniendi reſervandas.

§. 15. Unicum eſt, quod hic monuiſſe ſufficiat, ſilentio minime prætereundum; ſcilicet, quod iſta definitionum ſymbolica repræſentatio mirifice conducat ad facilitandam repetitionem, qua eædem memoriæ, abſque ulla moleſtia & mora, infiguntur, & memoria retinentur. Diſtincte nimirum oculis exhibentur, quæ intellectus diſtinguere tenetur in definito ſibi repræſentando, & eo ordine, quo actus intellectus ſeſe invicem excipere debent. Cognitio non modo ſymbolica ad intuitivam reducitur, ſed ipſa etiam ſymbolica intuitivæ aſſimilatur. Nemo autem eſt qui neſciat, ſenſu percepta facilius & tenacius memoria retineri, quam quæ ſola vi intellectus concipiuntur. Et convenit omnino omnem facere facultatum uſum, qui natura nobis conceſſus eſt; ac mature adſuefieri juvat, ut eundem ubivis conſtanter faciamus. Quamobrem & nos per ſtudium mathematicum plura intendimus, quam ut Matheſis ſibi ſola diſcatur; quemadmodum faciunt illi, qui contenti ſunt ea, quæ docentur in Matheſi, cognita atque perſpecta ſibi habere.

§. 16. Erit forſan acutior, qui reprehendet, quod, in illuſtrandis definitionibus, in methodi leges injurii ſimus, quod in illuſtrandis definitionibus anterioribus præſupponamus, quæ demum per ſequentes patent. Objiciet v. gr. nos, in ſymbolica parti aliquotæ repræſentatione (veluti quod $3+3+3+3=12$), ſupponere, quod perſpectæ ſint notæ numericæ, quod notum ſit ſignum additionis, quod ipſam additionis notionem habeamus, cum tamen definitio partis aliquotæ præcedat (§. 30 *Arithm.*), definitio additionis demum ſequatur (§. 61 *Arithm.*) & notæ numericæ in ſequentibus demum (§. 49 *Arith.*), cum ſigno additionis (§. 63 *Arithm.*) explicentur. Immo forſan arguet ipſam additionem præſupponi, quæ demum docetur multo poſt (§. 96 *Arithm.*). Enimvero quicquid eſt hujus difficultatis, id protinus omne evaneſcit, modo attentionem noſtram deſiderari non patiamur. Etenim nemo ad ſtudium Matheſeos, præſertim ad legenda Arithmeticæ noſtra Elementa Latina, accedit adeo rudis, ut notæ numericæ nondum ipſi ſint perſpectæ, & numerare neſciat. Neque lex numerandi & notæ numericæ explicantur eo fine, ut numerare diſcamus & notas numericas cognoſcamus; ſed ut appareat, cur ea numerandi lex ſanciatur, & cur notis iſtis utamur, tum etiam quia hypotheſibus iſtis opus habemus, tanquam principiis ad demonſtrandum ea, quæ ſequuntur. Signum additionis quodnam ſit, anticipando doceri poteſt, ubi ejus uſus requiritur. Neque hic opus eſt, ut notio additionis una explicetur: ſufficit enim moneri, hoc ſigno indigitari, numeros ſimul ſumi debere, ut conſtituatur per eos unus. Multo minus

nus autem præſupponenda eſt additio, cum nemo numerandi peritus neſciat, quomodo numeros exiguos, ſive digitos in unitates, ſiquidem opus eſt, reſolutos connumerare debeat. Accedit, quod nemo facile ad Matheſeos ſtudium, præſertim ad Elementa noſtra Latina legenda ſeſe conferat, qui Algorithmum numerorum integrorum, ſaltem additionem & ſubtractionem, non didicerit. Abunde igitur patet, non præſupponi quæ nondum cognita ſunt, ſed ex inferius traditis demum haurienda, in definitionibus illuſtrandis.

§. 17. Propoſitiones, ſive theoremata fuerint, ſive problemata, primum exponuntur, dum in Arithmetica ad numeros, in Geometria ad figuras delineatas applicantur: id quod ἔκθεσιν, ſive expoſitionem, appellarunt veteres, quam propoſitionibus ſubjecerunt. Sit ex. gr. Theorema 21 Arithmeticæ (§. 181) exponendum, quod ita ſeſe habet. *Si quantitates quaſcunque per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates, quæ dividuntur.* Theorematis hujus expoſitio hæc eſt: Sint duo numeri 24 & 12, qui dividuntur per eundem tertium 3; erunt quoti 8, & 4. Dico eſſe 8 ad 4, ut 24 ad 12. Continet enim 8 bis 4, & 24 itidem bis 12, adeoque numeri proportionales ſunt (§. 155 *Arithm.*). Similiter ſit pars prima theorematis 37, in Geometria (§. 233) exponenda, quæ ita ſe habet: *Si duas lineas parallelas ſecet tranſverſa, erunt anguli alterni æquales.* Expoſitio talis eſt: Sint AB & CD duæ lineæ rectæ, ſitque AB parallela ipſi CD; erunt anguli *y* & *u* alterni (§. 68 *Geom.*). Dico angulum *y* eſſe æqualem angulo *u*. Eodem modo exponuntur problemata. Sit ex. gr. problema 20 Geometriæ (§. 258) cujus hic eſt tenor: *Per datum punctum parallelam rectæ datæ ducere.* Expoſitio hæc erit: Sit data linea recta RS; ſitque datum punctum V ubicunque extra eandem lineam. Ducenda eſt recta quædam alia, quæ tranſit per punctum V, ſitque rectæ alteri RS parallela.

Tab. I. *Fig.* 4.

Tab. I. *Fig.* 5.

§. 18. Nos, brevitatis gratia, in Arithmetica theoremata ita enunciavimus, ut expoſitionem una contineant; dum quantitates deſignavimus literis majoribus, tanquam numeros indeterminatos (§. 13 *Arith.*), in quorum locum facile ſurrogantur numeri determinati notis numericis expreſſi, quales etiam hinc inde exhibemus ad latus demonſtrationis. Ita theorema 21, de quo modo diximus (§. 17), hoc modo proponitur (§. 181 *Arith.*). *Si quantitates quaſcunque* A *&* B *per eandem tertiam* C *dividas; quoti* F *&* G *ſunt inter ſe ut* A *&* B. Conſtat ex paragrapho præcedente theorema hoc pure ſic enunciari: *Si duas quantitates quaſcunque per eandem tertiam dividas, quoti per diviſionem prodeuntes erunt inter ſe, ut quantitates, quæ dividuntur.* Atque adeo liquet, literas majores

A, B, C, F, G nonniſi expoſitionis gratia eſſe adjectas, quæ ita ſeſe habet: *Sint duæ quantitates quæcunque*, A *&* B; *dividatur quantitas* A *per quantitatem* C, *&* *prodeat quotus* F. *Dividatur etiam quantitas* B *per eandem quantitatem* C, *&* *prodeat quotus* G. *Dico eſſe quotum* F *ad quotum* G, *ut quantitatem* A *ad quantitatem* B. Quodſi jam pro literis ſubſtituantur numeri; nimirum 24 pro A, 12 pro B, 3 pro C, 8 pro F, & denique 4 pro G; habebis expoſitionem in numeris, quam ante dedemus (§. 17).

§. 19. Similiter in Geometria propoſitiones retulimus ad figuras æri inciſas, ut expoſitionem una contineant. Ita theorematis 37 pars prima, quam exempli loco adduximus (§. 17), hoc modo proponitur in Geometria (§. 233). *Si duas parallelas* AB *&* CD *ſecet transverſa* EF, *in* G *&* H, *erunt anguli alterni* y *&* u *æquales.* Quodſi literas omittas, habebis theorema pure enunciatum. Ubi vero oculos in figuram iiſdem ſubjectam convertens, idem ad eandem applices, adhibitis literis, quibus lineæ & anguli in ſchemate deſignantur, quemadmodum paulo ante factum eſt (§. 17); habebis expoſitionem. Similiter problema 20 (§. 258 *Geom.*) ita enunciatur: *Per datum punctum* V *parallelam rectæ* RS *ducere.* Omiſſis literis V & RS prodit propoſitio pure enunciata; quæ ad ſchema applicata, ut ante fecimus (§. 17), dat expoſitionem.

Tab. I. Fig. 1.

§. 20. Veteres Geometræ propoſitionem ab expoſitione, tanquam duo diverſa, a ſe invicem diſtinxerunt; atque adeo illam pure enunciarunt, hanc eidem ſubjecerunt. Hunc morem ſecutus eſt Clavius in Elementis Euclidis. Nos expoſitionem cum propoſitione conjunximus, non tam quod in unum confundi velimus, quæ diverſa ſunt, quam ut, brevitatis gratia, quemadmodum jam monuimus (§. 18, 19), una exhiberemus, quæ a lectore ſeparanda ſunt; ne in nimiam molem excreſceret opus, ac præter neceſſitatem evaderet ſumtuoſius.

§. 21. Neceſſe autem eſt propoſitionem pure enunciari, remotis iis, quæ ad expoſitionem ſpectant; cum pure enunciata in uſum futurum memoriæ ſit mandanda; expoſitio autem adhibenda, ut claritas affundatur notioni complexæ, quæ propoſitioni reſpondet, ſine qua intelligi nequit, aut ſaltem non ſatis intelligitur; quemadmodum nil videmus abſque lumine, aut abſque lumine ſufficiente non ſatis clare videmus viſibile. Non tamen opus eſt expoſitionem una memoriæ mandari, cum in applicatione, ratiocinando facta, ejus nullam habeamus rationem; ſed ſufficiat propoſitioni per expoſitionem ſatis intellectæ adhærere, per naturam animæ, ſenſum claritatis, quatenus fieri poteſt, ut expoſitionem addamus, quando exigitur, vel e re eſſe videtur; qua actu affunditur claritas, cujus, dum nunc obſcu-

obſcure percipitur, antea clare perceptæ memoriam habemus.

§. 22. Reſolutiones problematum arithmeticæ ad exempla, geometricæ ad figurarum conſtructiones ſtatim ſunt transferendæ. Singula, quæ fieri præcipiuntur, ſuis numeris diſtinximus. Numerantur autem eo ordine ſingula, quo fieri debent. Quamobrem, cum quælibet reſolutio tot contineat regulas, quot ſunt numeri; lecta prima ſtatim faciendum, quod eadem præcipitur, & progreſſus ordine fieri debet ad ſequentes. Ita nimirum abſque ullo negotio facies, quod fuerat faciendum; & dum hoc facis, regulis affundetur claritas, quæ ad totam reſolutionem intelligendam ſufficit. Quoniam vero in reſolutionibus problematum ſequentium præcipiuntur, quæ quomodo fieri debeant, docetur in anterioribus; igitur neceſſe eſt, ut eo ordine problematum reſolutiones tibi familiares reddas, quo numerantur; ne facturus ea, quæ præcipiuntur, incidas in talia, quæ quomodo fieri debeant nondum noſti, nec unquam antea feciſti. Non eſt, quod excipias, citari in reſolutionibus ea, quæ ex anterioribus præſupponuntur; veluti in reſolutione problematis, de linea alteri parallela per datum punctum ducenda prima, quod paulo ante exempli loco adduximus (§. 19), problema 17 (§. 216 *Geom.*), de linea perpendiculari ex dato puncto in eam demittenda, & problema 16 (§. 212 *Geom.*), de linea perpendiculari ex dato in linea data puncto ad eandem erigenda: ita enim labor multiplicatus difficilis redditur, & moleſtiam parit; quæ, ſublata difficultate, prorſus nulla eſt, ubi jam noveris, quomodo ex puncto dato ad lineam datam perpendicularis ſit demittenda, & ex puncto in eadem dato perpendicularis excitanda, ac utrumque facere valeas.

§. 23. Quoniam vero non ſufficit problematum reſolutiones intelligere, verum etiam habitus comparandus eſt ea faciendi, quæ fieri debent; habitus autem omnis, nonniſi exercitio, adeoque idem iterato agendo, comparatur; a problemate uno non progrediendum ad alterum, niſi ubi ea, quæ in reſolutione præcipiuntur, prompte facere potueris. Hoc enim pacto, nullam ſenties in difficilioribus difficultatem; nec verendum eſt, ne moleſtia faſtidium creet; nec progreſſus deſtituetur voluptate individua comite, quæ ardorem continuo progrediendi ulterius accendit, alit, & auget. Merentur ea, quæ hic dicuntur, attentionem; hoc enim modo acquiruntur ſingulares animi dotes, ad præclara nitenti mirifice profuturæ. Sed de his dicemus nonnulla in ſequentibus.

§. 24. Enimvero, ſi quis omnem uſum Matheſeos facere velit, quem poteſt, eumque magis præclarum, quam qui in cognitione veritatum mathematicarum conſiſtit; in iis perſiſtere non debet, quæ hactenus

nus docuimus. Superſunt alia adhuc obſervanda, de quibus ut dicamus, inſtituti noſtri ratio poſtulat. Nimirum primum, in ſymbolica repræſentatione theorematis, ſicuti in repræſentatione definitionum (§. 11), non perinde eſt, quocunque modo id fiat; ſed id omnino agendum eſt, ut ſenſui tanquam diverſa exhibeantur, quæ intellectus a ſe invicem diſtinguere tenetur, & ut ſingula ipſa ſcriptione a ſe invicem diſtinguantur, quæ in notione propoſitioni reſpondente diſtinguenda veniunt. Omne theorema in duas reſolvitur partes, hypotheſin atque theſin; quarum iſta exhibentur, quæ de ſubjecto ſumuntur, hac vero exhibetur prædicatum quod, vi illorum quæ ſumuntur, de eodem enunciandum, ſeu, propter ea quæ ſumuntur, ponendum. In ſymbolica igitur repræſentatione theorematis, hypotheſis ſcribenda eſt a ſiniſtra, theſis vero a dextra. Quodſi hypotheſis plura continet; ſingula quæ ſumuntur, ſigillatim ſcribi, & eo, quo ſequuntur, ordine ſibi invicem ſubſcribi debent; ita ut ipſa ſcriptione exprimantur eorum ad ſe invicem relationes, quæ ſupponuntur. Et idem obſervandum eſt in theſi, ſiquidem plura continet. Exemplis manifeſtum reddetur, quod obſcurius dictum videri poterat, deficiente idea, a qua claritatem ſuam haurit notio. Sit exempli loco theorema, ad quod ante provocavimus (§. 18). *Si duæ quantitates quæcunque per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates diviſæ.* Hypotheſis theorematis eſt, quod duæ dentur quantitates; quod eædem dividantur per eandem tertiam; quo facto prodeunt duo quoti: theſis vero, quod hi ipſi quoti eam inter ſe habeant rationem, quam habent quantitates diviſæ. Quodſi (quemadmodum ſupra fecimus) quantitates dividendæ exponantur per A & B, dividens per C, quoti vero per F & G, theorema ita repræſentabitur.

Hypotheſis	*Theſis*
A & B quantitates dividendæ C dividens communis. F & G quoti ex diviſione prodeuntes	F : G = A : B.

Idem obſervandum eſt in numeris, per quos theorema exponitur.

24 & 12 Numeri dividendi 3 Diviſor commun. 8 & 4 Quoti ex diviſ. prodeuntes.	8 : 4 = 24 : 12

Immo, ſi ab expreſſione generali obſcuritatem arcere volueris, quæ per naturam ſuam eidem inhæret, non tollendam niſi claritate, quam affundunt ſingularia; numeros literis, quibus quantitates, numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), deſignantur, ſubſcribi oportet, eo, quo hic factum eſſe vides, modo.

A &

A & B Quantitat.		F : G = A : B
24 12 dividendæ.		8 : 4 = 24 : 12
C	Dividens	
3	communis.	
F & G Quoti ex		
8 4 diviſ. prod.		

Quodſi meris ſignis repræſentatio ſymbolica theorematis conſtare debeat; hoc modo quod intendis aſſequeris.

A (F	24 (8	F : G = A : B
C	3	
B (G	12 (4	8 : 4 = 24 : 12
C	3	

Idem fiet hoc modo:

$$\frac{A}{c} = F, \quad \frac{24}{3} = 8 \qquad F : G = A : B$$

$$\frac{B}{c} = G, \quad \frac{12}{3} = 4 \qquad 8 : 4 = 24 : 12$$

§. 25. Demus etiam exemplum unum alterumve geometricum. Theorema 37 (§. 233 *Geom.*) hoc eſt: *Si duas parallelas ſecet transverſa, qui prodeunt* 1° *anguli alterni æquales ſunt*, 2°. *angulus externus æquatur interno oppoſito*, 3°. *duo interni oppoſiti ſunt æquales duobus rectis.* Hypotheſis hæc eſt, quod duæ lineæ ſint parallelæ, & quod eædem ſecentur linea alia transverſa: Theſis autem, quod anguli alterni ſint æquales; quod angulus oppoſitus externus æquetur interno oppoſito; quod denique duo oppoſiti interni ſint æquales duobus rectis. Illa adeo duas habet partes, quæ junctim ſumtæ eandem conſtituunt; hæc autem tria membra quæ ſingula ex eadem hypotheſi ſequuntur; ita ut propoſitio ſit compoſita ex tribus, eandem hypotheſin habentibus, & ad tres haſce categoricas revocetur: 1°. Anguli alterni intra lineas parallelas ſunt æquales; 2°. Angulus externus, ex lineis parallelis per tranſverſam ſectis ortus, æqualis eſt oppoſito interno; 3°. Duo anguli intra lineas parallelas transverſa ſectas orti ſunt æquales duobus rectis. Quodſi hoc theorema eo, quem ſupra diximus (§. 19), modo explices; ſymbolice diſtincte ita repræſentatur:

Hypotheſis.	*Theſis.*	Tab. I. *Fig.* 4.
AB parall. CD	1. $y = u$	
EF ſecat AB & CD	2. $x = u$	
in G & H	3. $o + u = 2R$.	

Theorema 18 (§. 179) pure ita enunciatur: *Si in duobus triangulis fuerit angulus unus unius æqualis angulo uni alterius, & duo latera comprehendentia angulum in uno triangulo fuerint ſigillatim æqualia duobus lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, & duo ad idem anguli reliqui in uno erunt ſigillatim æquales duobus ad idem angulis reliquis in altero triangulo, & tota triangula æqualia & ſimilia erunt.* Hypotheſis hæc eſt, accedente expoſitione, quod in duobus triangulis ACB & *acb*, angulus unus unius A ſit æqualis angulo uni alterius *a*, quod duo latera AC & AB comprehendentia angulum A in uno triangulo, ſint ſigil- Tab. I. *Fig.* 6.

ſigillatim æqualia duobus lateribus *ac* & *ab* comprehendentibus angulum *a* in altero triangulo : theſis vero, quod 1°. latus tertium BC unius ſit æquale lateri tertio *b c* alterius, 2°. quod angulus C in uno ſit æqualis angulo *c* in altero, 3°. quod angulus B in uno ſit æqualis angulo *b* in altero, 4°. quod triangulum ACB ſit æquale & ſimile triangulo *a c b*. Propoſitio adeo denuo compoſita eſt, in qua eidem ſubjecto ſub eadem conditione tribuitur multiplex prædicatum. Quodſi theorema hoc ſymbolice repræſentare volueris, ita diſtincte exhibetur ſcriptum :

Hypotheſis.	*Theſis.*
ang. $A = a$	1. $BC = bc$
$AB = ab$	2. ang. $A = c$
$AC = ac$	3. $B = b$
	4. $\triangle ACB \cong \triangle acb$

Hoc nimirum pacto diſtincte exhibentur ſingula, quæ in hypotheſi ſumuntur, ut ſenſus præſto ſit in formanda notione diſtincta intellectui, quæ eidem reſpondet, nec minus diſtincte in ſenſum incurrunt ſingula, quæ iſtis poſitis una ponuntur : id quod egregium habet uſum, ſive in primo gradu cognitionis ſubſiſtere, ſive ad ſecundum progredi volueris, quemadmodum ex deinceps dicendis plenius conſtabit. Quodſi Ars characteriſtica foret ſatis exculta ; ab omnibus vocabulis in ſymbolica repræſentatione theorematum abſtinere poteramus. Quoniam tamen ſignorum numerus multiplicaretur, quorum uſus tyronibus moleſtior ; conſultius eſt ut paucis ſimus contenti, & ſubinde vocabulis nonnullis abbreviata ſcriptione locum concedamus.

§. 26. In problematis quædam dantur ; quædam fieri, vel inveniri jubentur. Tab. I. *Fig.* 5. Ita in problemate 20 (§. 258. *Geom.*), ad quod ſupra provocavimus (§. 19), datur recta RS, & punctum extra eam V ; jubemur autem per punctum V ducere lineam rectam, quæ ſit ipſi RS parallela. Quodſi ergo problema diſtincte concipere volueris ; quæ dantur, ab eo quod quæritur, hoc eſt, quod vel fieri, vel inveniri jubetur, diſtinguenda, conſequenter ubi problema ſenſui diſtincte repræſentare volueris, verſus ſiniſtram ſcribenda ſunt data, eo modo quo ſingulæ determinationes in hypotheſi theorematis exprimuntur ; verſus dextram vero quæſitum, quemadmodum hic factum eſſe apparet :

Data	*Quæſitum*
Recta AB,	Recta tranſiens
punctum V extra	per V
eam	&
	paral. ipſi AB.

Ita nimirum non modo quæſitum a datis ſeparatur ; verum etiam data ſingula diſtincte exhibentur, non minus quam ſingulæ determinationes quæſiti ; conſequenter ſi hæc figuræ ſubſcribantur, idea ſingula a ſe invicem ſeparata exhibet, quæ in notione problemati reſpondente totidem operationibus

tionibus intellectus diſcernenda ſunt, ut notio evadat diſtincta.

§. 27. Simile quid imitari licet in ipſa reſolutione: id quod inprimis uſui eſt, ubi ad gradum ſecundum cognitionis progredi, nec in primo acquieſcere volueris. Exempli loco ſit reſolutio prima problematis 20 Geometriæ, cum quo nobis jam negotium eſt (§. 26). Ea nimirum ita repræſentatur.

VK perpendicularis ad RS.
T punctum pro arbitrio aſſumtum.
TA perpendicularis ad RS.
TA = VK
MN per V & A tranſiens.

MN parallela RS.

Notandum vero, in denominandis rectis, præponi literam quæ deſignat terminum a quo, unde ducenda eſt recta, quam ducere jubet reſolutio; & ſingula fieri debere eo ordine, quo ſibi invicem ſubſcribuntur. Ita VK indigitat, perpendicularem VK ad RS duci ex puncto V, conſequenter ad rectam RS ex puncto V demitti; TA vero indicat, perpendicularem TA ad RS ducendam eſſe ex puncto T tanquam termino a quo: TA = VK ſignificat, perpendicularem TA æqualem fieri debere antea ductæ VK: Denique MN per VA indicat, rectam MN ducendam eſſe per puncta V & A, quibus datis determinatur ſitus rectæ MN per ſuperius in Geometria oſtenſa. Linea recta ſeparat ea, quæ fieri præcipiuntur, ab iis determinationibus, quas quæſitum habere debet, & quæ infra lineam exhibentur; ſcilicet quod hic linea MN ſit datæ RS parallela. Quod enim tranſeat per punctum V, per ſe manifeſtum eſt, aut ſi mavis per ea, quæ vi reſolutionis facta ſunt, attenta mente conſiderata. Ubi nimirum ad ſecundum cognitionis gradum progredi libuerit, ea, quæ ex reſolutione problematis per ſe manifeſta ſunt quoad quæſitum, probe diſtinguenda ab iis, quæ eſſe dicuntur.

§. 28. Non nego, ſi quis idem facere velit in aliis problematis, quod hic præſtitimus in uno eorum, eoque haud difficili, ut facilius intelligeretur; eidem plura notanda eſſe, quam quæ hic docemus: ſed inſtituti noſtri ratio non fert, ut ſimus prolixiores. Sufficit generalem quandam ideam eorum, quæ facienda ſunt, inſinuaſſe animo lectoris. Quodſi enim hæc probe perpenderit, quæ hic inculcantur; plura ſuo marte aſſequetur, quæ hinc inde præterea requiruntur. Et ſic ubi ſubinde ceſpitat; in progreſſu, ipſemet errores a ſe admiſſos, & quæ melius fieri poterant, animadvertet. Quamobrem diutius hiſce non immoramur.

§. 29. In reſolutionibus numericis problematum, typus calculi ad figuram relatus exhibendus eſt, qui problema cum reſolutione diſtincte repræſentat, & ideam operatricem animo inſinuat, quæ firmior ei-

 dem

dem inhæret, quam reſolutio memoriæ mandata, ita ut hæc non tam facile te fallat. Immo ſi hæc eidem nondum fuerit infixa; ubi ad librum recurrendum, quando reſolutione iſta in praxi opus habes, in typum ſolum exempli oculos convertere ſufficit, quod vi ideæ operatricis, quam repræſentat, totam operationem docet ac dirigit. Quoniam in ipſis Elementis noſtris exempla hoc modo exhibuimus, non opus eſt, niſi ut unum lucis affundendæ gratia huc tranſcribamus. Siſtimus adeo illud, quod ad illuſtrandum problema 13 Trigonometriæ planæ (§. 36 *Trigon.*) in medium adduximus. Problema hoc eſt: *Datis duobus angulis una cum latere uni eorum oppoſito invenire latus alteri oppoſitum.* Typus vero exempli problema cum reſolutione repræſentans talis eſt:

Data	*Quæſitum.*
C = 48° 35′	BC
A = 57° 28′	
AB = 74′	

Tab. I. *Fig. 6.*

Calculus.

Log. Sin. C	9. 8750142
Log. AB	1. 8692317
Log. Sin. A	9. 9258681
Log. AB + Log. ſin. A	11. 7950998
Log. BC	1. 9200856

= Log. AB + Log. Sin. A − Log. Sin. C.

Quodſi enim oculos in exemplum hoc modo repræſentatum convertas; ſtatim liquet dari duos angulos A & C, una cum latere AB uni eorum C oppoſito; & quæri latus BC, quod opponitur alteri A. Typus calculi oſtendit, ex tabulis excerpendos eſſe logarithmos ſinus anguli C, lateris AB & ſinus anguli A. Logarithmos lateris AB & ſinus anguli A addendos, & a ſumma ſubtrahendum eſſe logarithmum ſinus anguli C, ut relinquatur logarithmus lateris quæſiti BC, in Canone Logarithmorum evolvendus, ut pateat numerus lateri quæſito reſpondens.

§. 30. Abunde hactenus docuimus, quomodo ad gradum primum cognitionis perveniatur, ut nihil ſuperſit in notionibus obſcuri, ſed omnia penitus intelligantur. Agedum itaque! progrediamur ad ſecundum, cui acquirendo inſerviunt demonſtrationes. Quoniam ad demonſtrationem accedere non licet, niſi propoſitione rite intellecta; gradus ſecundus primum ſupponit; conſequenter, quæ in antecedentibus præcepimus, ea ante fieri debent, quam ad demonſtrationem diſtincte percipiendam animum appellas. Quamobrem, qui utrumque gradum una eademque opera acquirere ſtudet; & ea obſervare tenetur, quæ de primo inculcavimus, & facere ea, quæ de ſecundo jam addemus.

§. 31. Demonſtrationes ex ratiociniis contextæ ſunt eo modo inter ſe concatenatis, quem in Logica (§. 551 & ſeqq.) ſatis perſpicue explicavimus, & mox uberius dicenda reddent manifeſtum. Ratiocinatio, tertia mentis ſeu intellectus operatio, involvit duas priores, primam atque ſecundam, notionem ſcilicet atque judicium, una cum uſu facultatum inferiorum, ſenſus ſcilicet, imaginationis atque memoriæ, & iis animæ actibus, per quos fit tranſitus ab uſu facultatum inferiorum ad uſum ſuperiorum, attentione nimirum atque reflexione: quæ denuo parumper attentis ad ſequentia manifeſta evadent, modo facultatum animæ notiones ex Pſychologia habuerint perſpectas. Quodſi ergo a primo cognitionis gradu ad ſecundum per ſaltum aſcendere nolueris; demonſtrationibus ante utendum eſt mechanicis, quam ad eas progrediaris, quæ vi intellectus concipiuntur, ſeu ejus operationibus abſolvuntur.

§. 32. Quid ſit demonſtratio mechanica, in Lexico Mathematico docuimus. Nimirum, juxta hypotheſin theorematis conſtruuntur figuræ; quo facto, ea una determinantur, quæ in theſi continentur, ſeu vi illorum, quæ in hypotheſi ſumuntur de ſubjecto, eidem attribuuntur. Quamobrem, num ea, quæ una determinantur, talia ſint, ope inſtrumentorum examinanda. Sit exempli loco theorema 18 Geometriæ (§. 179 *Geom.*), ad quod ſupra provocavimus (§. 25), ſcilicet, *Si angulus unus trianguli unius ſit æqualis angulo uni trianguli alterius, & latera comprehendentia angulum iſtum in uno triangulo ſint ſigillatim æqualia lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; quod etiam latus tertium unius trianguli ſit æquale lateri tertio alterius, quod duo anguli reliqui unius ſint ſigillatim æquales duobus angulis alterius, quod tota triangula æqualia & denique ſimilia ſint.* Conſtrue triangulum ABC, prout viſum fuerit; deinde ducatur recta *a b*, & ex *a* in *b* transferatur intervallum AB; in *a* excitetur angulus ipſi A æqualis; & in crus *a c* transferatur intervallum AC. Quodſi jam puncta *c* & *b* connectantur recta *b c*, prodit triangulum alterum *a b c*. Jam ubi circino capis intervallum BC, & circini crus unum colloces in *b*, crus alterum attinget punctum *c*. Vides itaque latus trianguli *a b c* tertium *b c* eſſe æquale lateri tertio BC alterius trianguli ABC. Ex punctis C, B, *c* & *b*, arbitraria circini apertura, ſed eadem, deſcribantur arcus, angulorum iſtorum menſuræ (§. 57 *Geom.*). Quodſi ope circini examines arcus ex centris C & *c*, itemque ex centris B & *b* deſcriptos; bini ſinguli deprehenduntur æquales (289 *Geom.*), atque hinc angulorum C & *c*, itemque B & *b* æqualitas colligitur (§. 141 *Geom.*). Exſcindantur ex charta, in qua delineata

Tab. I. Fig. 6.

ſunt, triangula ACB & *a c b*; & triangulum *a c b* ponatur ſuper altero ACB, ea quidem lege, ut punctum *a* in A, & recta *a b* ſuper AB cadat; videbis triangulum *a c b* coincidere cum triangulo ACB, ſeu illud huic congruere (§. 3. *Geom.*). Atque, ex congruentia, triangula ACB & *a c b* æqualia eſſe intelliguntur (§. 161 *Geom.*), vi notionis etiam communis: communiter enim ex congruentia æqualitatem æſtimant omnes. Immo quia non minus laterum *b c* & BC, itemque angulorum *b* & B, *c* & C congruentia oculis obvia eſt; vi notionis etiam communis, colligitur eorundem æqualitas, nempe quod ſit $bc = BC$, $b = B$ & $c = C$; ita ut examinibus anterioribus ope circini factis non ſit opus. Denique ubi ad animum revocas, eſſe $a = A$, $ab = AB$ & $ac = AC$ per hypotheſin, aſt $b = B$, $c = C$ & $bc = BC$ per examen, quod inſtituiſti; cum præter angulos & latera nihil reperias in triangulis iſtis, per quæ a ſe invicem diſcerni poſſint; eadem quoque triangula *a c b* & ACB ſimilia deprehendis (§. 24. *Arithm.*). Similiter ubi theorema 37 (§. 233 *Geom.*) demonſtrare volueris: *Si duas parallelas ſecet transverſa, erunt anguli alterni æquales, angulus externus æquatur interno oppoſito & duo interni oppoſiti ſunt æquales duobus rectis*; ducenda eſt 1°. linea CD; deinde 2°. altera AB eidem parallela, ad quamcunque diſtantiam, cum ea non determinetur in hypotheſi; & 3°. pro arbitrio recta EF, quæ oblique ſecat parallelam utramque in G & H. 4°. Ex puncto interſectionis G ducatur arcus intra crura ipſius anguli *y*, & eodem radio ex puncto interſectionis altero arcus intra crura anguli *u*; quo facto, ut ante, ex æqualitate menſurarum colligis æqualitatem angulorum. Quodſi 5°. ex centro G eodem radio ducas arcum intra crura anguli *x*; ex æqualitate menſurarum anguli *x* & *u* colligis æqualitatem horum angulorum. Denique 6°. duc etiam ex centro G eodem adhuc radio anguli *o* menſuram; videbisque menſuras angulorum *o* & *u*, quarum hæc eadem deprehenditur cum menſura anguli *x*, ſemicirculum complere: unde colligis eos eſſe duobus rectis æquales.

Tab. I. Fig. 8.

§. 33. Abſit autem, ut tibi perſuadeas, demonſtrationes haſce mechanicas in locum ceterarum ſurrogari poſſe, quas ſcientificas appellare libet in oppoſitione ad mechanicas. Etenim quod per mechanicas patet, nonniſi verum eſſe intelligitur de figura, quam deſcripſiſti & præ manibus habes; adeoque theorematis veritas perſpicitur nonniſi in caſu ſingulari. Enimvero demonſtratio, ex hypotheſi theorematis ratiocinando, veritatem theorematis manifeſtat univerſaliter. Demonſtratio tamen mechanica univerſalitatem loquitur, quatenus patet, ea, quæ ex aſſumtis inferuntur in theoremate,

te, per conſtructionem ſemper talia determinari debere. Nolo tamen de his dicere diſertius, propterea quod vix conveniunt illorum captui, quibus demonſtrationes mechanicæ ſatisfaciunt. Conſultum etiam eſt, ut demonſtrationes mechanicæ ad formam ſcientificarum reducantur, quantum datur, ut ad haſce quaſi manuducant. Sed talia relinquenda ſunt circumſpectioni illorum, qui erudiendis aliis præficiuntur. Ceterum exemplum præbet demonſtratio theorematis geometrici mechanica de congruentia triangulorum, quam modo dedimus (§. 31), ubi ex congruentia laterum *b c* & BC, angulorum *b* & B, itemque *c* & C, atque triangulorum *a c b* & ACB colligitur eorundem æqualitas, quemadmodum in demonſtratione ſcientifica.

§. 34. Demonſtrationes mechanicæ æquipollent exemplis numericis, quæ veritatem theorematum & problematum in caſu ſingulari perſpiciendam præbent. Atque adeo facile patet, quid fieri debeat, ſi ſimile quid circa theoremata arithmetica tentes. Quod vero etiam hic formæ demonſtrationis ſcientificæ ratio haberi poſſit, manifeſtis ſpeciminibus docuimus in Arithmetica de geneſi numerorum quadratorum (§. 262 *Arithm.*), de geneſi numerorum cubicorum (§. 277, 280 *Arithm.*), de numeris æquidifferentibus (§. 327, 329 *Arithm.*). Quoniam vero hiſce ſpeciminibus profundiora inſunt, quæ ad tertium cognitionis gradum viam ſternunt; de iis plura nobis dicenda ſunt in ſequentibus. Diximus iſtiuſmodi demonſtrationes in Arithmetica oculares; quia oculis conſpicienda ſiſtunt, quæ in ſcientifica intellectus concipere debet. Et loquuntur univerſalitatem ex eadem ratione, quam modo dedimus de mechanicis theorematum geometricorum demonſtrationibus (§. 32). Vix tamen ratio ſatis manifeſta erit iis, qui, in Ontologia nondum verſati, non capiunt quomodo, poſitis determinantibus, ponatur determinatum. Sane memini, Mathematicos primi ordinis hæſitaſſe in talibus, quæ principio iſti ſuperſtruuntur. Nec mirum: ignoratis enim, vel ſaltem non diſtincte expenſis principiis, a quibus principiata pendent, horum veritas non perſpicitur.

§. 35. Exempla, quibus veritas propoſitionis perſpicitur in numeris, qualia ſunt, quæ in Arithmetica ſubinde adduximus, & quibus propoſitiones illuſtrari debere ſupra præcepimus (§. 17), ſi coacerventur, pluribus in medium allatis, parere inductionem, quam dicunt Logici (§. 478 *Logarith.*), nemo eſt qui neſciat. Quoniam figuræ in charta delineatæ non minus ſingularia repræſentant, quam notæ numericæ; quilibet concedere tenetur, ſi demonſtratio mechanica in pluribus figuris inſtituatur, ſimiliter prodire inductionem. In utroque igitur caſu certitudo major non eſt, quam

quam quæ ab inductione expectari poteſt. Non eſt quod excipias, hoc pacto, etiam in demonſtrationibus ſcientificis, a ſingulari ad univerſale argumentari, cum eædem ad figuras in charta delineatas referantur. Etenim quod demonſtratur, non de figura in charta delineata demonſtratur; ſed ex aſſumtis, univerſaliter ratiocinando, colligitur quod erat demonſtrandum; demonſtratio autem refertur ad figuram in charta delineatam, ut notionibus affundatur claritas, ne in demonſtratione intelligenda hæſitemus. Inde eſt, quod ſchematiſmorum in Geometria non requiratur veritas, quæ in uſum demonſtrationum delineantur: ſufficit enim talia ſupponi, qualia in hypotheſi ſumuntur, neque enim ex iis, quæ figuræ delineatæ revera inſunt, ſed potius ex illis, quæ in hypotheſi ſumuntur & figuræ ineſſe ſupponuntur, procedit ratiocinatio.

§. 36. Demonſtrationes iſtæ mechanicæ ſatisfaciunt iis, qui in primo cognitionis gradu acquieſcunt. Faciunt enim ad perſpiciendum veritatem in ſingulari. Eo autem contenti ſunt, qui ulterius progredi nolunt; utpote nullum habentes ſenſum ejus convictionis, qui per demonſtrationes genuinas, quas ſcientificas dicere libuit, demum producitur. Non tamen nullius prorſus uſus ſunt ceteris. Quoniam enim veritatem in ſingulari perſpiciendam præbent; ad nexum prædicati cum ſubjecto, ſeu ejus, quod ex aſſumptis in hypotheſi colligendum, cum iiſdem, pervidendum conducunt; ut clarius intelligatur, quid demonſtrari debeat, ſeu quomodo theſis ab hypotheſi pendeat. Immo cum veritas, quamprimum perſpicitur, delectet; voluptate quadam perfunditur animus tyronis, ubi videt, poſita hypotheſi, poni theſin, ſeu per aſſumta determinari, quæ de ſubjecto prædicanda ſunt. Hac voluptate non modo tollitur tædium, ex prævifa difficultate percipiendæ demonſtrationis, ſive vera, ſive imaginaria oriundum; verum etiam ardor accenditur demonſtrationis percipiendæ, & ad eam percipiendam animus redditur attentus. Novi equidem exercitationibus moleſtum accidere, ubi animum ante ad demonſtrationem mechanicam advertere jubentur, quam ad ſcientificam accedant, & hac moleſtia effici impatientes, quod per inutiles ambages incedere debeant: id quod inprimis accidit iis, qui animum ſciendi cupidum poſſident. Etenimvero, quæ initio ſtudii mathematici commendantur, ea in progreſſu prætermittuntur, quando iiſdem non amplius opus habemus. A ſyllabizatione incipimus, quando legere diſcimus: ab ea abſtinemus, quamprimum eadem non amplius habemus opus. Ecquis vero damnet ſyllabizationem, quod exercitatiores eadem in legendo non habent opus? Quamobrem velim ut de iis, quæ hic inculcantur,

non

non feratur judicium, niſi ſingulis rite expenſis. Notandum quoque non omnia ingenia eſſe velocia; ſed dari etiam tarda; & tarda effici ſtudii utiliſſimi deſertores, niſi moleſtiæ, qua deterrentur, tempeſtive afferatur medela. Sunt vero ſubinde tarda ingenia optima, quando nimirum naturali quodam veritatis intime perſpiciendæ impetu feruntur, ut alia taceamus.

§. 37. Demonſtrationes continua ratiocinatione abſolvuntur, & ex aſſumtis procedunt. Aſſumta continentur in hypotheſi, quæ ſingula demonſtrationem ingredi debent. Ab his igitur exordiendum; redigendo in propoſitiones aſſumta, & ex anterioribus ſumendo principia, quæ vel in definitionum, vel axiomatum, & poſtulatorum, vel propoſitionum jam demonſtratarum numero ſunt, terminum communem cum iſtis habentia, qui ipſe principium iſtud veluti ſponte ſua in memoriam revocat, ubi anteriora eidem firmiter infixa tenueris. Quæ prodeunt concluſiones ſumuntur deinceps eodem modo, quo ea, quæ hypotheſis continebat; eodemque modo ratiocinando progrediendum, donec inferantur ea, quæ theſis ſiſtit. Unde facile apparet, apprime opus eſſe, ut concluſiones per ſingula ratiocinia elicitæ probe notentur, & ad tollendam omnem moleſtiam oculis ſubjiciantur: id quod ope ſymbolicæ repræſentationis fieri poſſe dudum docuimus, non minus in Ratione Prælectionum Sect. 1, c. 2, §. 38, 50, quam in Logica tam minori c. §. quam majori (*not.* §. 551 *& ſeqq.*). Conſultum vero eſt, ut hic exemplo uno alteroque illuſtrentur, quæ modo diximus, cum ampliſſimum habeant uſum, deinceps diſertius exponendum. Hic tantum modo obſervamus, quod neglecta hac demonſtrationum reſolutione, & ſymbolica earundem repræſentatione, ſtudium mathematicum reddatur difficile, & plurimis idem deſerendi cauſa detur.

§. 38. Exemplum facillimum præbet theorema ſextum Geometriæ (§. 156 *Geom.*), cujus hic eſt tenor: *Si recta quædam ſecet rectam aliam, anguli verticales ad punctum interſectionis æquales ſunt.* Theorema ſymbolice ita repræſentatur:

Hypotheſis.	*Theſis.*	Tab. I. *Fig.* 9.
CD recta data,	$o = x$	
AB recta eam ſecans,		
E punctum interſectionis, adeoque		
o & x anguli verticales (§. 67 *Geom.*).		

Patet itaque æqualitatem angulorum verticalium o & x demonſtrandam eſſe ex eo, quod oriantur interſectione rectarum CD & AB ad punctum interſectionis E. Quodſi ergo omnia minutiſſime perſequi volueris, convenienter definitionibus, quæ in Elementis noſtris præmiſimus, ut in tota demonſtratione nihil

admittatur, quod confuſe ſaltem percipitur, ratiocinatio ita inſtituenda. In hypotheſin ad figuram oculis præſentem relatam, qualem exhibet ſymbolica ejus repræſentatio eidem ſubjicienda, non minus oculos conjiciens, quam animum advertens, vides CD eſſe rectam, quam in E ſecat recta alia AB, adeoque angulos *o* & *y* habere crus unum AE commune, & crus alterum CE anguli *o* in directum ſitum eſſe cruri alteri ED anguli *y*; adeoque definitio nominalis angulorum deinceps poſitorum, quam ex reali, inſtar corollarii, deduximus (§. 63 *Geom.*), tibi ſuggerit hoc principium: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum duo crura reliqua in directum jacent, ſunt anguli deinceps poſiti. Unde infertur: Angulos *o* & *y* eſſe deinceps poſitos. Quodſi primam hanc concluſionem ſumas tanquam præmiſſam ſyllogiſmi, & tam ſubjectum, quam prædicatum perpendis, memoriam ſubit theorema Geometriæ quintum (§. 147 *Geom.*): Duo anguli deinceps poſiti ſunt æquales duobus rectis; quod præbet majorem novi ſyllogiſmi. Ex his præmiſſis colligis concluſionem: Ergo anguli *o* & *y* ſunt æquales duobus rectis, quæ probe notanda in uſum ſequentem. Quodſi jam porro oculos in hypotheſin ad figuram oculis præſentem conjicis, & animum ad eandem advertis; denuo vides, AB eſſe rectam, quæ ſecat alteram CD, adeoque angulos *y* & *x* habere crus commune ED, & crura reliqua AE & EB in directum ſita eſſe; atque hoc formas judicium intuitivum: Anguli *y* & *x* habent crus commune & eorum crura reliqua in directum jacent. Ad hoc ſi animum attendis, memoria ſuggerit denuo definitionem nominalem angulorum deinceps poſitorum, quam, corollarii inſtar, ex reali deduximus (§. 63 *Geom.*) & hoc ſuppeditat principium, quod ad concluſionem modo elicitam, tanquam præmiſſam novi ſyllogiſmi aſſumtum, vicem alterius præmiſſæ tuetur: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum crura reliqua in directum jacent, ſunt anguli deinceps poſiti. Ex his igitur præmiſſis infers concluſionem: Anguli *y* & *x* ſunt anguli deinceps poſiti. Quodſi porro hanc concluſionem ſumas præmiſſam ſyllogiſmi novi, animum ad eam advertenti ſuccurrit theorema (§. 147 *Geom.*): Anguli deinceps poſiti ſunt æquales duobus rectis. Ex his itaque præmiſſis infers concluſionem: Ergo anguli *y* & *x* ſunt æquales duobus rectis. Quodſi jam in duas concluſiones, *o* & *y* ſunt æquales duobus rectis, *x* & *y* ſunt æquales duobus rectis, oculos conjicis, & ſuper iiſdem reflectis; attendenti manifeſtum eſt: angulos *y* & *x* atque angulos *o* & *y* eſſe duo æqualia eidem tertio, quod hic ſunt duo recti. Quamobrem ſi judi-

judicium hoc quaſi intuitivum ſumas, inſtar præmiſſæ novi ſyllogiſmi; memoria ſuggerit principium, quod antea didiciſti (§. 87 *Arithm.*): Æqualia eidem tertio ſunt æqualia inter ſe. Ex his adeo præmiſſis infers: Anguli *o* & *y* ſimul ſumti ſunt æquales angulis *y* & *x* ſimul ſumtis. Enimvero theſis, ubi in eam oculos conjicis, attendenti loquitur demonſtrandum eſſe, quod angulus *o* ſit æqualis angulo *x*. Quamobrem vides angulum *y* utrinque eſſe auferendum, ut anguli *o* & *x* relinquantur: quod dum fieri ſupponitur, patet, quod idem ab æqualibus auferatur. Hoc igitur ſi ſumis, ſuccurrit denuo principium, quod in Arithmetica didiciſti (§. 91 *Arithm.*): Si æqualia ab æqualibus auferas, vel idem ab æqualibus, quæ relinquuntur æqualia ſunt. Unde porro concludis: Anguli *o* & *x*, qui hic relinquuntur, æquales ſunt. Atque ſic patet, demonſtratum eſſe, quod demonſtrandum fuiſſe theſis inſinuat.

§. 39. Diſtinctiſſime adeo docuimus, quomodo concipienda ſit demonſtratio, ut omnem conſequatur evidentiam, quam habere poteſt. Quodſi jam eandem ſymbolice repræſentare volueris, ut omnem quoque conſequatur claritatem, quam habere poteſt, omnisque in ea concipienda tollatur difficultas; hoc modo ipſum fieri debet:

I.

AE crus commune ang. *o* & *y*.
CE in directum ſitum ipſi ED

---

o & *y* anguli deinceps poſiti

---

1. $o + y = 2$ R.

II.

ED crus commune ang. *y* & *x*
AE in directum ſitum ipſi EB

---

y & *x* anguli deinceps poſiti

---

2. $y + x = 2$ R.

III.

$o + y = 2$ R. *vi num.* 1.
$y + x = 2$ R. *vi num.* 2.

$y + o = y + x$

$o = x$ *Q. E. D.*

Notandum hic, lineam a ſe invicem ſeparare, quæ ſumuntur, & quod ex iis concluditur. Illa ſupra lineam collocantur, hoc infra eandem conſtituitur. Quod intra duas lineas deprehenditur, duplici modo conſiderari, nimirum 1°. tanquam concluſionem, quæ ex aſſumtis colligitur, & 2°. tanquam aſſumtum, unde ulterius infertur, quod infra lineam alteram ſcribitur. Vides autem porro, primo loco *num. I*, & *num. II*, aſſumta ex hypotheſi peti, ac inde duplici ratiocinio elici concluſionem *num.* 1, & alteram *num.* 2. Exhauſta

ſic hypotheſi, *num. III.* ſumuntur concluſiones *num.* 1. & 2 ex hypotheſi elicitæ; ac inde porro duplici ratiocinio tandem elicitur, quod in theſi continetur, eſſe $o = x$, ſeu angulos verticales eſſe æquales. Repræſentatio hæc demonſtrationis ſymbolica tantummodo propoſitionem minorem & concluſionem uniuscujuſque ſyllogiſmi exhibet, qui demonſtrationem ingreditur; adeoque ſyllogiſmos ad enthymemata reducit; omiſſis principiis, quæ unicuique ſyllogiſmo majorem præbent, ac facile ſupplentur ex regulis logicis; immo ſua veluti ſponte memoriam ſubeunt, ubi ea familiaria experiris; vel per citationem in contextu poſitam reperiri poſſunt, ubi memoriæ nondum fuerint infixa. Atque adeo abunde patet, nihil hic deſiderari, quod ad demonſtrationem diſtincte concipiendam requiritur, & non minus ad evidentiam quoad illationem demonſtrationi conciliandam, quam ad claritatem omnem eidem affundendam, ne quicquam obſcuri ſuperſit, ſed ut penitus intelligatur, deſideratur.

§. 40. Demus adhuc exemplum aliud. Sit demonſtrandum theorema 18 Geometriæ, de quo diximus ſuperius (§. 25). *Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem & latera eundem comprehendentia ſigillatim æqualia; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, duo anguli reliqui erunt ſigillatim æquales, & tota triangula æqualia atque ſimilia.* Quoniam ex hypotheſi ratiocinatio nondum procedit, quemadmodum in caſu anteriore (§. 38, 39); præterea in uſum demonſtrationis quædam adhuc alia ſumuntur, quæ ſumi poſſe patet. Ubi vero hoc fieri ſolet, tum quæ ulterius ſupponuntur, præparationem conſtituere dicuntur. Eſt itaque hoc in caſu, ubi æqualitatem & ſimilitudinem ex principio congruentiæ demonſtraturi ſumus, præparatio hæc (§. 3 *Geom.*). Triangulum unum ponatur ſuper altero, ita ut vertex angulorum æqualium unius ponatur ſuper vertice alterius & crus illius unum cadat ſuper crure uno alterius. Quæ in præparatione ſumuntur, ea tanquam ad hypotheſin ſpectantia conſiderantur, nullo inter hypotheſin & præparationem, quoad uſum aſſumtorum in demonſtrando, facto diſcrimine. Dico quoad uſum aſſumtorum in demonſtrando: alias enim manifeſtum eſt diſcrimen inter ea, quæ in hypotheſi, & ea, quæ in præparatione ſumuntur. Etenim per ea ſola, quæ in hypotheſi ſumuntur, determinantur ea, quæ ſubjecto tribuenda & de eodem adeo demonſtranda veniunt: quæ vero in præparatione ſumuntur, non alium habent uſum, quam ut ex ſumtis in hypotheſi procedat ratiocinatio. Nimirum quæ in præparatione ſumuntur, per ea, quæ ſumuntur in hypotheſi non determinantur; alias enim

ratiocinando ex iiſdem colligi poterant, nec ulla foret ratio, cur ſumerentur. Sumi autem poſſunt non invito principio contradictionis, quatenus hypotheſi non repugnant, ſed cum iis, quæ in eadem continentur, una conſiſtunt. Abſoluta itaque præparatione demonſtratio ordine naturali, qualem requirit uſus facultatum animæ, ita procedit.

Tab. I. Fig. 6. §. 41. Vertex anguli *a* cadit in verticem anguli A, & crus illius *ab* in crus alterius AB, per præparationem, eſtque angulus *a* æqualis ipſi *A*, per hypotheſin. Hæc ubi perpendis, ſuccurrit theorema 12 (§. 166 *Geom.*). Si fuerint duo anguli æquales, & vertex unius ponatur ſuper verticem alterius, ac præterea crus unum illius ſuper crure uno hujus; etiam crus alterum illius ſuper crus alterum hujus cadit. Unde infertur: 1°. crus *ac* anguli *a* ſuper crure AC anguli A cadit. Jam porro *a* cadit in A & *ab* ſuper AB, per præparationem, & *ab*=AB, per hypotheſin. Ad hæc animum advertenti ſuccurrit: Si recta quædam alteri æqualis ita applicetur, ut terminus ejus unus cadat ſuper terminum unum alterius, ac ipſa cadat in alteram; etiam alter ejus terminus in terminum alterum alterius cadit (§. 169 *Geom.*). Unde infertur 2°. rectæ *ab* punctum *b* cadere in punctum B rectæ alterius AB. Similiter punctum *a* cadit in A, per præparationem, & *ac* ſuper AC per demonſtrata *num.* 1, eſtque *ac* =AC, per hypotheſin. Succurrit igitur denuo principium modo commemoratum, indeque infertur: 3°. punctum *c* cadere in C. Atque hæc ſunt, quæ ex hypotheſi, accedente præparatione, ratiocinando colliguntur. Enimvero quoniam in hiſce concluſionibus nondum continentur, quæ demonſtranda loquitur theſis; hæc ex illis continuata ratiocinatione colligenda. Ad concluſiones modo elicitas perſpicienti manifeſtum eſt, quod punctum *c* in C per demonſtrata *num.* 3, & punctum *b* in B per demonſtrata *num.* 2 cadere; unde formatur hoc judicium quaſi intuitivum: Rectæ *bc* & BC intra eoſdem terminos continentur (§. 11 *Geom.*). Vi definitionis congruentiæ (§. 3 *Geom.*), memoria ſuggerit hoc principium. Quæ intra eoſdem terminos continentur, ea ſibi mutuo congruunt. Hinc infertur concluſio: Recta *bc* congruit rectæ BC. Hanc concluſionem ſi ſumas inſtar præmiſſæ novi ſyllogiſmi; memoria ſuggerit hoc principium (§. 161 *Geom.*): Quæ ſibi mutuo congruunt, ea ſunt æqualia. Unde infertur: I. recta *bc* æqualis eſt rectæ BC; quod erat primum, eorum ſcilicet, quæ vi theſeos demonſtranda. Porro *b* cadit in B, per demonſtrata *num.* 2, *ba* in BA, per præparationem, & *bc* in BC, per demonſtrata *num.* 2 & *n.* 3, atque §. 170. *Geom.* Habemus adeo duos angulos *b* & B, quorum vertices *b* & B

 atque

atque crura *b c* & BC, itemque *b a* & BA coincidunt. Enimvero ſi vertex & crura angulorum duorum coincidunt, anguli æquales ſunt (§. 167 *Geom.*). Ergo II, angulus *b* æqualis eſt ipſi B; quod erat ſecundum, eorum ſcilicet, quæ vi theſeos demonſtranda. Similiter punctum *c* in C cadit per demonſtrata *num.* 3, & *c a* in CA per demonſtrata *num.* 1, item *c b* in CB per demonſtrata *num.* 2 & *num.* 3, atque §. 170 *Geom.* Habemus igitur denuo duos angulos *c* & C, quorum vertices & crura coincidunt. Denuo ad hoc animum advertenti ſuccurrit principium: Si duorum angulorum vertices & crura coincidunt, anguli æquales ſunt. Unde infertur concluſio III, anguli *c* & C æquales ſunt; quod erat tertium. Denique *a* cadit in A, per præparationem, *b* in B, per demonſtrata *num.* 2, & *c* in C per demonſtrata *num.* 3, adeoque patet triangula *a c b* & ACB intra eoſdem terminos contineri (§. 11, 170 *Geom.*). Hoc ipſum perpendenti ſuccurrit; Quæ intra eoſdem terminos continentur, ea ſibi mutuo congruunt (§. 3 *Geom.*). Unde colligitur: Triangula *a c b* & ACB ſibi mutuo congruunt. Quodſi hanc concluſionem ſumas tanquam præmiſſam novi ſyllogiſmi, memoriam ſubit principium (§. 161 *Geom.*): Quæ ſibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & ſimilia ſunt. Unde infertur IV, triangula *a c b* & ACB æqualia & ſimilia ſunt; quod erat quartum. Integram adeo demonſtrationem abſolvimus, cum vi theſeos nihil amplius demonſtrandum reſtet.

§. 42. Quodſi ſymbolicam demonſtrationis hujus repræſentationem deſideres, qua ſingula veluti oculis conſpicienda exhibentur; ea ita ſeſe habet:

Hypotheſis	*Theſis.*
ang. $a = A$	I. $bc = BC$
$ab = AB$	II. ang. $b = B$
$ac = AC$	III. $c = C$
	IV. $\triangle acb \cong \triangle ACB$

Tab. I. *Fig.* 6.

Præparatio.

a cadit in A
a b cadit in AB

Demonſtratio.

I.

a cadit in A, *per præparat.*
a b cadit in AB, *per eandem.*
$a = A$, *per hypoth.*

1°. *a c* cadit in AC

II.

$ab = AB$, *per hypoth.*
a cadit in A, *per præparat.*
a b cadit in AB, *per eandem.*

2°. *b* cadit in B

III.

a cadit in A, *per præparat.*
a c cadit in AC, *per demonſtr. num.* 1.
$ac = AC$, *per hypoth.*

3°. *c* cadit in C

IV.

c cadit in C, *per demonſtr. num.* 3.
b cadit in B, *per demonſtr. num.* 2.

adeo-

adeoque
b c & BC intra eoſdem terminos continentur.

Recta *b c* congruit ipſi BC

I. *b c*=BC
V.
b cadit in B, *per demonſtr. num.* 2.
b a cadit in BA *per præparat.*
b c cadit in BC *per demonſtr. num.* 2. & *num.* 3 & §. 170 *Geom.*

II. angulus *b*=B
VI.
c cadit in C, *per demonſtr. num.* 3.
c a cadit in CA *per demonſtr. num.* 1.
c b cadit in CB, *per demonſtr. num.* 2. & *num.* 3. & §. 170 *Geom.*

III. angulus *c*=C
VII.
a cadit in A, *per præparat.*
b cadit in B, *per demonſtr. num.* 2.
c cadit in C, *per demonſtr. num.* 3.
adeoque
△△ *acb* & ACB intra eoſdem terminos continentur (§. 11, 170 *Geom.*)

△ *a c b* congruit △ ACB

IV. △ *a c b* ≌ △ ACB

§. 43. Atque ita totam demonſtrationem in ſua prima principia reſolvimus, ex quibus facultatum noſtrarum uſu deducitur, non admiſſis notionibus confuſis, quæ obſcuritatem quandam relinquere poterant, & ratiociniis diſtincte atque naturali ordine expreſſis, ac inter ſe concatenatis, ut nihil deſit evidentiæ (§. 41). Singula hæc ipſis oculis ſpectanda exhibet repræſentatio demonſtrationis reſolutæ ſymbolica (§. 42). Etenim conſpicitur, quomodo demonſtratio ex hypotheſi & præparatione, tanquam ex aſſumtis procedat; quemnam utriusque uſum faciamus in demonſtrando; & cur præparatione opus ſit; nec non quomodo ſeſe habeant ea, quæ præparatio ſuperaddit, ad ea quæ in hypotheſi continentur. Videmus porro, quomodo omnes determinationes in hypotheſi contentæ invehantur in demonſtrationem; ut tandem, ex omnibus ſimul ſumtis, concludatur unumquodque eorum, quod in theſi continetur, tanquam determinatum ex determinantibus. Videmus quoque, quomodo ratiocinia concatenentur, introductis concluſionibus præcedentium in ſequentia. Videmus denique, quomodo ratiocinia ultima terminentur in iis, quæ demonſtranda loquitur theſis, ut manifeſtum ſit demonſtrationem eſſe abſolutam.

§. 44. Habet autem repræſentatio demonſtrationis ſymbolica hunc uſum, ut eandem facilitet & omnem difficultatem arceat. Oritur difficultas ex ratiociniorum continuandorum longa ſerie, & concluſiones, quæ in præcedentibus ratiociniis fuerant elicitæ, memoria retinendæ, ut eas intro-

introducere liceat in ſequentes per modum præmiſſarum, ubi non ſtatim, quando illatæ fuerunt, in locum præmiſſæ aſſumuntur in ſyllogiſmo proxime ſequente, quemadmodum in exemplo primo factum eſſe apparet *num.* I, & II, (§. 39) & in præſenti *num.* IV, & VII. Enimvero, ſi demonſtratio ſymbolice repræſentetur, gradum ſiſtere licet in ſingulis, quæ ſigillatim expreſſa exhibentur, & quacunque mora interpoſita redeunti progredi datur, ac ſi nulla interpoſita fuiſſet. Quantacunque igitur fuerit ratiociniorum eo uſque continuandorum ſeries, donec perveniatur ad ea, quæ demonſtranda fuerant; non tamen defatigabitur animus ratiocinationi in longa ſerie continuandæ minus adſuetus. Nec diſtrahitur animus, quocunque, durante illa quam interponere viſum eſt mora, cogitationes tuas convertas. Non interrumpitur eadem attentio, quæ ad demonſtrationem afferenda, ne deſit ſenſus evidentiæ ad convictionem plenariam requiſitus. Immo dum omnia, ad quæ animus advertendus, oculis ſpectanda ſubjicit, attentionem mirifice juvat, ſive ea excitanda, ſive conſervanda fuerit. Neque defatigatur imaginatio, atque memoria; quatenus concluſiones ſyllogiſmorum anteriorum retinendæ, ut earum prompte meminerimus, dum in ſyllogiſmos ſequentes introducendæ; cum oculis in ea, quæ diſtincte ſcripta cernuntur, converſis, ſua ſeſe ſponte ſiſtant, quamprimum earundem meminiſſe debemus. Neque etiam hæſitas in eo, quomodo progrediendum ſit in demonſtratione, donec abſolvatur. Etenim clariſſime vides, primum formari propoſitiones ex iis, quæ in hypotheſi &, ubi ea non ſufficit ſola, in præparatione ſumuntur, ut, adſcitis principiis, ex anterioribus inferantur concluſiones, donec hypotheſis & præparatio fuerit exhauſta. In locum hypotheſeos & præparationis, deinde ſuccedunt concluſiones hoc pacto elicitæ, & quomodo introducendæ ſint in novos ſyllogiſmos, tum theſis, quæ demonſtranda oculis objicit, tum memoria principiorum, quæ conſpectus concluſionum & in theſi contentorum offert, oſtendit. Quodſi adeo principia anteriora familiaria experiris, in diſtincte concipienda demonſtratione nihil prorſus difficultatis percipitur. Redduntur autem familiaria, ſi eo, quem præſcripſimus, modo expendantur, & ſymbolicæ repræſentationes, quas explicavimus, aliquoties animo recolantur.

§. 45. Qui principia, quibus opus habet, nondum adeo familiaria experitur, ut ſponte ſua memoriam ſubeant, quoties iiſdem opus eſt; ei inſerviunt citationes demonſtrationibus in contextu inſertæ. Hæ enim oſtendunt paragraphum, in quo principium continetur, quod ad propoſitionem, vel ex hypotheſi ac præparatione formatam, vel ex concluſionibus

nibus jam elicitis aſſumtam aut derivatam, applicatum concluſioni eliciendæ inſervit. Patebit hoc, demonſtrationis ſymbolicam repræſentationem cum contextu conferenti, ut adeo opus non ſit plura in hanc rem afferri.

§. 46. Notandum nimirum, in contextu demonſtrationem conciſius proponi; quantum ſufficit, ut ſingula ſuggerantur, quæ animum ſubire debent, ubi illam diſtincte concipere volueris. Quodſi tamen contextum cum reſolutione, qualem hic præcepimus, & repræſentatione ſymbolica, qualem exhibuimus, conferre volueris; facile obſervabis, demonſtrationem in contextu poſitam eſſe utriuſque directorium, ne hæſites in eo, quid fieri debeat. Facile adeo animadvertes, demonſtrationes ita a nobis fuiſſe expreſſas, ut huic inſtituto maxime conveniant. Diſces etiam, reſolvendo demonſtrationes eo, quem præcepimus, modo, & ſymbolice repræſentando, eaſdem minime effici prolixiores: cum ſupplendo ea, quæ conſpectus ſchematiſmi ſuggerit & quæ citationes inſinuant, eodem prorſus ordine prodeant ſingula ratiocinia, quo eadem poſuimus. Immo, ſi ſufficiente attentione uti volueris, in te ipſo experieris, deeſſe adhuc aliquid ſenſui evidentiæ, quamdiu ſingula ratiocinia non formaveris; præſertim ubi uno vel altero exemplo eundem acquiſiveris, ut ne ignores differentiam, quæ inter diſtinctam & confuſam perceptionem intercedit. Abſit itaque ut tibi perſuadeas, hic a nobis præcipi, quæ a contextu abhorrent, ac per inutiles ambages ad ſcopum tendi.

§. 47. Enimvero non inconſultum eſſe videtur, ut exemplum quoque demonſtrationis theorematis arithmetici in medium afferamus. Sumamus itaque theorema 21 (§. 181 *Arithm.*), quo ſuperius uſi ſumus (§. 24) & quod ita habet: *Si duas quaſcunque quantitates per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates diviſæ.* Theorema hoc ſymbolice ita repræſentatur:

Hypotheſis.	*Theſis.*
A & B quantitates dividendæ,	F : G = A : B.
C dividens communis,	
F & G quoti ex diviſione prodeuntes	

Patet itaque demonſtrandum eſſe, quotos F & G eſſe quantitatibus A & B proportionales, ex eo, quod prodeant ex diviſione quantitatum A & B per eandem tertiam C. Quodſi ergo ex hypotheſi ſumis: Quotus F prodit ex diviſione quantitatis A per quantitatem C; ex anterioribus (§. 174 *Arithm.*) ſuccurrit principium: In diviſione unitas eſt ad diviſorem, ut quotus ad dividendum. Unde infertur: 1, ſive unitas, eſt ad C ut F ad A. Quodſi porro ex hypotheſi ſumis: Quotus G prodit ex diviſione quantitatis B per quantitatem

titatem C; vi ejuſdem principii infertur: unitas, ſive 1, eſt ad C ut G ad B. Exhauſta hypotheſi, ut inde nihil amplius concludi poſſit, ubi concluſiones modo elicitas inter ſe confers, patebit rationes F ad A, & G ad B, eſſe duas rationes eidem tertiæ 1 ad C æquales. Succurrit itaque theorema (§. 167 *Arithm.*): Rationes æquales eidem tertiæ ſunt æquales inter ſe. Atque hinc infertur: Rationes F ad A & G ad B eſſe æquales, ſeu eſſe F : A = G : B. Enimvero theſis oſtendit, quæri quomodo ſeſe habeat A ad B. Huc ſi animum advertas, ſuccurrit theorema 18 (§. 173 *Arithm.*): Quantitates proportionales etiam alternando proportionales ſunt. Atque adeo tandem infertur, eſſe F : G = A : B, quod erat demonſtrandum.

§. 48. Symbolica demonſtrationis hujus repræſentatio hæc eſt:

Hypotheſis.	*Theſis.*
$\frac{A}{C} = F$	$F : G = A : B$
$\frac{B}{C} = G$	

Demonſtratio.

I.

$\frac{A}{C} = F$, *per hypotheſin.*

1°. $1 : C = F : A$

II.

$\frac{B}{C} = G$, *per hypotheſin.*

2°. $1 : C = G : B$

III.

$1 : C = F : A$, *per demonſtrata n.* 1.
$1 : C = G : B$, *per demonſtrata n.* 2.

$F : A = G : B$

$F : G = A : B$ *Q. E. D.*

Nulla hic opus eſt præparatione, cum ſola hypotheſis ea contineat, unde vi principiorum anteriorum tandem infertur concluſio, quæ vi theſeos inde elicienda. Quodſi majoris perſpicuitatis gratia in numeris demonſtrationem repræſentare volueris, non alia re opus eſt, quam ut literis ſubſtituantur numeri; eo modo, quo hic factum eſſe vides:

Hypotheſis.	*Theſis.*
$\frac{24}{3} = 8$	$8 : 4 = 24 : 12$
$\frac{12}{3} = 4$	

Demonſtratio.

I.

$\frac{24}{3} = 8$, *per hypotheſin.*

1°. $1 : 3 = 8 : 24$

II.

II.

$\frac{12}{3} = 4$, *per hypotheſin.*

2°. 1 : 3 = 4 : 12

III.

1 : 3 = 8 : 24, *per demonſtrata n.* 1.
1 : 3 = 4 : 12, *per demonſtrata n.* 2.

8 : 24 = 4 : 12

8 : 4 = 24 : 12 *Q. E. D.*

Poſſunt etiam numeri quantitatibus per literas deſignatis ſubſcribi, vel ad latus adjici, prout ſupra factum eſſe apparet (§. 24), ut claritate ſua diſpellant obſcuritatem, quæ ſignis iſtis univerſalibus adhærere videtur, quamdiu iiſdem nondum ſatis fueris adſuetus. Ceterum ſi demonſtrationem in numeris exhibere volueris, eadem demonſtratione ad plura exempla applicata, abſque ulla moleſtia fit repetitio, quod idem agendo ſemper aliud agere tibi videris, quatenus numerorum diverſitas varietatem quandam inducit.

§. 49. Cum repræſentatio demonſtrationis in numeris non ſit niſi ipſa demonſtratio ſcientifica, ſeu generalis, ad exemplum aliquod, majoris perſpicuitatis gratia, applicata; quemadmodum in Geometria demonſtratio applicatur ad figuram in charta delineatam, quæ ſingulare exemplum præbet; ideo in eadem acquieſcere licet, nec opus eſt, ut iiſdem ſigna univerſalia ſubſtituas; modo tibi caveas, ne in ratiocinia tacite invehas determinationes nonnullas, quæ inſunt numeris aſſumtis, non vero hypotheſi. Etenim tum demonſtratio non ſuccedit, niſi in eo caſu, ubi iſtæ determinationes adſunt; conſequenter tantummodo caſum quendam particularem attingit, nec univerſaliter demonſtratur, quod erat demonſtrandum. Atque adeo contingere poteſt, ut, dum concluſio in caſu particulari elicita habetur pro univerſali, in errorem incidas. Enimvero error hic præcavetur, modo probe conſideres, num quod aſſumis, concluſionis inferendæ gratia, totum in hypotheſi contineatur, aut per præparationem ſuperaccedat, ſi præterea aliud quid ſumitur, nulla habita ratione eorum, quæ numeris qua talibus inſunt. Ita enim certum eſt, in omni exemplo alio ratiocinationem eodem modo procedere, nec argumentationem fieri ab eo, quod huic exemplo ineſt ſingulare, ſed ab eo, quod cum omnibus aliis ſub hypotheſi contentis commune habet. Ex. gr. in exemplo noſtro (§. 48), quoti 8 & 4, *num. I. & II*, ſunt numeri integri rationales. Aſt principium, quo mediante hinc inferimus concluſiones, ſcilicet quod in omni diviſione ſit ut unitas ad diviſorem, ita quotus ad dividendum, ſatis oſtendit, concluſionem inferri ex eo, quod 8 & 4 ſint quoti

per diviſionem duorum numerorum 24 & 12, per eundem tertium 3 prodeuntes, nec ſupponi quotum eſſe numerum integrum rationalem; conſequenter nihil hypotheſi ſuperaddi, dum demonſtratio ad exemplum aliquod ſingulare applicatur. Ceterum, quæ hic dicuntur probe notanda ſunt, cum uſum habeant etiam extra Matheſin, atque in partibus Matheſeos mixtis, & in cognitione Naturæ mathematica, ubi majore circumſpectione opus eſt, quam in Arithmetica: præſertim ſi theoria accurata nondum proſtat, unde haurienda ſunt principia demonſtrandi; nec diſtinctis ratiociniis in demonſtrando fueris adſuetus; qualia requirit noſtra demonſtrationum reſolutio, earundemque ſymbolica repræſentatio, ſecundum leges animæ, naturali ordine ex hypotheſi &, quæ ſubinde eidem ſuperaccedere debet, præparatione, tanquam ex fonte ſuo, profluentia, quemadmodum ex principiis Pſychologiæ empiricæ demonſtrari poteſt nullo negotio, modo ea habueris perſpecta.

§. 50. Quoniam demonſtrationis univerſalitati nil quicquam decedit, dum ad exemplum aliquod applicatur (§. 49); ab ejus repræſentatione in numeris facile abſtrahitur demonſtratio, qualem libro inſeri convenit; ſi quæ aſſumuntur, & concluſiones quæ hinc inferuntur, verbis enuncientur, & concluſionibus adjiciantur citationes principiorum, quorum vi hæ inferuntur. Ita in caſu dato (§. 48) talis prodit demonſtratio: Quoniam quoti ex diviſione duarum quantitatum per eandem tertiam reſultant, per hypotheſin; quilibet eorum eſt ad quantitatem diviſam ut unitas ad tertiam, quæ utramque dividit (§. 174 *Arithm.*); conſequenter quoti ad quantitates diviſas eandem habent rationem (§. 167 *Arithm.*). Sunt igitur inter ſe ut quantitates diviſæ (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

§. 51. Quodſi problema aliquod demonſtrandum eſt; notandum idem converti in theorema, ſumta reſolutione cum datis tanquam hypotheſi, & eo, quod fieri debet, tanquam theſi. Ex. gr. Problema de ducenda linea alteri parallela, per punctum extra ipſam datum, adhibita reſolutione prima, quam ſuperius exempli loco produximus (§. 27), in hoc theorema convertitur: Si ex puncto, extra lineam dato, demittatur ad lineam datam perpendicularis; & ex puncto alio intra eandem pro arbitrio aſſumto, erigatur perpendicularis altera eidem æqualis: recta per punctum datum & extremum perpendicularis alterius tranſiens eſt lineæ datæ parallela.

§. 52. Ubi problema in theorema fuerit converſum, reſolutio demonſtrationis eodem modo abſolvitur, quo in demonſtrationibus theorematum reſolvendis uſi ſumus (§. 38, 41 & 47). Sit ex. gr. reſolvenda demonſtratio problematis, quod modo ad theorema revoca-

revocavimus (*§.* 51); demonſtratio
Tab. I. ita procedit. Recta VK, ex puncto V
Fig. 5. extra lineam RS dato, ducta eſt ad eandem perpendicularis; recta TA, ex puncto T intra rectam RS pro arbitrio aſſumta, eſt itidem ad eandem perpendicularis, alterique perpendiculari VK æqualis, per conſtructionem ſeu reſolutionem; adeoque perpendicula, inter rectam datam RS & rectam per punctum V & A ductam intercepta, VK & TA æqualia ſunt. Enimvero ſi perpendicula inter duas lineas intercepta æqualia ſunt, lineæ iſtæ ſunt parallelæ (§. 226 *Geom.*). Linea igitur, ducta per punctum datum V & extremum A alterius perpendicularis TA, eſt parallela lineæ datæ RS. *Q. e. d.* Videmus adeo ex iis, quæ conſtructio, juxta reſolutionem problematis facta, ſuggerit, unico ſyllogiſmo inferri, quod demonſtrandum erat: quæ ratio eſt, cur nullam in contextu demonſtrationem adjecerimus, ſed tantummodo citationem principii, vi cujus ex conſtructione infertur, quod erat demonſtrandum, nempe paralleliſmus linearum RS & MN.

§. 53. Symbolica demonſtrationis hujus repræſentatio nihil prorſus difficultatis habet. Etenim non alia re opus eſt, quam ut repræſentationi ſymbolicæ reſolutionis ſupra datæ (§. 27) adſcribas data ex repræſentatione problematis ſymbolica, & ad ſummum adjicias propoſitionem ex iiſdem formatam; prouti hic factum eſſe vides:

Hypotheſis.	*Theſis.*
Recta RS data,	MN paral. RS.
Punctum V extra eam datum,	
VK perpendicularis ad RS,	
T punctum pro arbitrio aſſumtum,	
TA=VK,	
MN tranſiens per V & A.	

Demonſtratio.

VK & TA perpendicula inter MN & RS,
atque VK=TA.

MN parallela ipſi RS. *Q. e. d.*

§. 54. Quoniam demonſtratio problematis, quod exempli loco in medium protulimus (§. 51 & ſeqq.), perbrevis eſt, utpote quæ nonniſi unico ſyllogiſmo conſtat; non inconſultum videtur addere exemplum adhuc aliud. Sumamus itaque problema 33 Geometriæ de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Sunt itaque data rectæ duæ AB & BE; Tab. I.
quæſitum eſt recta BD media pro- *Fig.* 10.
portionalis inter AB & BE. Reſolutio jubet rectas AB & BE jungi in directum, ut prodeat recta AE; ſuper AE deſcribi ſemicirculum ADE: & ex B erigi perpendicularem BD ſemicirculo in D occurrentem; quæ eſſe dicitur media proportionalis inter AB & BE. Quodſi ergo problema demonſtrare volueris, reſolutione in hypotheſin verſa & propoſitione pro theſi ſumta; ſequens prodit theorema. Si ſuper recta AE deſcribatur

ſemicirculus, & ex puncto quocunque diametri B erigatur perpendicularis BD ſemicirculo in D occurrens; erit ea inter ſegmenta diametri AB & BE media proportionalis.

§. 55. Quodſi jam hoc theorema demonſtrare volueris, præparatio accedere debet. Ducantur itaque rectæ AD & DE, chordæ arcus ſemicirculi cognomines ſubtendentes, ut prodeant triangula ADB, BDE & ADE. Quo facto demonſtratio ita reſolvitur. Sumimus ex conſtructione: Recta BD perpendicularis eſt ad AE. Hoc ubi perpendis, definitio perpendicularis lineæ ſuggerit hoc principium (§. 78 *Geom.*): Si linea recta fuerit ad alteram perpendicularis, anguli, quos cum ea efficit, recti ſunt & æquales (§. 79 *Geom.*). Unde infertur angulos *m* & *n* eſſe rectos & æquales. Porro rectæ AD & DE ſemicirculum ſubtendunt, vi præparationis & AE diameter circuli eſt, per conſtructionem. Unde patet, quod ADE ſit angulus in ſemicirculo. Huc ſi animum advertis ſuccurrit theorema (§. 317 *Geom.*): Angulus in ſemicirculo rectus eſt. Unde infertur: angulus ADE ſeu $o + x$ rectus eſt. Eſt vero etiam angulus *m* rectus, per demonſtrata. Quamobrem, ſi angulum *m* ad angulum $o + x$ referas, ſuccurrit principium (§. 145 *Geom.*): omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt. Unde infertur: angulus *m* trianguli ADB eſt æqualis angulo $o + x$ trianguli ADE. Enimvero angulus *y* utrique triangulo ADB & ADE communis eſt, atque adeo duo in hiſce triangulis anguli æquales ſunt. Memoria ſuggerit, ſiquidem anteriora eidem mandaveris, quemadmodum fieri debet, adeoque hic ſupponitur: Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, etiam tertius unius æqualis eſt tertio alterius (§. 246 *Geom.*). Hinc itaque colligitur angulum *o* in triangulo ADB eſſe æqualem angulo *z* in triangulo ADE. Quodſi jam angulos in triangulis ADB & DBE inter ſe confers, tum patet duos angulos *m* & *o* trianguli ADB eſſe ſigillatim æquales duobus angulis *n* & *z* alterius trianguli DBE. Succurrit itaque, ex anterioribus memoriæ probe infixis, principium: ſi duo anguli unius trianguli fuerint ſigillatim æquales duobus angulis alterius, triangula latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia habent (§. 267 *Geom.*). Hinc infertur, latera AB & BD in triangulo ABD eſſe proportionalia lateribus BD & BE in triangulo DBE, quorum ſcilicet illa opponuntur angulis *o* & *y*, hi vero angulis *z* & *x*, angulo *o* exiſtente æquali angulo *z* & angulo *y* æquali angulo *x*, per demonſtrata. Habemus adeo $AB : BD = BD : BE$. *Q. e. d.* Ita demonſtrationem reſolvimus, ut ſingula diſtincte enuncientur, quæ in notionibus continentur, quæ eandem abſolvunt, & præſentes animo

ejus

ejus eſſe debent, qui eadem convincitur.

Tab. I. Fig. 9. §. 56. Demonſtratio problematis hujus ſymbolice ita repræſentatur.

Hypotheſis.	*Theſis.*
AB recta data	BD recta quæſita.
BE recta data	AB : BD = BD : BE.
AE diameter ſemicirculi	
ADE ſemicirculus	
AB, BE } Segmenta diametri	

Præparatio.

AD & DE chordæ ſemicirculum ſubtendentes.

Demonſtratio.

I.

BD perpendicularis ad AE, *per conſtr.*

1°. m & n anguli recti & $m = n$

II.

AD & DE ſemicirc. ſubtendunt, *per præparat.*
AE diameter circuli, *per conſtruct.* adeoque
ADE angulus in ſemicirculo.

2°. angulus $o + x$ rectus.

III.

ang. $o + x$ rectus, *per demonſtr. num.* 2.
m rectus, *per demonſtr. num.* 1.

3°. $o + x = m$.

IV.

in △△ ADE & ABD
$o + x = m$, *per demonſtr. num.* 3.
$y = y$

---

4. $z = o$.

V.

in △△ ADB & DBE
$m = n$, *per demonſtrat. num.* 1.
$o = z$, *per demonſtrat. num.* 4.

5°. $y = x$ &
AB : BD = BD : BE. *Q. e. d.*

§. 57. Atque adeo patet, inter demonſtrationem theorematis & problematis nullam intercedere differentiam, modo problema in theorema convertatur, quemadmodum id fieri debere præcepimus (§. 51, 54). Et hoc pacto docuimus omnia, quæ obſervanda ſunt ei, qui ad ſecundum cognitionis humanæ gradum adſpirat. Unicum adhuc moneri conſultum ducimus; ſcilicet quod ex reſolutione demonſtrationum pateat, cur propoſitiones pure enunciare debeamus, quas brevitatis gratia in contextu ſtatim ad figuras retulimus, expoſitione cum propoſitione in unum confuſa. Etenim ubi diſtincte ratiocinari volueris, quemadmodum exigit reſolutio demonſtrationis; neceſſe eſt ut propoſitiones ſingulæ pure enuncientur. Quamobrem etiam pure enunciatæ memoriæ mandandæ; cum alias applicatio, in caſu dato, ob literarum figuris adſcripta-

ſcriptarum diverſitatem, confundat, ut difficilis ac moleſta evadat. In addiſcenda igitur Matheſi morem veterum ſequi tenemur, ut primum propoſitionem unamquamque pure enunciemus, ac deinde eandem exponamus, ſeparata expoſitione a propoſitione, quando eidem immixta.

§. 58. Quodſi objicias, nos nihil dixiſſe de corollariis, quorum tamen bene multa in Elementis noſtris occurrunt: facilis eſt reſponſio. Corollaria enim ſunt propoſitiones, quarum veritas perſpicitur per definitionem, vel propoſitionem, cui ſubjiciuntur. Quoniam pleraque eorum demonſtratione indigent, quam per modum principii ingreditur definitio, vel propoſitio, cui ſubjiciuntur; quæ de reſolutione & ſymbolica repræſentatione propoſitionum diximus, ea quoque de corollariis tenenda. Nimirum propoſitio pure enuncianda, deinde exponenda, expoſita in hypotheſin & theſin reſolvenda, quarum utraque conſueto more ſymbolice repræſentata. Demonſtratio deinde, eodem modo reſolvenda, quo eandem in anterioribus reſolvimus, eodem etiam modo ſymbolice repræſentanda, quo eandem in anterioribus repræſentavimus. Nullis igitur peculiaribus præceptis hic opus.

§. 59. Ne quicquam in dictis ſuperſit obſcuri, exemplum aliquod ſuperaddere lubet. Sumamus itaque corollarium quartum theorematis 34 (§. 228 *Geom.*), quod revera eſt corollarium præcedentis tertii; cum non theorema ipſum, ſed ejus corollarium tertium ingrediatur demonſtrationem tanquam principium. Propoſitio in eodem contenta hæc eſt: *Si in triangulo rectangulo cathetus unus ſumatur pro baſi, erit alter altitudo.* Hæc propoſitio ita exponitur. Sit MKL triangulum, MK & KL catheti ejus. Dico ſi KL ſumatur pro baſi, fore MK altitudinem ejus. Hypotheſis adeo eſt quod triangulum MKL ſit rectangulum, MK & KL ſint catheti, & KL ſumatur pro baſi; theſis autem, quod cathetus MK ſit altitudo trianguli. Demonſtratio ita reſolvitur, ſi nihil perceptioni confuſæ tribuere, ſed ſingula ad notionem diſtinctam reducere volueris. Figura MKL triangulum rectangulum eſt, per hypotheſin. Succurrit definitio 52 (§. 91 *Geom.*): In triangulo rectangulo angulus unus rectus eſt. Unde concluditur: In figura MKL angulus unus rectus eſt: Porro latera MK & KL ſunt catheti, per hypotheſin. Succurrit definitio 57 (*§. 96 Geom.*). Catheti trianguli rectanguli angulum rectum intercipiunt. Unde infertur. Angulus K rectus eſt. Studio utor ſyllogiſmo cryptico, quem a crypſi facile liberabit in Logica verſatus, tum quia ſyllogiſmi cryptici frequentiſſime ſua veluti ſponte ſeſe offerunt in demonſtrationibus, manifeſti autem

Tab. I *Fig.* 11

tem ſtudio quærendi; tum ut crypſeos in ratiocinando idea animo ſeſe inſinuet profutura in Logica, ubi theoria ſyllogiſmorum crypticorum traditur. Ceterum hanc concluſionem, quam modo intulimus, unica etiam ratiocinatione colligere licet hoc modo: Angulum K in triangulo rectangulo MKL catheti intercipiunt, per hypotheſin. Angulus in triangulo rectangulo, quem catheti intercipiunt, rectus eſt. Ergo angulus K rectus eſt. Ex eo, quod angulus K rectus ſit, per immediatam conſequentiam infertur: Cathetum MK cum altero KL efficere rectum. Quodſi hanc concluſionem ſumas tanquam præmiſſam novi ſyllogiſmi, vi definitionis lineæ perpendicularis (*§.* 78 *Geom.*) ſuccurrit principium: Linea recta cum altera efficiens angulum rectum ad eandem perpendicularis eſt. Unde colligitur: Cathetus MK ad alterum KL perpendicularis eſt. Quodſi perpendas ex puncto M ad rectam KL ductam eſſe perpendicularem MK, ſuccurrit vi definitionis 47 (§. 85 *Geom.*) principium: punctum, ex quo perpendicularis ad rectam duci poteſt, eidem rectæ opponitur; quod ſcilicet ex definitione, animo obverſante per conſequentiam immediatam elicitur. Unde infertur: Punctum M catheto trianguli KL opponitur. Jam rectæ KM & LM in puncto M concurrunt ad formandum angulum KML, ut adeo M ſit vertex hujus anguli, quod per definitionem 26 (§. 54 *Geom.*) patet, nec demum per ratiocinia diſtincta elicere lubet. Hoc ubi perpendis, ac præterea ex hypotheſi ſumis quod KL ſit baſis trianguli, ſuccurrit definitio 74 (§. 114 *Geom.*): Vertex figuræ eſt vertex anguli baſi oppoſitus. Unde infertur: Punctum M eſt vertex figuræ ſeu trianguli MKL. Recordatus quod MK ſit ad KL perpendicularis, per demonſtrationem, hoc formas judicium: Cathetus MK eſt perpendiculum ex vertice trianguli M in baſin KL demiſſum. Quodſi denique huc animum advertis, ſuccurrit principium (§. 227 *Geom.*): Perpendiculum ex vertice figuræ in baſin ejus demiſſum eſt altitudo figuræ. Atque hinc tandem concludis: Cathetum MK eſſe altitudinem trianguli rectanguli MKL.

§. 60. Quodſi hanc demonſtrationem ſymbolice repræſentare volueris, hoc modo id fieri debere, ex anterioribus abunde liquet.

Hypotheſis.	*Theſis.*
MKL △ rectangulum,	MK altitudo;
MK & KL catheti,	
KL baſis,	

Demonſtratio.

I.

MKL △ rectangulum, *per hypotheſin.*

1°. In △ MKL angulus unus rectus

II.

MK & KL catheti △ rectanguli MKL, *per hypoth.*

---

2. Angulus K rectus.

III.

MK cum KL efficit rectum, *per demonſtr. num.* 2.

---

3. MK ad KL perpendicularis.

IV.

MK ad KL perpendicularis, *per demonſtr. num.* 3.

---

4. M opponitur ipſi KL.

V.

M vertex anguli KML, *quod patet intuitive.*

---

5. M vertex △ MKL.

VI.

M vertex △ MKL, *per demonſtr. num.* 5.
MK perpendicularis ad KL, *per demonſtr. num.* 3.
KL baſis, *per hypotheſin.*
adeoque
MK perpendiculum ex vertice M in baſin KL demiſſum.

MK altitudo △ rectang. MKL.

§. *61.* Inſunt reſolutioni demonſtrationis præcedentis, quæ attentionem merentur. Nimirum quando per notiones confuſas clare perſpicimus, quæ diſtincte cognoſcenda ratiociniis inferenda, ſaltum in ratiocinando committimus: qui quando admitti poſſit citra lapſus periculum, ex reſolutione confuſe perceptorum in ratiocinia patet. Quodſi integram Arithmeticam & Geometriam eo modo pertractare libuerit, quem præſcripſimus & exemplis illuſtravimus, vix quicquam in theoria Logicæ occurret, cui non lux affundatur. Ipſa quoque reſolutio demonſtrationis corollarii, quam modo in medium attulimus, clariſſime docet, cur in definiendo fuerimus prolixiores, quam vulgo fieri ſolet, & cur multa demonſtraverimus principia, quorum nullus in Elementis Geometriæ locus eſſe ſolet. Etenim, omiſſis iſtis definitionibus atque principiis, in demonſtrationibus ſaltus in demonſtrando committuntur, nec diſtinctam hujus notionem conſequi datur, ubi nunquam, quæ per notiones confuſas clara putantur, diſtinctis ratiociniis inferuntur. Equidem non nego tyronibus initio ſtudii mathematici moleſtum eſſe hunc rigorem, immo ſuperfluum videri, propterea quod demonſtratione non indigere exiſtimant ea, quæ abſque demonſtratione vera intelliguntur; non tamen hinc ſequitur, rigorem iſtum ſua carere utilitate. Quamvis adeo, initio ſtudii mathematici, in gratiam tyronum, ab eo tantiſper ſit recedendum, in progreſſu tamen non negligendus. Ea de cauſa in Elementis Germanicis multa non definivimus, quæ in Latinis definiuntur

niuntur; multa ſine demonſtratione ſumimus in illis, quæ in hiſce demonſtrantur. Nec hoc fecimus ſine prægnantibus rationibus, quæ manifeſtæ evadent per ea, quæ capite ſequente dicentur. Non defuere, qui tantum definitionum & principiorum demonſtratorum apparatum improbarunt; immo autores nobis fuere, ut in nova editione reſecaremus, quæ ipſis ſuperflua videbantur, propterea quod evidentes ſint demonſtrationes, abſque illis definitionibus & abſque principiorum iſtorum demonſtrationibus. Enimvero ſi noſtram demonſtrationum reſolutionem viderint & ex ſequentibus conſilium intellexerint, quo id fecimus; non dubitamus fore, ut aliud ſit ipſorum judicium.

§. *62*. Probe autem notandum eſt, tum demum demonſtrationes eſſe naturales, ſeu ordinatas, & completas, adeoque conſummatas, quales in Logica requirimus (§. *799*, 854, 855 *Log.*), ſi eo modo reſolvantur, quem præſcripſimus, ut plenaria oriatur convictio, nec quicquam quoad evidentiam deſiderari poſſit. Et qui in Pſychologia empirica ſatis fuerit verſatus, ex principiis ibidem traditis, demonſtrabit, tum demum facultatum animæ in cognoſcendo rectum fieri uſum, ubi demonſtrationes eo modo expenduntur, quo eaſdem reſolvere docuimus. Nec minus patebit, in demonſtrando tum eum fieri facultatum cognoſcendi uſum, quem in communi cogitationum ſeſe mutuo excipientium ſerie obſervamus.

§. *63*. Nos in Elementis noſtris demonſtrationes eo ordine digeſſimus, ut in ratiocinia ex hypotheſi & ſuperaccedente præparatione, ſi quando opus eſt, deducta & inter ſe concatenata facile reſolvi poſſint. Etenim concluſiones eo ordine ſeſe invicem excipiunt, quæ in repræſentatione ſymbolica exhibentur, & iis adjiciuntur citationes, quibus inſinuantur principia, quæ in reſolutione commemorantur. Sumuntur etiam, ex hypotheſi &, in demonſtrationibus problematum, ex conſtructione unde infertur concluſio, immo etiam ex demonſtratis, concluſiones; niſi immediate ingrediantur ratiocinium proxime ſequens, ut eandem bis poni inconſultum foret. Saltus ſi quos admittimus, quemadmodum in corollario, quod exempli loco modo adduximus, tales ſunt, ut, niſi acutior fueris in demonſtrando, eos non animadvertas, quod oculis in ſchema converſis per ſe clara videntur; veluti quod M ſit vertex trianguli, quod MK & KL intercipiant rectum K. Nullum vero in demonſtrationibus noſtris deprehendes hiatum, ut omitterentur quædam, quæ ad formanda ratiocinia ſunt neceſſaria, & ſine quibus ſingula, quæ ad demonſtrationem requiruntur, formari nequeunt: qui ipſe hiatus demonſtrationem reddit incompletam

pletam (§. 854 *Log.*). Enimvero exactam hanc formam logicam naturæ animæ convenientem, quemadmodum ex Pſychologia conſtat, demonſtrationibus vulgo non tribuunt autores: unde eadem facilitate non reſolvuntur in ratiocinia, ex quibus conſtant, nec ſymbolice eo modo abſque difficultate repræſentantur, quo nos eaſdem exhibere docuimus. Quamobrem, ex noſtris quoque Elementis, Matheſis minore ſtudio atque minore temporis intervallo addiſci poteſt, quam ex aliorum ſcriptis; & ſi qua ſphalmata, vel typographi incuria, vel feſtinante ſcribentis calamo, irrepſere, ea attentione adhibita haud difficulter corriguntur.

§. *64*. Vulgo demonſtrationes non eo modo expenduntur, quo nos eas reſolvere docuimus. Immo ipſe, cum Matheſi addiſcendæ operam darem, aliam viam ingreſſus ſum, donec tandem ſtudium philoſophicum cum mathematico conjungens & in rationem evidentiæ anxius inquirens, in veram inciderem. Nimirum vulgo animum primo convertimus in concluſionem quam contextus ſuggerit, & deinde inquiritur in rationem, cur ea tanquam vera ſit admittenda, quæ vel ex hypotheſi, vel ex definitione, aut propoſitione quadam anteriore petita, & cum ſchemate oculis ſubjecto collata, attento vim conſequentiæ confuſe percipiendam exhibet, nullo ratiocinio diſtincte formato. Ex. gr. Si quis demonſtrationem theorematis *6*. (§.156 *Geom.*) expendere voluerit, is concluſiones $x+y$ & $y+o=180$ confert cum figura, ut intelligat, quid affirmetur. Tab. I. *Fig.* 9. Quærit deinde, cur hæc propoſitio ſit vera; & §. 148, qui citatur, evolvens, ubi legit angulos deinceps poſitos junctim ſumtos conficere 180 grad., recurrit ad figuram, ex qua ubi confuſe percipit, angulos y & x; itemque o & y eſſe deinceps poſitos, duas iſtas concluſiones admittit tanquam veras. Deinde recordatur, quod demonſtrandum ſit, angulos o & x eſſe æquales, hanc concluſionem cum illis confert, oculis in figuram conjectis. Et ubi videt, eos relinqui, ſi angulus communis y auferatur, theorematis veritatem admittit; cur hoc faciat quæſitus, reſpondens, quia ab æqualibus idem aufertur, ſeu particulariter, quia angulus communis y aufertur; axioma iſtud, quod eodem ab æqualibus ablato æqualia relinquantur, nonniſi confuſe ſibi repræſentans. Unde audias alios reſpondentes, hoc per ſe patere. Solenne enim eſt hominibus, ut per ſe liquere dicant id, quod per confuſas perceptiones verum apparet, cur vero verum ſit rationem reddere nequeunt. Admittuntur hinc ſaltus & hiatus in demonſtrando, quæ, initio ſtudii mathematici, ſubinde haud parum obſtant evidentiæ ad plenariam convictionem requiſitæ, antequam con-

fuſis

fuſis iſtis ratiocinationibus adſueſcas, ut familiaritas ſuppleat defectum evidentiæ.

§. *65.* Quid interſit diſcriminis inter noſtram demonſtrationum reſolutionem, & communem eas expendendi morem; in ſeipſo experietur, qui initio ſtudii mathematici utramque viam ingreditur. Magis autem idem animadvertet, ubi in philoſophia noſtra verſatus, utrumque modum expendendi demonſtrationes inter ſe confert. Quam diverſi autem ſint fructus, quos hinc percipere datur, ex capite ſequente eluceſcet. Dicta igitur de ſecundo cognitionis gradu acquirendo ſufficiant.

§. *66.* Reſtat ut dicamus de tertio cognitionis gradu, quomodo ad eum perveniatur, quantum hic datur. Tertius cognitionis gradus in eo conſiſtit, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio marte eruere valeamus (§. 1). Si quis demonſtrationes noſtra methodo reſolvit; is modum colligendi ex aſſumtis quæſitum, continuo ratiociniorum nexu, inde perſpicit (§. 38, 41, 47, 52, 54, 59). Quodſi ergo habitum reſolvendi demonſtrationes præſcripto modo ſibi comparaverit; habitu ratiocinandi pollet, quo in veritatibus ſibi adhuc incognitis eruendis opus habet. Quamobrem iſta demonſtrationum reſolutio maximopere quoque commendanda eſt, in uſum tertii cognitionis gradus; ita ut ad tertium appropinquemus, dum ſecundo acquirendo ſtudemus. Et qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat, is multus eſſe debet in demonſtrationibus reſolvendis; cum omnis habitus non modo acquiratur, verum etiam perficiatur, augeatur, & conſervetur continuo exercitio (§. 430, 431 *Pſych. empir.*). Quamobrem cui tertius cognitionis gradus curæ cordique eſt, is acquieſcere non debet in Elementis Arithmeticæ & Geometriæ, ſed ad alias quoque Matheſeos partes progredi tenetur.

§. *67.* Si ex aſſumtis ratiocinando, colligendum eſt quod in theſi continetur; ipſa reſolutio demonſtrationis, præſcripto modo facta, loquitur, non opus eſſe ut hoc tanquam cognitum præſupponatur. Quamobrem, ſub generali tantummodo determinatione ſupponi poteſt tanquam quærendum. Unde theoremata convertere licet in problemata, quæ, ſub data in hypotheſi conditione, inveſtigari jubent, quod theſis continet. Ita theorema de æqualitate angulorum verticalium (§. 38) in hoc convertitur problema: Invenire rationem angulorum verticalium ex interſectione duarum linearum rectarum prodeuntium. Similiter theorema de congruentia triangulorum angulum æqualem cruribus æqualibus comprehenſum habentium (§. 40) in ſequens abit problema: Invenire rationem triangulorum

rum angulum unum æqualem æqualibus cruribus comprehenſum habentium; & rationem, quam habent anguli duo reliqui unius ad duos reliquos alterius ſigillatim; necnon latus tertium unius ad latus tertium alterius. Theorema arithmeticum, de quotis, ex diviſione duarum quantitatum per eandem tertiam reſultantibus, quantitatibus diviſis proportionalibus (§. 47) in hoc problema transmutatur: Invenire rationem quotorum, qui prodeunt, ſi duæ quantitates per eandem tertiam dividuntur. Denique corollarium, quod, catheto uno trianguli rectanguli ſumto pro baſi, cathetus alter ſit altitudo (§. 59) ad problema redigitur hoc modo: ſumto catheto uno trianguli rectanguli pro baſi; invenire, aut determinare altitudinem ipſius. Diſcere hinc licet, quomodo quod jam inventum eſt ſpectetur ut adhuc inveniendum, & inſtar problematis proponatur ad exercendam artem inveniendi. Sane omnia theoremata, non modo in Arithmetica atque Geometria, verum etiam in omni Matheſi reliqua, hoc modo ad problemata rediguntur, quæ tanquam inveniendum proponunt, quod jam cognitum eſt, dum exercitii gratia tanquam adhuc incognitum ſupponitur.

§. 68. Quodſi theoremata ad formam problematum fuerint reducta, quibus aliquid inveniendum proponitur; data a quæſitis ſunt diſtinguenda. Quoniam in hac converſione aut, ſi mavis, reductione; quæ in hypotheſi continentur, ſumuntur tanquam data; quod vero in theſi continetur, ſub determinatione quadam generali, exhibet quæſitum; data & quæſita eodem prorſus modo a ſe invicem diſtinguuntur, quo ſuperius theſin ab hypotheſi ſeparavimus. Ita, in exemplo primo angulorum verticalium, dari ſupponimus duas lineas ſeſe mutuo interſecantes, ex quarum interſectione neceſſario oriuntur anguli verticales; quæritur autem, quænam ſit horum angulorum ratio ad ſe invicem. In theſi theorematis, determinatur ratio, quæ inter eos intercedit, nimirum quod ſit ratio æqualitatis. Aſt hic qualis ea ſit, ignotum ſupponitur & inveſtigari jubetur. In exemplo ſecundo de congruentia triangulorum, datur in duobus triangulis ratio, quam habet angulus unus unius a ad unum alterius A, ratio crurum ab ad AB & ac ad AC, nempe quod ubivis ſit ratio æqualitatis, ſeu $a = A$, $ab = AB$ & $ac = AC$: quæritur autem ratio lateris tertii ab ad AB, anguli b ad B, anguli c ad C & totius trianguli acb ad totum ACB. Immo quæri etiam poteſt, utrum triangulum acb ſit ſimile, an diſſimile triangulo ACB. In theſi theorematis, denuo determinatur ratio horum omnium ad ſe invicem, qualis ſit; ſcilicet quod ſit ratio æqualitatis, ſeu $bc = BC$, $b = B$, $c = C$ & $\triangle\, acb = \triangle\, ACB$. Hic vero

Tab. I. Fig. 6.

vero eadem tanquam ignota ſupponitur & inveſtigari jubetur. In exemplo tertio, quod arithmeticum eſt, dantur duæ quantitates, dantur quantitas tertia, per quam iſtæ dividendæ, ut duo prodeant quoti; quæritur ratio, quam habent quoti hi ad ſe invicem. In theſi theorematis eadem determinatur, nimirum quod eadem ſit cum ratione quantitatum diviſarum; ſed hic tanquam ignota ſupponitur & inveſtigari jubetur. Denique in exemplo quarto, datur ſpecies trianguli MKL, nimirum quod ſit rectangulum, datur etiam baſis, ſcilicet quod ea ſit cathetus KL; determinari jubetur altitudo. In theoremate ſeu corollario, quod in problema converſum fuit, altitudo determinatur, nimirum quod ea ſit cathetus alter MK: hic vero demum quæritur. Videmus adeo, quomodo data a quæſitis diſtinguantur.

§. *69*. Enimvero non ſine ratione data a quæſitis diſcernuntur. Cum enim id, quod quæritur, per ea quæ dantur, determinetur; ex datis ratiocinando colligendum eſt quæſitum. Facimus hoc, dum demonſtrationem noſtro more reſolvimus; neque enim in omni ratiocinatione ſupponitur tanquam cognitum, quod inde tandem colligitur, quando ratiocinatio finitur. Quamobrem patet, ad inveniendum quod quæritur, non aliud requiri, quam ut modo præſcripto ratiocinemur. Noſtræ igitur reſolutiones demonſtrationum totæ analyticæ ſunt; oſtendentes modum, quo ex datis colligitur quæſitum, ſeu ratiocinando pervenitur ad id, quod inveſtigandum erat. Eædem adeo non minus ad tertium cognitionis gradum ducunt, quam ad ſecundum: id quod non obtinet, ubi communi more demonſtrationes expenduntur (§. *64*). Inſigne hic patet diſcrimen, quod inter noſtras demonſtrationum reſolutiones, & communem eas expendendi modum intercedit; tanti æſtimandum, quanto præſtantior eſt gradus cognitionis tertius, quam ſecundus. Velim huc animum advertant illi, quibus noſtræ demonſtrationum reſolutiones ſuperfluæ, aut prorſus pueriles videntur. Quodſi exemplum Mathematicorum præclarorum obvertere volueris, qui ad artem eximiam inveniendi pervenerunt abſque iſta demonſtrationum reſolutione; hoc parum nos movebit. Objectionem enim eſſe nullam capite ſequente oſtendemus. Abſit itaque ut hoc exemplo ab iſta, quam commendavimus, demonſtrationum reſolutione te deterreri patiaris.

§. 70. Ex iis, quæ diximus & per anteriora ſatis manifeſta ſunt, liquet, quantum fallantur, qui ſibi aliiſque perſuadere conantur, quod demonſtrationes ſyntheticæ, quales ſunt Euclidis, atque Geometrarum veterum, non ſimul ſint analyticæ; conſequenter veritates eodem

modo

modo ab ipſis reperiri non potuerint, quo demonſtrantur. Etenim, ſi ex aſſumtis legitime ratiocineris, quemadmodum fieri debere ex principiis Pſychologiæ empiricæ demonſtrari poteſt; eodem prorſus modo colligitur quod ignotum eſt, & ad inveſtigandum proponitur, quo, quod jam notum eſt, demonſtratur. Dedimus fidem oculatam, quæ in ſuſpicionem adduci minime poteſt. Memini me olim, cum in Academia Lipſienſi Matheſin atque Philoſophiam docerem, antequam ad Profeſſionem Mathematum in Academia Halenſi vocarer, Artem inveniendi juxta regulas Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* explicatam, per exempla exerciturus, Geometriam elementarem ea methodo pertractaſſe, ut theoremata ad problemata revocarem, & quomodo ex aſſumtis in hypotheſi, tanquam datis, eruatur quod in theſi continetur, tanquam quæſitum, oſtenderem, ipſaque problemata tanquam nondum ſoluta, ſed adhuc ſolvenda proponerem, idemque imitarer in Arithmetica. Unde contigit in Elementis Germanicis Arithmeticam practicam a me pertractari methodo vere analytica; ut ex unica notione numeri rationalis, qui juxta definitionem EUCLIDIS, ſiſtitur tanquam unitatum multitudo, nimirum, juxta methodum geneticam, tanquam ortus ex continua unitatis additione, integram Arithmeticam practicam deduxerim, tyronum captui accommodato modo: quod tantiſper attenti facile animadvertent; iis autem ſatis ſuperque perſpectum eſt, qui me eandem explicantem audiverunt. Dedimus etiam hinc inde ſpecimina quædam in his ipſis Elementis Latinis, veluti ubi de extractione radicum, & numeris æque-differentibus agitur.

§. 71. Ex reſolutione demonſtrationum præſcripto modo facta, præterea videre eſt, ſingula ratiocinia, quibus colligitur quod demonſtrandum erat, aut, ubi theorema in problema mutatur, quod inveſtigandum fuerat, ſupponere aliquam definitionem, vel propoſitionem jam cognitam, quæ, vel ope ejus quod aſſumitur, ſeu datur, vel auxilio concluſionum jam elicitarum, in memoriam revocatur. Patet etiam ne unicum quidem ratiocinium abeſſe poſſe, ſiquidem ex aſſumtis inferendum, quod demonſtrandum, vel ex datis deducendum, quod inveſtigandum erat. Etſi enim non omnes ratiocinia diſtincte expendant; in confuſis tamen ipſorum notionibus, quæ animo obverſantur, actu continentur. Quælibet adeo veritas latens, ubi in apricum producenda, certas veritates cognitas ſupponit, quarum ſi vel una ignoratur, ut quæſitam invenias fieri nequit. Quo plures igitur veritates, hoc eſt, definitiones & propoſitiones, tibi perſpectæ fuerint, eo plures quoque invenire poteris; cum abun-

abundes principiis, quibus ad ratiocinandum indiges, ex datis inventurus quæſitum. Quamobrem dum ſecundo cognitionis gradui acquirendo ſtudes, ad tertium quoque acquirendum te præparas, immo aptum reddis. Qui inoffenſo pede, in detegenda veritate latente ex iis quæ dantur, progredi voluerit; ei principia, quibus ad ratiocinandum opus habet, familiaria eſſe debent; ut ea, veluti ſponte ſua memoriam ſubeant, quoties eorum uſus requiritur. Definitiones itaque, &. propoſitiones, in quarum etiam numerum referuntur reſolutiones problematum, cum eo quod fieri jubetur in theorema converſæ, memoriæ firmiter infigendæ. ſunt ei, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat; ut multus eſſe debeas in acquirendo gradu primo, antequam ad tertium properes; niſi quod expediat ea, quæ demonſtrationum vi tanquam vera aſſecutus es, tanquam invenienda tibi proponi (§. *67*): ita enim tanto facilius & abſque ulla moleſtia, immo potius cum inſigni voluptate, memoriæ mandabis, quæ eidem firmiter inhærere debent, ac una cum gradu ſecundo tertium acquires.

§. 72. Demonſtrationes etiam mechanicæ ad tertium cognitionis gradum ducunt; quatenus tentando manifeſtant incognitum (§. 32): quibus cum æquipolleant exempla in numeris (§. 35), horum etiam uſus eſt in tertio cognitionis gradu comparando. Quoniam tamen demonſtrationes mechanicæ, perinde ac exempla (§. *cit.*), veritatem conſpiciendam non præbent, niſi in caſu ſingulari, aut ad ſummum in particulari (§. 33); in iis non acquieſcendum, ne cum periculo errandi a ſingulari ad univerſale argumenteris. Quamobrem propoſitio in caſu ſingulari, vel particulari, detecta ſumi debet tanquam univerſalis, & in problema convertenda; ac deinde inquirendum, num, ex datis legitime ratiocinando, univerſaliter erui poſſit, quod in caſu ſingulari, vel particulari, verum cognoviſti. Ita conſtat olim PYTHAGORAM animadvertiſſe, ſi quadratum numeri 3, quod eſt *9*, addatur quadrato numeri 4, quod eſt *16*, ſummam 25 exhibere quadratum numeri 5. Quamobrem cum perpenderet, ſi latus unum trianguli rectanguli fiat trium, alterum vero quatuor partium, hypothenuſam eſſe partium quinque; conſequenter quadratum hypothenuſæ æquale eſſe quadratis reliquorum laterum; ſuſpicio ipſi enata eſt, num hæc ſit proprietas trianguli rectanguli, ut quadratum hypothenuſæ ſit æquale quadratis laterum ſimul ſumtis. Non diffiteor levem admodum hanc eſſe ſuſpicionem, ſi ſecundum regulas probabilitatis æſtimetur; ſed levis etiam ſuſpicio ad inveſtigandum verum invitat. Quamobrem ubi ſuper trianguli rectanguli lateribus fuere conſtructa quadrata, ſuperacceden-

cedente præparatione ad comparationem quadrati hypothenuſæ cum quadratis reliquorum laterum requiſita, eo modo detegi poterat veritas, quo theorema iſtud demonſtravimus (§. 417 *Geom.*). Dico veritatem theorematis hoc modo detegi potuiſſe: cum enim conſtet, ipſum non uno modo demonſtrari poſſe, & demonſtrationem unamquamque, noſtro more reſolutam, monſtrare modum ad veritatem liquidam perveniendi (§. 70), non una patebat ad eandem via. Demonſtrationes itaque mechanicæ, ſi tanquam artificium heuriſticum adhibeantur, haud raro faciunt, ut de problemate quodam cogites, cujus cogitatio alias animum non ſubiret.

§. 73. Exempla, quæ in ſuperioribus dedimus, dicta confirmant. Ita
Tab. I. *Fig.* 9. ſi ducas lineas AB & CD ſe mutuo ſecantes in E, ut prodeant anguli verticales *o* & *x*; ac, vi demonſtrationis mechanicæ, eorum æqualitatem deprehendas (§. 32); ubi porro ſumis æqualitatem angulorum verticalium tanquam univerſaliter veram, & hoc theorema in problema convertis (§. 67), eodem modo eruetur veritas in omni caſu, quo theorema hoc demonſtrandum eſſe oſtendimus (§. 38, 70). Similiter ſi con-
Tab. I. *Fig.* 6. ſtruas triangulum quodcunque ACB, & deinde alterum *acb*, ea conditione, ut fiat $ab = AB$, angulus $a = A$, & $ac = AC$; atque triangulo *acb* exciſo ex charta, in qua delineatum fuerat, ita ponas ſuper altero ACB, ut punctum *a* in A, & latus *ab* in AB cadat; atque videas, triangulum *acb* eſſe alteri ACB æquale, & eſſe præterea $bc = BC$, $c = C$, atque $b = B$; ubi hoc ſumis tanquam univerſaliter verum, & theorema in problema convertis (§. 67), eodem prorſus modo ratiocinando aſſequeris, quod quæritur, quo theorema demonſtrandum eſſe ſupra præcepimus (§. 41, 70). Me tacente patebit, quomodo eadem valeant de exemplo, quod in numeris exhibet theorema, de quotis, ex diviſione duorum numerorum per eundem tertium reſultantibus, numeris diviſis proportionalibus; ut plura eam in rem dici non ſit opus. Obiter obſervo, demonſtrationem mechanicam de congruentia triangulorum, ubi ad notionem congruentiæ animum advertis, ſimul inſinuare principia, quibus opus eſt ad ratiocinandum, ſive in demonſtratione ſynthetica, ſive in inveſtigatione ejus, quod quæritur; ut adeo idea confuſa, quæ oculis obverſatur, integram demonſtrationem contineat, ab ea abſtrahendam, ſi ad notionem diſtinctam revocetur. Immo notionem theoremati reſpondentem eſſe univerſalem agnoſcimus, ſi in rationem coincidentiæ eorum, quæ in triangulis diſcernuntur, inquirimus; quatenus patet eandem rationem redire in quolibet caſu. Coincidit hic demonſtratio mechanica cum exemplis, quibus univer-

ſaliter

ſaliter repræſentavimus numerorum quadratorum & cubicorum geneſin (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*). Ex. gr. in exemplo numerico, 16 quadratum numeri 4, quæ eſt pars ſecunda radicis, prodit, quia 4 ducitur in ſeipſum (§. 246 *Arithm.*). Idem vero cum fiat in quocunque exemplo alio, eadem quoque ſemper adeſt ratio, cur quadratum partis ſecundæ prodire debeat. Similiter in exemplo geometrico, punctum *b* cadit in B, quia *a* ponitur ſuper A, & *a b* ſuper AB, eſtque *a b* = AB. Singula vero cum eodem modo ſeſe habeant in exemplo quocunque alio, eadem ſemper adeſt ratio, cur punctum *b* in B cadere debeat. Principium nimirum ontologicum eſt, quod poſita ratione ſufficiente ponatur etiam id, quod propter eam potius eſt quam non eſt (§. 118 *Ontol.*): quod principium in Arte inveniendi multum habet uſum.

§. 74. Conſtat ex ſuperioribus (§. 40), hypotheſin ſolam non ſemper ſufficere, ut inde colligatur, quod erat demonſtrandum; ſed præterea accedere debere præparationem, qua ſuperadduntur iis, quæ in hypotheſi ſumuntur, adhuc alia, eadem non invita ſumenda, ut ex ſumtis colligi poſſit, quod theſis continet. Quoniam theorematis in problemata converſis, quibus inveſtigandum proponitur, quod theſis inſinuat (§. 67); ratiocinatio, ex aſſumtis tanquam datis, eodem modo cedit ad colligendum quæſitum, quo, in reſolutione demonſtrationis præſcripto modo facta, colligitur quod demonſtrandum erat (§. 70); facile intelligitur, præparatione eadem non minus opus eſſe in veritate inveſtiganda, quam in jam inventa demonſtranda. Quando præparatione opus ſit, quivis animadvertit; nimirum, quando animum advertens ad aſſumta, deprehendit deeſſe principia, quorum vi ex iis elicitur concluſio una, vel plures eliciuntur, prout caſus tulerit. Hic itaque diſpiciendum num, præter ea quæ hypotheſis continet tanquam determinata id quod theſi continetur, ſumi adhuc poſſint alia iſtis minime repugnantia; quibus accedentibus, hypotheſis apta efficitur ad concluſiones, vi principiorum anteriorum, inde inferendas. In demonſtrationibus præparatio iſta non demum quærenda; ſed Autor, qui theorema demonſtrat, eam ſuppeditat. Aſt ubi theorema per modum problematis proponitur; præparatio non tanquam cognita ſpectari poteſt, ſed adhuc incognita ſupponitur; non tanquam jam inventa conſideranda venit, ſed tanquam quærenda ſpectatur. Ad tertium igitur cognitionis gradum adſpirans inquirere tenetur, quomodo præparatio innoteſcere potuerit. In exemplo de triangulis, angulum æqualem æqualibus cruribus comprehenſum habentibus, conſtat, datis cruribus cum angulo intercepto, conſtrui poſſe

 trian-

triangulum ; conſequenter per crura data & angulum interceptum datum triangulum, non minus integrum, quam latus ejus tertium, eidemque adjacentes duos angulos reliquos determinari; adeoque in hypotheſi nihil eorum deficere, quæ aſſumenda ſunt, ut inde colligi queant, quæ per ea determinantur. Quoniam vero quæritur triangulorum ratio, ratio lateris tertii unius ad tertium alterius, & ratio angulorum ad idem adjacentium in uno ad angulos eidem adjacentes in altero ſigillatim; ratio vero omnis vel æqualitatis vel inæqualitatis eſt (§. 130 *Arithm.*); per modum hypotheſeos tantiſper ſumitur, rationem æqualitatis hic obtineri. Hæc hypotheſis cum examinanda ſit, utrum veritati conſentanea ſit, nec ne; quæritur quomodo æqualitas innoteſcat. Quamobrem, cum, juxta notionem communem, æqualitas æſtimetur ex congruentia, notio congruentiæ inſinuat triangulum unum ſuper altero poni debere. Atque adeo in præparationem incidimus. Vides adeo, quomodo notiones communes inſinuare queant præparationem: id quod tamen non ſemper procedit, cum non omnia ex notionibus communibus immediate deduci poſſint.

§. 75. Quoniam tamen, per naturam animæ impoſſibile eſt, ut quicquam nobis in mentem veniat, niſi quatenus antea cognita, beneficio eorum quæ nunc cogitamus, vel in memoriam revocantur, vel ratiocinationem ingrediuntur; quæ ex notionibus communibus immediate deduci nequeunt, ex aliis utique notionibus derivanda. Quamobrem ut hoc appareat, ſumamus exemplum alterum, quo uſi ſumus in ſuperioribus (§. 54) in demonſtratione problematis, de invenienda media proportionali inter duas rectas datas, in hoc theorema converſi: Si ex quocunque puncto diametri excitetur perpendicularis peripheriæ circuli occurrens, erit ea inter ſegmenta diametri perpendicularis. Patet hic demonſtrandam eſſe proportionem linearum AB, BD & BE ex eo, quod BD ſit ad AE perpendicularis & ADE ſemicirculus. Tab. I. Fig. 10.
Quamobrem cum conſtet, triangula ſimilia habere latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia; conſequenter linearum proportionem ex triangulorum ſimilitudine colligi poſſe; ideo liquet, diſpiciendum eſſe, annon lineis quibuſdam ductis, ut prodeant triangula, obtineri poſſint triangula ſimilia. Ducuntur itaque ſubtenſæ arcuum AD & DE; quia ſic prodeunt triangula ADB, ADE & DBE, quæ, per modum hypotheſeos, ſumuntur tanquam ſimilia, ab eo qui veritatem demum inveſtigat; & deinde experimur, num eorum ſimilitudo demonſtrari poſſit; conſequenter num hæc bene ſumta fuerit. Quodſi modum, quo in hanc præparationem incidis, diſtincte perpendis, evidens eſt, id quod demon-

ſtran-

ſtrandum eſt ad animum revocare ſimilitudinem triangulorum, cujus notionem antea tibi acquiſiviſti; & ex hypotheſi theorematis patet, ductis rectis AD & DE, obtineri triangula, quæ utrum ſimilia ſint, nec ne, angulos eorum inter ſe conferenti innoteſcit; cum ex anterioribus conſtet, triangulorum ſimilitudinem ab æqualitate angulorum pendere; conſequenter per eandem probari. Nimirum in inveniendo conjecturis locus eſt; ubi ex iis, quæ dantur, vi principiorum tibi perſpectorum, ratiocinando colligi nequit quod quæritur; quemadmodum in demonſtranda æqualitate angulorum verticalium ſuccedit (§. 38). Cum vero conjectando, nonniſi caſu, prima ſtatim vice incidamus in veritatem; ideo haud raro variis modis tentanda eſt præparatio, antequam in eam incidas, quæ recta eſt: id quod ſatis experiuntur, qui veritati proprio marte eruendæ operam navant. Enimvero de iis hic dicere diſertius, quæ ad Artem inveniendi ſpectant, noſtri non eſt inſtituti, ubi tantummodi docemus, quomodo ad præparationem pervenire potuerint, qui bene poſitam retinuerunt. Bene autem poſitas eſſe eas, quæ in demonſtrationibus adhibentur, ipſe ſucceſſus in demonſtrando probat. Non tamen exiſtimandum eſt, quaſi earundem inventores prima ſtatim vice in eas inciderint, quemadmodum exemplum modo datum inſinuare videtur; ſed potius tenendum, tentatis haud raro pluribus ſine ſucceſſu, eam retentam fuiſſe, quam ſucceſſus approbabat. Sed talia, ſuo tempore, demonſtraturi ſumus a priori, ex ipſa animæ natura, in Arte inveniendi; ſi quidem Deo viſum fuerit corporis animique vires eo uſque conſervare, donec ad hanc telam pertexendam ordo nos deducet.

§. 76. Hic non aliud agendum eſt, quam ut oſtendamus, quomodo inquiramus in modum, quo ad præparationes in Elementis noſtris occurrentes perveniri licuerit; reddendo rationem, cur hoc modo fiat, tum ex conditione propoſitionis demonſtrandæ, tum ex anterioribus, quæ tanquam cognita & nobis familiaria ſupponuntur. Quodſi ergo, ad imitationem eorum quæ, exempli loco, in medium attulimus (§. 74, 75), præparationes omnes in Elementis noſtris expendere libuerit; nulli dubitamus lucem affulſuram ſufficientem iis, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Quibus vero in ſecundo acquieſcere viſum eſt, illi hac diſquiſitione non habent opus, huicque labori ſuperſedere poſſunt ac debent. Sufficit enim iis præparatione, prouti præſcribitur, ad hypotheſin accedente, demonſtrationem legitime procedere, qua animus convincitur verum eſſe, quod erat demonſtrandum.

§. 77. Illud adhuc ſupereſt, ut doceamus, quomodo procedendum ſit, ſi reſolutionem problematis ſuppo-

nis tanquam incognitam, adeoque eandem conſideras tanquam inveniendam. Ex hac enim hypotheſi, perinde ac in theorematis, vi anteriorum ratiocinando, colligendum, quid fieri debeat, ut facias, quod erat faciendum. Sumamus exempli loco problema de linea recta per datum punctum alteri rectæ parallela ducenda. Supponamus factum, quod petebatur; nimirum rectam MN, Tab. I. *Fig.* 7. quæ per datum punctum V tranſit, alteri RS, quæ data ſupponitur, eſſe parallelam. Quodſi hoc ſumis; ex anterioribus ſuccurrit: perpendicula inter duas parallelas intercepta æqualia eſſe (§. 226 *Geom.*). Unde infertur: duo quæcunque perpendicula inter rectas MN & RS æqualia ſunt. Porro conſtat, quod V ſit punctum extra lineam RS datum. Huc animum advertenti ſuccurrit (§. 216 *Geom.*), a dato puncto extra lineam datam perpendicularem demitti poſſe. Unde infertur, poſſe quoque ex puncto V ad rectam RS demitti perpendicularem, nempe VK. Succurrit porro, ubi perpendis duas requiri lineas perpendiculares inter rectas MN & RS, ut per earum æqualitatem pateat paralleliſmus ipſarum, per demonſtrata, ex quovis puncto intra rectam datam aſſumto erigi poſſe perpendicularem (§. 212 *Geom.*). Unde denuo infertur, ex puncto quocunque lineæ RS, veluti T, erigi poſſe perpendicularem TA. Jam, quia MN ſupponitur ipſi RS parallela, & VK atque TA ſunt perpendicula inter haſce parallelas intercepta, adeoque æqualia, per demonſtrata; reſolutio, quæ quærebatur, jam patet. Nimirum 1°. ex puncto dato V demittenda eſt perpendicularis VK ad rectam RS: 2°. ex puncto quolibet T erigenda eſt perpendicularis TA priori æqualis: 3°. per duo puncta A & V ducenda eſt recta MN. Hæc ipſa eſt reſolutio, quæ in Elementis noſtris legitur (§. 258 *Geom.*

§. 78. Patet autem, ſi hoc modo in reſolutionem problematis inquiris; hinc ſimul modum problema in theorema converſum demonſtrandi manifeſtum eſſe. In ea enim inveſtiganda uteris principiis, quibus in demonſtrando habes opus: id quod ex collatione eorum, quæ modo dicta ſunt, cum reſolutione demonſtrationis ſuperius facta (§. 52) patet. Demonſtrationes nimirum, una cum reſolutione, una eademque opera deteguntur; ut adeo non opus ſit, niſi ut, ubi ſynthetice proponere volueris quæ inveniſti, ea, quæ faciunt ad reſolutionem, ſepares a ceteris, quæ ad demonſtrationem ſpectant. Subinde tamen etiam in Elementis noſtris reſolutionem & demonſtrationem una exhibuimus; quemadmodum in hoc ipſo caſu factum, quem exempli loco produximus; & in aliis, ubi prolixior eſt demonſtratio, veluti in problematis de extrahenda radice quadrata & cubica (§. 269, 282. *Arithm.*).

§. 79.

§. 79. Demus adhuc exemplum aliud. Supponatur itaque reſolutio problematis 16 (§. 212 *Geom.*) de linea perpendiculari, ex dato in recta data puncto, excitanda. Data ſit recta ML, & in eo detur punctum G; ex hoc puncto G ducenda eſt linea, quæ ſit ad rectam ML perpendicularis. Ponatur factum, quod petebatur, nempe ducta perpendicularis GI. Succurrit ex anterioribus: Si linea recta ducenda, duo dari debent puncta, ex quorum uno ad alterum ducitur recta (§. 121 *Geom.*). Unde infertur: Præter punctum G, quod datur, determinandum eſſe adhuc punctum aliud I, ut recta GI duci poſſit. Liquet igitur, totum negotium in eo verſari, ut punctum I determinetur. Ponamus denuo hoc eſſe factum. Sumitur itaque: Recta ex puncto I ad punctum G ducta perpendicularis eſt. Succurrit principium. Si recta quædam fuerit ad alteram perpendicularis, anguli deinceps poſiti æquales ſunt (§. 79 *Geom.*). Unde infertur: Anguli MGI & IGL æquales ſunt. Sumatur IG pro crure triangulorum contiguorum communi. Patet triangula iſta habere angulum unum æqualem &, crus unum ejus eſſe æquale, nempe idem. Succurrit ex anterioribus principium (§. 179 *Geom.*): Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem duobus cruribus ſigillatim æqualibus comprehenſum, etiam latus tertium unius æquale erit lateri tertio alterius. Atque hinc infertur: Si præterea fiat GK=GH, erit etiam KI=HI. Atque adeo liquet, ſi fiat GK=GH, hoc eſt, ſi ex puncto H capiatur utrinque æquale intervallum, ex punctis K & H eodem intervallo quocunque alio (cum hic longitudinis GI nulla habenda ſit ratio, ſed tantummodo ſitus ad rectam ML) per interſectionem determinari poſſe punctum I, quod quærebatur, ut recta IG duci poſſit. Denuo manifeſtum eſt, reſolutionem problematis analyticam ſimul continere & ejus demonſtrationem. Quodſi unam ab altera ſepares, utraque prodibit, qualis in Elementis noſtris extat. Obiter moneo, inter principia heuriſtica in Geometrica referendum eſſe, ut diſpiciamus, num triangula congruentia & ſimilia determinari poſſint, quorum ope procedat ratiocinatio ad inveſtigandum quod quæritur, vel demonſtrandum quod aſſeritur requiſita. Quomodo in hoc principium inciderint Geometræ, noſtrum jam non eſt diſquirere. Erit alibi de eo dicendi locus.

Tab. I. Fig. 12.

§. 80. Subinde reſolutiones problematum innoteſcunt ſola attentione ad theoremata inventa, ad quas nulla patet via, ſi hæc tanquam incognita ſupponuntur. Iſtiuſmodi eſt problema de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Etenim ſi ſupponimus lineam BD eſſe inventam, quæ inter duas datas AB & BE media proportionalis eſt, ſuc-

Tab. I. Fig. 10. currit tantummodo vi definitionis (§. 155 *Arithm.*): Si fuerint tres lineæ continue proportionales; erit prima ad ſecundam, ut ſecunda ad tertiam. Atque hinc infertur: Recta data AB eſt ad inveniendam BD ut hæc ipſa BD ad alteram datam BE. Etſi hic ad ſimilitudinem triangulorum tanquam principium heuriſticum confugias; & ſumas BD eſſe crus commune duorum triangulorum ſimilium ABD & BDE, videasque, ſi BD fuerit ad AE perpendicularis, angulum *x* angulo *y* æqualem conſtrui debere, quod etiam fieri poſſe conſtat (§. 208 *Geom.*); quoniam tamen BD determinatæ magnitudinis eſt, non conſtat, quantus fieri debeat angulus *x*, ut recta AD attingat punctum D, quod quæritur, atque ita determinandum, ut crus anguli *x* ſecet AE in puncto E. Nihil itaque conficies, niſi ſupponas theorema tanquam cognitum: Si ex puncto quocunque B diametri AE erigatur perpendicularis peripheriæ in puncto D occurrens; erit ea inter ſegmenta diametri AB & EB media proportionalis. Ubi vero hoc theorema tanquam notum ſumitur, reſolutio problematis, de invenienda recta inter duas alias datas media proportionali, ſua quaſi ſponte ſeſe offert. Etenim non multa attentione opus eſt, ut animadvertas rectas datas AB & BE in eandem rectam transferri, & ſuper eadem ſemicirculum deſcribi poſſe; infertur vi corollarii theorematis primi (§. 136 *Geom.*). Neque ullum eſt dubium, quin inventori reſolutionis hujus problematis ante innotuerit theorema iſtud, quam de reſolutione cogitaret. Non eſt quod excipias, nos theorema iſtud non præmiſiſſe in Elementis noſtris problemati huic. Etenim ſi ita viſum fuiſſet, præmitti poterat: ſed in ſyntheſi non neceſſarium erat. Dum enim demonſtranda eſt reſolutio, problema in iſtud theorema convertitur, atque demonſtratio ejus adjicitur, quemadmodum ex ſuperioribus conſtat (§. 54, 55). Non nego fieri quoque potuiſſe, ut reſolutio eadem deduceretur ex aliqua proprietate trianguli rectanguli, ſcilicet ex hoc theoremate: Si ex angulo recto D trianguli rectanguli ADE demittatur ad hypothenuſam AE perpendicularis DB; erit hæc ipſa DB media proportionalis inter hypothenuſæ AE ſegmenta AB & BE. Quodſi enim ſupponas tanquam notum, quomodo ſuper data hypothenuſa conſtrui poſſit triangulum rectangulum: reſolutio problematis noſtri non minus in aprico eſt. Plures haud raro patent viæ ad eandem veritatem, & prouti vel hæc, vel alia principia, tanquam cognita ſupponuntur, unus hanc, alius aliam calcat viam. Mihi tamen probabilius eſt, ex proprietate circuli potius, quam trianguli rectanguli, reſolutionem de qua nobis ſermo eſt fuiſſe deductam. Enimvero non opus eſt, ut ea

de

de re contentionis ſerram cum aliis reciprocemus. Ubi enim veritates tanquam quærendæ proponuntur, quæ jam inventæ ſunt, ſufficit ingredi viam, qua recto facultatum cognoſcendi uſu ad eas pervenire datur.

§. 81. Dantur integræ diſciplinæ mathematicæ, quas inter Algebra eminet, aut, ſi mavis, Analyſis mathematica, quibus docetur, quomodo veritates mathematicæ ſint inveniendæ. Nemo non intelligit, ad tertium gradum cognitionis mathematicæ adſpiranti inprimis opus eſſe, ut in iis addiſcendis aſſiduus ſit. Enimvero ea de re nobis demum dicendum erit, ubi ad ſpecialia deſcendemus. Hic enim nonniſi generalia tradimus, quæ in qualibet Matheſeos parte obſervanda ſunt; etſi tantummodo exempla ex Arithmetica & Geometria dederimus.

§. 82. Reſtat denique ut adhuc dicamus, quomodo definitiones expendere debeat, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat. Facile apparet, inquirendum hic quoque eſſe, quomodo definitiones fuerint detectæ, aut inveniri ſaltem potuerint. Quamobrem id nobis agendum eſt, ut oſtendamus, quomodo hæc inquiſitio ſit inſtituenda. Definitiones eſſe duplices, nominales, & reales, in Commentatione de methodo mathematica monuimus (§. 17, 18); ubi etiam docuimus, quomodo tum ad nominales (§. 19 & ſeqq.), tum ad reales perveniatur (§. 25 & ſeqq.). Juxta regulas igitur ibidem traditas definitiones ad examen revocandæ: quod quomodo fiat, uno alteroque exemplo docendum.

§. 83. *Congruentia* definitur, quod ſit coincidentia terminorum, & *congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Definitio hæc explicat, unde congruentiam agnoſcere poſſis in duabus magnitudinibus, veluti in duabus lineis, vel ſuperficiebus. Quamobrem cum definitio nominalis ſit, cujus beneficio res agnoſcitur, & ab aliis diſtinguitur (§. 17 *Comment. de Meth.*); definitionem hanc nominalem eſſe hinc colligitur. Primus modus perveniendi ad definitiones nominales conſiſtit in eo, ut ad rem præſentem quam percipimus animum attendamus, & cum cura diſtinguamus quæ diſtingui poſſunt; eaque fini ſingula primum ſigillatim conſideremus, mox vero eadem inter ſe conferamus. Quodſi inquiramus, utrum hoc modo definitio congruentiæ inveniri potuerit, nec ne; hoc modo eam detectam eſſe deprehendes. Sumantur, ex. gr. duo fila ejuſdem longitudinis coëxtenſa, dicuntur ea ſibi mutuo congruere. Quodſi quæſiveris, cur ſibi mutuo congruere dicantur; non aliam reddere potes rationem, quam quod ab eodem termino incipiant, & in eodem deſinant; ſeu

ſeu quod extrema eorum coincidant, ipſaque etiam coincidant quoad longitudinem. Atque adeo patet, ex lege ratiocinandi (§. 349 *Log.*), coincidentiam terminorum hic dici congruentiam. Similiter notio lineæ rectæ abſtrahitur a filo extenſo, cujus craſſities, cum diminui poſſe concipiatur in infinitum, donec tandem evaneſcat, a notione confuſa ejus abſtrahitur notio lineæ in genere, quod ſit longitudo latitudinis expers: quæ eſt definitio *Lineæ* in genere, quam dedit EUCLIDES. Quodſi jam notionem rectæ confuſam ad diſtinctam revocare volueris, diſtinguenda in ea ſunt, quæ diſtingui poſſunt; eaque fini ſingula primum ſigillatim conſiderari, & mox inter ſe conferri debent (§. 19 *Meth.*). Cum in linea non concipiantur niſi puncta, quæ a ſe invicem diſtingui poſſunt, & ſitus eorundem, quem ad ſe invicem habent; recta a curva differre nequit, niſi ſitu punctorum quæ in ea aſſumuntur. Advertit hoc EUCLIDES: unde *Rectam* definit, quod ſit linea ex æquo interjacens inter ſua extrema. Enimvero cum huic punctorum ſitui nulla reſpondeat notio, niſi confuſa, quam verbis ex æquo interjacere inter ſua extrema indigitat, eadem nempe cum notione confuſa lineæ rectæ; nihil explicuit, nec definitione ſua uti potuit.
Tab. I. Fig. 13. Nos igitur aſſumentes partem quamcunque rectæ AC, eamque conferentes cum tota AB, inquiſivimus, num quid in ſitu punctorum, quæ in parte aſſumuntur, deprehendi poſſit, quod diverſum ſit a ſitu punctorum in toto aſſumtorum. Ubi nullam diverſitatem reperiri poſſe deprehendimus; memores definitionis ſimilitudinis (§. 24 *Arith.*), *Rectam* definivimus per lineam, cujus pars quæcunque toti ſimilis. Nimirum, vi illius definitionis, in parte ad totam collata, præter magnitudinem nihil obſervare datur, quo ea a tota diſtingui poſſit. Quamobrem cum Linea curva ſit, quæ recta non eſt; eademque, ſuppoſita definitione rectæ, hoc modo definiri poterat (*not.* §. 85 *Ont.*); nos in definitionem noſtram *Lineæ curvæ* incidimus, quod nimirum ſit linea, cujus partes toti diſſimiles (§. 22 *Geom.*). Ita ſi aſſumas duos peripheriæ arcus quoſcunque AC & AB, ducasque chordas cognomines; ſitum puncti C ad A & B ad A diſtinguere licet per diverſam rationem ſubtenſarum ad diametrum; neque enim arcuum ſubtenſæ omnes eandem ad diametrum rationem habent, ut adeo pars arcus ab arcu integro, hoc modo, diſtingui poſſit. Tacemus modos alios diſtinguendi ſitum punctorum in parte; conſequenter partem ipſam, a tota. Geometriæ ſublimioris gnari non ignorant hoc principio diſtingui curvas a ſe invicem. Sed cum ſeniores Geometræ in recta a curva diſtinguenda hæſitaverint, definitiones utriuſque daturi; non opus eſt ut tyrones, in Tab. I. Fig. 14.

modo

modo quo eædem detectæ fuerunt inquirendo, induſtriam ſuam fatigent. Tum enim idem manifeſtus erit, ubi in Geometria curvarum fuerint verſati.

§. 84. Similiter videre licet ubivis, lineam rectam cum altera in eodem puncto concurrentem, diverſimode ad ſe invicem inclinari poſſe. Unde, non attenta inclinationis diverſitate, enata eſt definitio *Anguli* in genere (§. 54 *Geom.*), quod ſcilicet ſit duarum linearum in puncto uno concurrentium mutua inclinatio. Quodſi ergo recordatus, a puncto quovis ad punctum quodvis lineam
Tab. I. rectam duci poſſe (§. 20 *Geom.*), cru-
Fig. 6. ra anguli CAB recta CB jungi concipias; reflectendo ſuper iis, quæ in figura, quæ ſic prodit, diſtinguuntur; reperitur (§. 19 *Meth.*) definitio trianguli in genere, rectilinei ſcilicet; quoniam, in Geometria elementari, cum aliis nullum nobis eſt negotium, quod ſit figura tribus lineis rectis terminata (§. 87 *Geom.*). Quodſi perpendis; in hac definitione non determinatam eſſe rationem laterum AB, BC & AC; & recordaris rationem omnem vel eſſe æqualitatis, vel inæqualitatis (§. 130 *Arith.*); addendo determinationem rationis laterum ad ſe invicem, naſcuntur triangulorum ſpecies (§. 22 *Meth.*). Nimirum, ſi tria latera habeant ad ſe invicem rationem æqualitatis, ſeu omnia inter ſe æqualia ſint; definitio præſto eſt *Trianguli æquilateri* (§. 88. *Geom.*). Si ſumis eadem habere ad ſe invicem rationem inæqualitatis, hoc eſt, ſingula inæqualia eſſe; definitionem habes *Trianguli ſcaleni* (§. 90. *Geom.*). Denique ſi ſumis latus unum habere ad unum reliquorum rationem æqualitatis, ad alterum vero rationem inæqualitatis, ſeu duo nonniſi latera æqualia eſſe; in definitionem *Trianguli æquicruri* incidis.

§. 85. A definitione trianguli æquilateri, quod tria latera æqualia habet, abſtrahitur definitio *Figuræ æquilateræ* in genere, omiſſa determinatione numeri laterum (§. 20 *Meth.*); quod ſcilicet ſit figura, cujus latera ſingula inter ſe æqualia ſunt (§. 88 *Geom.*). Atque adeo ſatis patet, quomodo, ope regularum in Commentatione de Methodo mathematica explicatarum, detectæ fuerint, aut ſaltem detegi poſſint, definitiones nominales Geometriæ, immo in qualibet Matheſeos parte. Idem enim quoque ſuccedere in definitionibus aliis experietur, qui tentare voluerit.

§. 86. Sufficiant igitur hæc dixiſſe de definitionibus nominalibus: reſtat ut nonnulla addamus de realibus. Ex. gr. lineam quandam rectam LM, Tab. I.
juxta ductum alterius rectæ LO, mo- *Fig. 3.*
tu ſibi ſemper parallelo, hoc eſt, ut in quolibet ſitu ſemper parallela ſit, deorſum moveri poſſe conſtat. Quamobrem, ſi hoc fieri ſumis; prodit definitio *parallelogrammi* in genere. Similiter rectam quandam AC, circa punctum fixum C, in gy-

 rum

Tab. I. Fig. 15. rum agi poſſe, donec redeat ad terminum A, unde digreſſa fuerat, per ſe liquet, & per notiones communes confirmatur. Quodſi ergo hoc ſumis; prodit definitio *Circuli* realis (§. 25 *Meth.*).

§. 87. Eædem definitionis reperiri quoque potuerunt, præſuppoſitis definitionibus nominalibus. Parallelogrammi definitio nominalis eſt, quod ſit figura quadrilatera, cujus latera oppoſita ſunt parallela (§. 102 Tab. I. Fig. 3. *Geom.*). Quodſi concipias rectam LM juxta ductum alterius rectæ moveri deorſum; patet figuram deſcribi quadrilateram. Quodſi linea ponatur ſibi ſemper manere parallela; liquet latus ON oppoſito LM eſſe parallelum, & rectas quaſcunque parallelas inter latera OL & MN interceptas eſſe æquales. Enimvero ſi lineæ parallelæ æquales intra eaſdem lineas comprehendantur, erunt quoque hæ inter ſe parallelæ (§. 257 *Geom.*). Unde infertur, Latus quoque MN eſſe oppoſito LO parallelum. Evidens adeo eſt, figuram, quæ deſcribitur, motu lineæ rectæ LM, juxta ductum alterius rectæ LO ſibi ſemper parallelo, eſſe quadrilateram & habere latera oppoſita parallela. Atque ſic liquet, figuram hoc modo deſcriptam eſſe, vi definitionis nominalis, parallelogrammum. Nimirum, ſi definitio nominalis parallelogrammi ſumitur; parallelogrammum dici nequit niſi figura, quæ & quadrilatera eſt, & latera oppoſita æqualia habet. Quamobrem ubi definitionem realem, hac ſuppoſita, dare volueris; ita omnino concipienda, ut nominali non repugnet iſta geneſis, ſed ex geneſi figuræ potius demonſtrari poſſit, nominalem definitionem eidem convenire. Quodſi excipias, ſupponi hic, quæ demonſtranda ante ſunt, quam definitionem realem ex nominali deducere valeas, nimirum quod lineæ parallelæ inter duas lineas interceptæ æquales eſſe debeant, ut hæ quoque inter ſe ſint parallelæ; objectio nulla eſt. Ecquis enim dixerit, ſalva veritate, definitiones reales ex nominalibus deducendas eſſe, nulla theoria præſuppoſita, quæ demonſtranda ante venit. Quin potius ipſum exemplum, quod modo dedimus, contrarium loquitur. Definitiones nominales ſumere licet, antequam theoremata demonſtrentur. Sumere quoque licet reales, antequam demonſtrentur propoſitiones, modo geneſis intelligatur poſſibilis abſque demonſtratione; ſcilicet ut nihil fieri jubeatur, quod abſque demonſtratione fieri poſſe non conſtet. Sed figuram, quæ per geneſin prodit, eſſe eandem, cujus definitio nominalis datur, utique demonſtrandum. Quodſi ergo demonſtratio ſupponit principia, quæ abſque demonſtratione vera eſſe non perſpicitur; illa utique ante demonſtranda ſunt, quam figuram genitam cum ea, cujus definitio nominalis datur, eandem eſſe oſtendi poteſt.

§. 88.

§. 88. Facilius ex definitione nominali detegitur realis *circuli*, non ſuppoſitis aliis, quæ de circulo demum demonſtranda. Nominalis circuli definitio eſt, quod ſit figura plana, linea in ſe redeunte terminata, ex cujus ſingulis punctis ad punctum intermedium C ductæ rectæ ſunt inter ſe æquales. Quodſi ſumis, quod in hac definitione continetur, circulum terminari linea curva in ſe redeunte; atque ſuccurrit, vi intentionis inveniendi geneſin curvæ, ſeu detegendi motum, quo deſcribitur, deſcribi lineam, ſi punctum ab uno termino ad alterum moveatur (§. 10 *Geom.*): facile animadvertis, lineam, qua terminatur circulus, deſcribi, ſi punctum deſcribens continuo motu redeat ad terminum A, unde digreſſum fuerat. Quodſi porro ſumis, vi definitionis nominalis, rectas ex ſingulis lineæ iſtius punctis ad centrum C ductas eſſe æquales; conſequenter punctum deſcribens A eſſe alterum extremum lineæ rectæ, cujus alterum extremum fixum hæret in centro C; patet, ſi punctum A a termino ſuo dimoveri debet, ut tamen alterum rectæ AC extremum in puncto C ſit fixum; rectam AC circa punctum fixum C moveri debere. Vides itaque circulum deſcribi, ſi recta quædam AC circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ ipſa eſt circuli definitio realis deducta ex nominali, nulla præſuppoſita theoria circuli, ſed tantummodo aſſumtis, quæ in definitione nominali continentur.

Tab. I. *Fig.* 15.

§. 89. Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* definitiones reales mirifice deprædicat, iiſque omne tribuit pretium, nominalibus nullo relicto. Enimvero, quemadmodum vidimus, definitiones reales ex nominalibus deduci poſſe; ita viciſſim nominales deducuntur ex realibus: id quod in circulo levi attentione animadvertitur. Exempla alia dedimus in ſolidis (§. 456 *& ſeqq. Geom.*). Etſi autem non negemus, ex definitionibus realibus haud raro facilius deduci, quæ ex nominalibus operoſius demonſtrantur, adeoque ad inveniendum eas eſſe admodum utiles; nominales tamen realibus præſtant in rebus ad ſua genera ſuasque ſpecies reducendis: id quod in demonſtrationibus & in applicatione theoriæ ad caſus obvios maxime uſui eſt. Quamobrem definitiones nominales non ſunt contemnendæ, immo certo ſine realibus præferendæ, quæ ad res obvias agnoſcendas & ab aliis diſtinguendas non adeo commodæ ſunt, quam nominales; id quod ipſa circuli atque parallelogrammi definitione reali docetur.

CAPUT II.

De Modo inſtituendi ſtudium Matheſeos intellectus perficiendi cauſa.

§. 90. NOn omnes in addiſcenda Matheſi eundem ſibi ſcopum præfigunt. Poſtquam igitur in genere docuimus, quomodo Matheſis ſit tractanda, ut eam conſequaris cognitionem, quam intendis; nunc porro diſpiciendum eſt, quinam per Matheſeos ſtudium intendi poſſint fines, & quænam obſervanda ſint ei, qui finem intentum conſequi voluerit. Eminet inter hoſce fines perfectio intellectus, quæ conſiſtit habitu rectum faciendi facultatum cognoſcendi uſum in veritate cognoſcenda. Hunc finem intendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoſcibilium adſpirant, ſive philoſophari voluerint, ſive Theologiæ, Juriſprudentiæ, ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de cauſa, veteres neminem ad Philoſophiam addiſcendam admittere voluerunt, niſi Geometriæ peritum; cum olim Geometria ſola accurata methodo traderetur. Optandumque erat, ut idem mos in ſcholas noſtras introduceretur. Rationes perſpicientur ex iis, quæ mox tradituri ſumus, & per tranſennam proſpiciuntur vi eorum quæ modo diximus. In veritate enim cognoſcenda, rectum facere tenetur facultatum uſum, qui a veritatis tramite deflectere noluerit.

§. 91. Tres ſunt intellectus operationes, notio, judicium, atque diſcurſus, ſive ratiocinium; & hiſce ſuppetitas ferunt facultates cognoſcendi inferiores, ſenſus, imaginatio, atque memoria, una cum facultatibus intermediis, attentione ac reflexione, per quas ab inferioribus ad ſuperiorem fit tranſitus. Quæ omnia ſatis manifeſta ſunt ei, qui Pſychologiam empiricam cognitam atque perſpectam habet. Qui adeo intellectum perficere voluerit, is rectum operationum intellectus uſum facere tenetur; ac in iis eliciendis uti debet facultatibus inferioribus atque intermediis. Quamobrem ſtudio Matheſeos perficitur intellectus; ſi eodem habitus operationibus intellectus recte utendi, & in iis eliciendis rectum facultatum cognoſcendi inferiorum ac intermediarum uſum faciendi acquiritur.

§. 92. Non igitur nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, ſed accuratæ methodo, qua traduntur mathemata, fructus hic debetur. Ejus adeo participes non fiunt, qui methodum accura-

curatam inſuper habent. Quamobrem cum Matheſis, perficiendi intellectus cauſa, potiſſimum in ſcholas ſit introducenda; parum adoleſcentibus & juvenibus conſulunt, qui ut deſidioſis placeant, methodi nullam rationem habent, ſibi magis, quam ipſis proſpicientes.

§. *93*. Qui in primo cognitionis gradu acquieſcit, non alium finem ſibi propoſitum habet, quam ut veritatem ab aliis propoſitam intelligat (*§.* 1); conſequenter non aliud intendit, præterquam veritatum mathematicarum nudam cognitionem. Quoniam igitur nuda veritatum mathematicarum cognitione non perficitur intellectus (§. *92*); nec fructus hujus particeps fieri poteſt, qui primum cognitionis gradum unice curæ cordique habet. Quod ſi ergo eum praxes quædam mathematicæ non juvant, veluti ſi agrimenſorem, aut architectum militarem agere decreverit, vel ſi principiorum mathematicorum uſum non experitur in addiſcendis aliis, ex. gr. in percipiendis dogmatis nonnullis phyſicis; Matheſin plerumque in ſpem futuræ oblivionis addiſcit; ut ſtudii hujus, quod multiplici ratione ſeſe commendat cultoribus ſuis, nullum prorſus percipiat fructum. Unde facile intelligitur, quinam in addiſcenda Matheſi oleum atque operam perdant; ut ab hoc ſtudio potius ſint arcendi, quam ad idem invitandi vanis pollicitationibus. Convenit ingenuitati docentis, ne aliquid lucelli facturus, juvenes ab addiſcendis iis, quæ magis profutura ſunt, ad ea avocet, quæ in ſpem futuræ oblivionis addiſcunt.

§. *94*. Qui primo cognitionis gradui acquirendo eam operam navat, quam requiſivimus; is attentionem ad ea, quæ diſcit, afferre ac tamdiu conſervare adſueſcit, donec illa rite intellexerit (§. 5). Quænam ad hoc requirantur, ut definitiones intelligat (§. *6 & ſeqq.*), nec in propoſitionibus quicquam ſuperſit obſcuri (§. 17 *& ſeqq.*), perſpicit. Definitionum accuratarum, & in diſciplinis rite ordinandarum (*§. 6*), ac theorematum (§. 24, 25), & problematum, & reſolutionis eorundem (§. 26 *& ſeqq.*) genuinæ formæ ideam exemplarem animo concipit. Differentiam inter notiones diſtinctas & confuſas, adæquatas & inadæquatas penitus perſpicit (§. *6*, *9 & ſeqq.* §. 24 *& ſeqq.*). Quomodo recto ſenſuum uſu facilitetur operatio intellectus addiſcit (§. 7). Quo pacto repetitio facilior minuſque moleſta reddatur, qua memoriæ infiguntur firmiter eadem retinenda, cognoſcit (§. 15). Nemo non agnoſcit, ad perfectionem intellectus pertinere, ut formet notiones diſtinctas & adæquatas cognoſcibilium; ut judicia formet determinata; ut reſolutiones problematum diſtincte concipiat; ut attentionem, prout uſus requiſiverit, determinet; ut uſum ſenſuum in operationibus intellectus decernat; ut

memo-

memoriæ infigendorum eademque retinendorum curam gerat. Quamobrem cum hæc perfectio intellectus acquiratur, ſi primo cognitionis gradui acquirendo præſcripto modo ſtudeamus; quin Matheſeos ſtudium, ſi noſtro more tractetur, faciat ad intellectum perficiendum dubitandum non eſt.

§. 95. Non eſt quod mireris modum, a nobis præſcriptum, ad primum cognitionis gradum adſpirantibus, facere ad perficiendum intellectum; cum tamen a methodo, non a dogmatis expectanda ſit perfectio intellectus (§. 92). Etenim cum ſecundus cognitionis gradus ſupponat primum; nos in acquirendo cognitionis gradu primo jam ea præcepimus, quæ vi methodi obſervanda ſunt iis, quibus ſecundus curæ cordique eſt (§. 30); cum vulgo methodi nulla habeatur ratio, & plerumque nonniſi confuſæ notiones memoriæ imprimantur, vi imaginationis reproducendæ, quando iiſdem opus eſt. Sane in Geometria, lecta vel audita definitione, oculos in ſchema delineatum ſtatim conjicientes ideam definiti memoriæ infigunt, non diſtincte expenſis, quæ in definitione continentur; eodemque modo idea ſchematis, quæ theorema & reſolutionem problematis exhibet, eidem mandatur, quæ vi imaginationis præſens ſiſtitur, quoties de ea re cogitamus. Parum adeo, vel nihil, tribuitur intellectui, facultatum vero cognoſcendi inferiorum uſus prædominatur. Immo ne attentionis quidem is fit uſus, quem facultas cognoſcendi ſuperior exigit.

§. 96. Qui definitiones, propoſitiones, & reſolutiones problematum eo modo exponit, quem nos præſcripſimus (§. 9, 17 *& ſeqq.*); eas ad figuras in charta delineatas & exempla exhibita applicat, qualis applicatio requiritur, dum ratiocinamur. Ratiocinatio tertia intellectus operatio eſt; eodemque prorſus modo ratiocinandum, dum propoſitiones demonſtramus, vel a priori, ex cognitis, alia adhuc nobis incognita colligimus. Quamobrem patet, ſi in acquirendo cognitionis gradu primo morem noſtrum ſequaris, hoc ipſo perfici debere intellectum. Nulla adeo intellectus operatio eſt, cui rite eliciendæ non inſerviat modus acquirendi primum cognitionis gradum a nobis præſcriptus (§. 94 *& præſ.*).

§. 97. In primo igitur cognitionis gradu acquirendo, omnem illum facis facultatum cognoſcendi uſum, qui in ſecundo acquirendo requiritur, immo in tertio familiaris ſupponitur. Eſt adeo modus acquirendi cognitionis gradum primum, quem nos præſcribimus, præparatio ad ſecundum: qua facta, nihil prorſus difficultatis in ſecundo percipitur, cum eum uſum facultatum jam facere poſſis, quem is requirit. Me vero tacente liquet, quod, ubi primus cognitionis gradus acquiritur, antequam

quam ad ſecundum accedas, una in parato habeas principia, quibus in ratiocinando opus eſt, dum ad ſecundum animum appellis. Equidem id modus a nobis præſcriptus commune habere videtur cum vulgari; non tamen utroque idem prorſus efficitur. Etenim, noſtro more, definitiones ac propoſitiones pure enunciatæ memoriæ infiguntur, quales adhibendæ ſunt in ratiociniis diſtinctis; &, dum præſcripto modo expenduntur, ſimul familiares evadunt, quales eſſe debent, ut ſtatim memoriam ſubeant, quando iiſdem indigemus. Quodſi vero noſtro more non expenduntur; nec eadem facilitate definitiones ac propoſitiones memoriæ mandantur, ſed multa demum repetitione conſequimur, quod multo temporis compendio obtineri poterat.

§. 98. Plurimum autem refert, ut definitiones, & propoſitiones antecedentes familiares experiaris, antequam ad ſequentes accedas. Etenim, definitiones ſequentes non intelliguntur niſi per anteriores, ubi eas ingrediuntur termini per anteriores explicati. Quamobrem ubi haſce nondum familiares experiris; ſequentes tibi non poſſunt non videri obſcuræ, nec fieri poteſt, ut eas penitus intelligas. Similiter demonſtratio non convincit, niſi principia, quæ ex antecedentibus ſumuntur, ſenſum evidentiæ ſecum ferant. Neceſſe igitur denuo eſt, ut tibi antecedentes definitiones ac propoſitiones fuerint familiares, ubi ſine hæſitatione in demonſtratione progredi volueris. Quid, quod nec propoſitiones ſatis intelliguntur, quamdiu definitiones, quibus explicantur termini in iiſdem occurrentes, non fuerint familiares? Ea de cauſa obſervare licet, quod ſtudium mathematicum difficile videatur iis, qui nulla terminorum notitia inſtructi ad idem accedunt, nec in repetendis iis, quæ explicata fuerunt, ſeduli ac frequentes ſunt; cum in caſu oppoſito nulla percipiatur difficultas. Danda vero omnino eſt opera, ut difficultas hæc tollatur, ne ſtudii utiliſſimi efficiat deſertores.

§. 99. Qui Matheſi addiſcendæ operam navant, ut intellectum perficiant; iis inprimis convenit, ut in ſecundo cognitionis gradu acquirendo induſtriam ſuam exerceant. Methodo enim debetur hic fructus, non dogmatis, quæ in Matheſi proponuntur. Hujus autem potiſſima pars ſunt demonſtrationes, quibus veritatis eorum, quæ docentur, convincimur, ut nihil nobis dubii ſuperſit. Secundo gradui cognitionis acquirendo inſerviunt demonſtrationes (§. 30). Quamobrem ſi ſtudium Matheſeos intellectum perficere debet, neceſſe eſt ut in demonſtrando ſis aſſiduus.

§. 100. Intelliguntur vero hic demonſtrationes ſyntheticæ, quales ſunt EUCLIDIS & Geometrarum veterum. Neque alia de cauſa, quam harum demonſtrationum gratia;

Veteres voluerunt, ne quis ad philoſophiam accedat, niſi Geometriæ peritus. Quamvis enim demonſtrationes recentiorum analyticæ, quæ calculis algebraicis abſolvuntur, ſuum etiam habere poſſint uſum in intellectu perficiendo; ab iis tamen eundem expectare minime licet, quem ſpondent ſyntheticæ: id quod ſatis manifeſtum evadet per ea, quæ mox diſertius dicentur. Inde nimirum eſt, ut in Matheſi licet verſatiſſimi & inter ſummos Mathematicos eminentes, ubi extra Matheſin methodo mathematica uti voluerunt, minime dare potuerint, quæ ſatisfaciunt. Exemplo nobis eſt CARTESIUS, Vir ſummus, cujus memoriam egregia in Matheſi inventa poſteritati commendabunt, quamdiu ſcientiæ honos erit. Cum enim MERSENNI deſiderio ſatisfacturus, ſuum de exiſtentia Dei argumentum ad formam demonſtrationis geometricæ reducere vellet; quam parum ipſi leges methodi mathematicæ & genuina demonſtrationis forma fuerit perſpecta, abunde prodidit in Reſponſionibus ad objectiones contra Meditationes ſuas metaphyſicas. Taceo exempla alia, quæ commemorari poterant; & quibus tandem effectum eſt, ut extra Matheſin nullam dari certam cognitionem acutiores inde colligerent: in qua opinione ipſum ſcepticiſmum conſiſtere, nemo eſt qui non agnoſcat. Quodſi ergo ad certam cognitionem extra Matheſin pervenire volueris; neceſſe eſt ut methodi mathematicæ interiorem rationem perſpicias, & leges ejus diſtincte cognoſcas: id quod fieri non poterit, niſi demonſtrationum ſyntheticarum reſolutione naturæ animæ convenienter facta, quam in ſuperioribus ſatis declaravimus, ut nihil in ea deſiderari poſſit. Atque, ea de cauſa, demonſtrationes noſtras ſyntheticas eo ordine digeſſimus, ut facillime præſcripto modo reſolvi poſſint. Nihil enim magis intendimus, quam ut ſtudio mathematico intellectus perficiatur, quo certæ extra Matheſin cognitioni acquirendæ ſufficiat.

§. 101. Doluit ideo ipſe Vir ſummus ISAACUS NEWTONUS, quod, cum ſe ſtudio mathematico totum daret, ad CARTESII Geometriam, alioſque ſcriptores algebraicos, ſtatim progreſſus fuiſſet, antequam Elementa EUCLIDIS ea attentione expendiſſet, quam merentur; nec probavit, quod hodie Geometræ methodum ſyntheticam Veterum prorſus negligant, & in ſolis calculis algebraicis acquieſcant; quemadmodum ex ore ipſius hauſta refert HENRICUS PEMBERTON in præfatione ad Conſpectum Philoſophiæ NEWTONI, quem patrio ſermone edidit. Nullum mihi dubium eſt, quin, quantum ſibi hoc ipſo defuerit, abunde expertus fuerit, cum in divino opere Principiorum Philoſophiæ naturalis mathematicorum, inventa præclara methodo veterum Geometrarum proponere

nere decreviſſet. Quodſi enim quis, more a nobis præſcripto, demonſtrationes ſyntheticas reſolvere didicerit, & genuinam earum formam animo comprehenderit; is facile animadvertet, quod eam non perviderit NEWTONUS; neque adeo diſtincte agnoverit, unde pendeat evidentia veritatis extra Matheſin; quemadmodum & CARTESIO accidiſſe modo monuimus (§. 100). Idem videre licet in eximio opere Phoronomiæ JAC. HERMANNI; qui, cum omnem ætatem in calculis algebraicis conſumſiſſet, methodo Veterum recentiora in Mechanica & Hydraulica, agnatisque diſciplinis inventa demonſtrare volebat. Quam parum enim ſibi & lectoribus ſuis conſuluerit; quod methodo, cujus vim ac poteſtatem minime comprehendebat, ea proponere voluerit, quæ per calculos algebraicos aſſecutus fuerat, & cum laude ad utilitatem diſcentium proponere poterat, acutiores vident.

§. 102. Firmum itaque ratumque manet; qui intellectus perficiendi gratia ad Matheſin accedit, ei demonſtrationes *Euclideas* omni cura ac ſollicitudine expendendas eſſe: quæ qualis eſſe debeat, noſtra demonſtrationum analyſis & earundem ſymbolica repræſentatio clariſſime docet (§. 38 & ſeqq.). In his igitur induſtriam ſuam ingeniique vires exerceat, qui extra Matheſin evidentiam in veritatis cognitione conſequi voluerit. Proprio experimento edocti ſumus, non dari aliam ad evidentiam in Philoſophia & Facultatibus, quæ dicuntur, ſuperioribus viam: quam ſi calcare nolueris, tanto pronior erit in Scepticiſmum prolapſus, quanto fueris acutior; & facillimum erit nubem pro Junone amplecti, nec abortus imaginationis a genuinis intellectus fœtibus diſtinguere dabitur. Quodſi, præſcripto a nobis more, in Matheſi verſari volueris, ceſſabunt querelæ de imbecillitate intellectus humani, quales movit HUETIUS, non profuturæ, niſi ut ſternant ad Scepticiſmum viam, non ſine detrimento religionis tam revelatæ, quam naturalis. Scepticiſmum hodie ubivis terrarum invaleſcentem everſuri methodo iſta philoſophari cœpimus, qua EUCLIDES in ſuis Elementis olim uſus. Cumque, in Philoſophia, notiones confuſæ reſolvendæ ſint in diſtinctas, quas ſine detrimento veritatis fert Matheſis; ipſas etiam demonſtrationes geometricas ad eam formam reduximus, quam extra eandem habere debent, ne quid deſit evidentiæ; ut adeo ſuperflua exiſtimanda non ſint, quæ finis tam præclari gratia fiunt. Nec puerilia cenſenda ſunt, quorum neglectus ſe vindicat in Viris ſummis. Abſit itaque, ut eorum autoritate ad eundem defendendum abutaris.

§. 103. Modus, quo definitiones ac propoſitiones expendere docuimus, omnem facultatum uſum legitimum

mum in veritate cognoſcenda pollicetur, ipſo opere conſequendum. Quodſi vero ad repræſentationem ſymbolicam animum advertere, & regulas generales inde abſtrahere volueris; verioris Logicæ præcepta conſequeris, quæ in Logica noſtra demonſtravimus. Atque adeo reipſa experieris, Logicam artificialem tum demum eſſe genuinam, ubi praxi veterum Geometrarum conformis; quemadmodum in Prolegomenis Logicæ oſtendimus (§. 26 *Log.*). Qui ſic præparatus ad Logicæ ſtudium accedit, non modo omnia, quæ hic docemus, penitus intelliget; verum etiam regulas ibidem traditas, abſque ulla hæſitatione, dextre applicabit; ut nec in iis applicandis ſibimet ipſi imponat; quemadmodum haud raro contingit, nec de difficultate applicandi queratur. Ubi ſtudium Matheſeos præſcripto a nobis more inſtituerit; in ſtudio Logicæ, quod ſpinoſum alias ac tædii plenum videtur, non ſine voluptate verſabitur, nec Logicam ſoli ſcholæ addiſci in ſeipſo experietur. Etenim ideas, quæ regulis logicis lucem affundunt, tot exemplis confirmatas, recta Mathematum tractatione, adeo familiares poſſidet; ut, quoties iiſdem opus eſt, ſua veluti ſponte ſeſe ſiſtant animo præſentes; ipſaque Mathematum tractatio in continua regularum iſtarum applicatione cum conſiſtat, quin continuo, hoc exercitio, eas applicandi habitum ſit conſecutus, dubitari nequit. Voluptate perfunditur animus, dum veritatis plenarie convincitur. Quamobrem cum veritatis eorum, quæ in Logica docentur, convincatur qui, Matheſeos ſtudio noſtro more præparatus, ad ſtudium Logicæ accedit; quin continua in eodem fruatur voluptate dubitandum non eſt. Docet Logica uſum facultatum cognoſcendi in veritate cognoſcenda & applicanda. Quoniam itaque uſum facere poteſt, qui noſtro more in Matheſi fuit verſatus; uſus autem idem requiritur, in ſingulis omnino actionibus recte determinandis, prouti abunde conſtabit, ſi quis attenta mente Tomum poſteriorem Philoſophiæ practicæ univerſalis perluſtrare voluerit; utilitatem Logicæ per omnem vitam experietur, qui regulas ejus penitus intelligit, & dextre applicare didicit.

§. 104. Quoniam ea demum Logica cenſetur genuina, quæ praxi veterum Geometrarum conformis (§. 26 *Log.*); utrum vero huic conformis ſit, nec ne, dijudicare valet, qui in Matheſi præſcripto a nobis modo fuit verſatus (§. 103); noſtra Matheſeos quoque tractatio hunc pollicetur fructum, ut Logicam genuinam a ſpuriis diſcernamus, quales noſtra ætate eduntur haud paucæ, & quæ naturali facultatum animæ uſui e diametro adverſantur; ita ut ſtudium Logicæ non amplius faciat ad dirigendum facultatem cognoſcitivam in cognoſcenda veritate, ſed intel-

intellectum potius corrumpat, ut a ſolida cognitione veritatis proſcribaris. Neque verendum eſt, ne autoritas Mathematici, Logicæ non unius ſcriptoris, ipſi imponat: ſatis enim intelligit, vulgari Mathemata diſcendi more (*§. 64*) non patefieri regulas logicas, quas noſtra reſolutio & analytica expreſſio in apricum producit. Non igitur ſufficit Logicam ſcribi ab eo, qui Mathematicus audit, vel Geometricæ quædam Elementa methodo minus accurata compilavit; ſed neceſſe eſt, ut, qui Logicam ſcribit, in expendendis definitionibus ac propoſitionibus earumque demonſtrationibus, eum faciat facultatum uſum, quem regulæ logicæ urgent, & ut haſce ipſas regulas praxi huic conformes tradat. Vidimus paulo ante (§. 101) deficere hic acumen Mathematicorum ſummorum; ut adeo mirum videri non debeat, ſi acumen illorum deſideretur, qui in illorum numerum referri nequeunt.

§. 105. Quoniam ad ſtudium logicum accedere non debet, niſi qui in ſtudio Matheſeos ſecundum morem noſtrum verſatus eſt; ideo in Logica exempla mathematica dedimus, quippe quæ ſatis cognita atque perſpecta ſupponimus, niſi ubi exempla vulgaria ſatisfaciunt. Accedit, quod nonnulla in Logica tradantur, quæ aliis, quam mathematicis exemplis, non eadem perſpicuitate illuſtrantur. Bene ſibi conſulunt, qui ſaltem Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa præſcripto a nobis modo perluſtrant, antequam ad Logicam animum appellunt. Reipſa experientur, quod ex ſtudio logico omnem percepturi ſint fructum, qui ab eo ſperari poteſt. Quodſi vero, neglecta Matheſi, ad Logicam properant, multa in iis non penitus intelligent, etſi omnia rite percepiſſe videantur; nec abſoluto ſtudio logico in poteſtate ſua poſitum deprehendent, ut regulis Logicæ ſatisfaciant, hoc eſt, eum faciant facultatum uſum, quem Logica præſcribit.

§. 106. Maxima intellectus perfectio eſt Ars inveniendi; qua ex iis, quæ cognovimus, alia nobis incognita ratiocinando colligimus. Qui eo uſque in perficiendo intellectu progredi voluerit; illi tenenda ſunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (*§. 66 & ſeqq.*) Quodſi enim vel ſola Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ eo modo pertractaveris, qui ibidem præſcribitur; non modo conſtabit, quomodo in veritate invenienda ſit procedendum; verum etiam habitum quendam tibi comparabis ex cognitis alia incognita colligendi; conſequenter aliquid ſaltem hujus Artis acquires. Quemadmodum vero intellectus continuo magis magiſque perficitur, quoad promptum uſum in veritate cognoſcenda; ſi ſimili modo Philoſophiam noſtram pertractare volueris, quo in acquirendo gradu ſecundo

cognitionis mathematicæ utendum eſſe docuimus; ita quoque, quoad Artem inveniendi, eundem ulterius perficies, ſi in Philoſophia facias, quæ tertii cognitionis gradus acquirendi gratia fieri debere præcepimus. Quodſi cui hoc nimis moleſtum videtur; is ſciat velim, quæ ardua ſunt, ea non facili opera acquiri. Qui vult finem, media velit neceſſe eſt, quæ ad eundem ducunt.

§. 107. Satis itaque docuimus, quomodo inſtituendum ſit ſtudium Matheſeos, ut intellectus, quantum datur, perficiatur. Unicum adhuc ſupereſt, de quo nonnulla mihi dicenda ſunt, antequam ad alia progrediar. Sunt qui ſibi aliiſque perſuadere conantur, quaſi methodus mathematica Philoſophiæ minus conveniat; multo autem adhuc minus in Theologia, Juriſprudentia, & Medicina eidem locus ſit. Equidem hoc dubium jam ſuſtulimus in Diſcurſu præliminari, quem Logicæ præmiſimus, de Philoſophia in genere, ubi (§. 139) identitatem methodi philoſophicæ ac mathematicæ demonſtravimus; & in Horis noſtris ſubſecivis oſtendimus, quod & quomodo methodus mathematica adhiberi poſſit in Jurisprudentia, & Scriptura ſacra interpretanda: ex noſtra tamen definitionum & demonſtrationum propoſitionum analyſi, ſingulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifeſtum eſt, omnem methodum mathematicam, qua uſus eſt Euclides, huc tandem redire, ut operationum intellectus legitimum faciamus uſum in veritate cognoſcenda, qui ad evidentiam acquiritur, qua veritas indubitato agnoſcitur. Hinc manifeſtum eſt, non alias homini eſſe facultates, quibus in cognoſcendis mathematis utitur, quam quibus opus habet ad cognoſcendam veritatem quamcunque aliam; nec alium eſſe facultatum earumdem uſum in Matheſi addiſcenda, vel etiam in veritatibus mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuſcunque alterius, ſive ab aliis inventa fuerit, ſive demum noſtra opera detegenda. Matheſis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoſcendi uſus fieri debeat, ſi ad liquidam veritatis cognitionem pervenire decreveris: id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abſtrahi poſſunt (§. 103), ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas ſit lapis Lydius genuinæ Logicæ (§. 26 *Log.*). Quotquot igitur in ea ſunt opinione, quaſi Matheſis propriam ſibi habeat methodum, quæ extra eam nullius ſit uſus; aut methodi mathematicæ vim ac poteſtatem, aut genuinum facultatum cognoſcendi ad certam veritatis cognitionem conſequendam uſum, aut utrumque, ignorant. Hinc etiam videas, objectionem moveri ab iis, qui vel ſunt in omni Matheſi hoſpites ac peregrini, vel legitimi uſus facul-

facultatum cognoſcendi prorſus ignari.

§. 108. Denique noſtra Mathematum tractatio manifeſto loquitur, eum, qui in Matheſi addiſcenda præſcriptum a nobis morem obſervat, ſequi modum cogitandi maxime naturalem. Primus hoc animadverti, cum ad demonſtrationum analyſin, præſcripto a nobis modo factam, animum attenderem, & publice hoc monui in Lexico mathematico, idemque poſtea uberius docui in Pſychologia. Naturalis cogitandi modus eſt, qui leges animæ exacte ſequitur. Quis igitur adeo veſanus eſt, ut ſibi perſuadeat, uſum facultatum aliis legibus accommodandum eſſe in Philoſophia, Theologia, Jurisprudentia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

§. 109. Etſi autem Matheſis univerſa faciat ad intellectum perficiendum, ſi eo, quem præſcripſimus, modo tractetur; ut adeo optime ſibi conſulat, qui Elementa noſtra omnia eodem ſtudio perluſtrat: quoniam tamen non omnibus tantum ſuppetit temporis ſpatium, quantum huic labori ſufficit; unusquiſque eo uſque progredi poterit, quantum conceditur. Arithmeticæ autem & Geometriæ pertractatio prorſus indiſpenſabilis eſt; quæ ideo præmittenda, antequam ad Logicam animum appellis, & hinc ad reliquam Philoſophiam te conferas. Immo, ſi cui volupe fuerit integra Matheſeos noſtræ Elementa perluſtrare; ei tamen non ſuaſerim, ut de Philoſophia omnem cogitationem abjiciat, donec ſtudium Matheſeos omne fuerit abſolutum: ſed potius autor ſum, ut, Arithmetica & Geometria abſoluta, ſtatim Logicæ operam ſuam addicet, & in Matheſi juxta Philoſophiam pergat. Ita enim futurum certus ſum, ut ſtudium Matheſeos ac Philoſophiæ ſibi mutuo lucem affundant.

§. 110. Supponimus autem Philoſophiam eadem methodo eſſe conſcriptam, qua in Elementis Matheſeos utimur. Quamobrem cum id ante nos fecerit nemo; nec alia ipſi ſcripta philoſophica commendare valemus, niſi Opera noſtra philoſophica, Latino inprimis idiomate conſcripta. Quodſi prolixitatem obtendas, nulla ſane ratio eſt, cur ea te deterreat. Etenim ſi non ante ulterius progredi volueris, quam ſingula rite intellexeris, ac veritatis eorum convictus fueris; multo minore temporis ſpatio ſcripta noſtra utiliter perlegere potueris, quam breve quoddam compendium, communi more conſcriptum; modo in pertractanda Arithmetica & Geometria induſtriam tuam deſiderari paſſus non fueris. Immo valde vereor, ne ſi præſcripto a nobis more in Arithmetica & Geometria fueris verſatus, lectio aliorum ſcriptorum philoſophicorum quam noſtrorum, te efficiat ſtudii philoſophici deſertorem, aut in Scepticismum

deducat. Abſit, ut quis exiſtimet hæc arroganter a nobis dicta eſſe, nimia in nos fiducia, in contemtum aliorum! Veritati enim unice litamus, non loquentes niſi experta, quæ ratio defendit. Ab aliorum contemtu procul remoti, aliena merita ſuſpicimus & extollimus; neminem in ſcriptis noſtris nominatim perſtringimus; iis etiam parcimus, qui in laceſſenda fama noſtra quidvis ſibi licere arbitrantur; probe memores eam non dependere a laudibus aliorum, ſed a factis propriis; omni animi contentione omnique induſtria ac diligentia in id enitentes, ut calumnias factis contrariis refellamus. Alienum a nobis eſſe exiſtimamus, ut doctrinis, quas profitemur, facta ſint contraria. Nemo igitur nobis vitio vertet, ſi aliorum utilitati velificaturi ea dicimus, quæ veritas imperat, citra injuriam alterius. Minus toleranda potius ambitio eſt, ſi quis non ſine detrimento aliorum veritatem reticeri vult, ut videatur qui non eſt. Ceterum, ſi quis conſilio noſtro aurem benignam dare voluerit; re ipſa experietur vera omnino eſſe, quæ dicimus.

CAPUT III.

De Studio Arithmeticæ, Geometriæ, & Trigonometriæ planæ in ſpecie.

§. 111. Arithmeticæ, Geometriæ, & Trigonometriæ planæ noſtra Elementa ita conſcripſimus, ut ſatisfaciant omnibus, quocunque fine ad Arithmeticam & Geometriam addiſcendam appellunt. Ea enim digeſſimus, ut nullo negotio prætermittantur, quæ ſalvo fine, quem quis ſibi præfixum habet, ignorare poteſt; & ea iiſdem inſeruimus, quæ niſi eo excidere voluerit, ignorare nequit.

§. 112. Qui Arithmeticam addiſcit, vel ſoli praxi ſtudet, theoriam non curat, vel hujus etiam rationem habet. Qui ſoli praxi operam navat, is vel ſolum ejus uſum in vita communi, vel uſum etiam in Geometria practica, aliiſque Matheſeos mixtæ partibus, intendit. Idem præterea, vel in nuda praxi acquieſcere vult, vel veritatem quoque praxeos perſpicere avet. Cui theoria curæ cordique eſt, is eandem, vel propter uſum in ceteris Matheſeos partibus, vel propter uſum in perficiendo intellectu, appetit. Videamus igitur, quomodo Elementa noſtra Arithmeticæ pro multiplici hoc diſcentium ſcopo ſatisfaciant.

§. 113. Qui ſoli praxi operam navant,

vant, & quidem in uſum vitæ communis; iis ſatisfaciunt problemata de Algorithmo in numeris integris, & fractis, quæ capite ſecundo & quarto continentur, una cum problemate 33, quod capite ſexto legitur, de numero tertio, vel quarto proportionali inveniendo, una cum ſcholiis, in quibus idem problema ad varios caſus in vita communi obvios applicatur. Qui vero uſum etiam in Geometria practica, aliiſque Matheſeos mixtæ partibus intendunt; illi ſuperaddere debent problemata de extractione quadratæ ac cubicæ radicis, quæ capite quinto leguntur, problemata de logarithmis, fractionibus decimalibus & fractionibus ſexageſimalibus, quæ capite octavo, nono & decimo extant. Fractiones ſexageſimales omittere poſſunt, qui calculi Aſtronomici nullam habent rationem. Immo eodem carere poſſunt, qui ultra ea non progrediuntur, quæ in noſtris Aſtronomiæ, & Chronologiæ Elementis traduntur.

§. 114. Problemata a definitionibus & theorematis ſatis aperte diſtinguuntur, ſuoque nomine inſignita numerantur, ut adeo nullo labore opus ſit ad ea evolvenda, & agnoſcenda. Ut adeo uſus quidam hinc eluceſcat, cur in Matheſi veritates ſingulæ ſuis nominibus compellentur, ac numerentur; etiamſi in citationibus ad paragraphum provocemus, in quo principium iſtud continetur, quo in demonſtrando utimur.

§. 115. Quoniam in propoſitione, itemque in reſolutione, occurrere ſolent termini, quibus nondum intellectis, nec propoſitio, nec reſolutio intelligi poteſt; igitur neceſſe eſt, ut iſtorum terminorum definitiones ante expendat, quam ad problema accedat, qui praxin in eodem traditam diſcere ſtudet. Ita ex. gr. problema ſecundum (§. *96 Arithm.*) docet numeros quotcunque datos addere. Supponitur adeo definitio additionis, quæ traditur in anterioribus (§. *61 Arithm.*). Quia vero nec definitiones intelliguntur, niſi intellectis terminis, qui eas ingrediuntur; ſi qui termini per notiones claras, ſed confuſas communes non ſatis perſpicui ſunt, ad definitiones eorum, quas in antecedentibus damus, recurrendum. Ita, in definitione additionis mentio fit numerorum homogeneorum. Quinam numeri ſint homogenei, ex communi ſermone notum non eſt. Quamobrem neceſſe eſt, ut ad definitionem numerorum inter ſe homogeneorum recurras, quam in anterioribus exhibemus (§. 35 *Arithm.*). Quomodo autem hæ definitiones ſint expendendæ, patet ex iis, quæ de primo cognitionis gradu acquirendo, quoad definitiones, præcepimus.

§. 116. Problematum reſolutiones ſtatim applicandæ ſunt ad exempla, quemadmodum in ipſo textu a nobis factum. Nimirum regulæ, quibus præcipiuntur, quæ fieri debent,

ſuis numeris diſtinguuntur, ut ſingulis ſtatim ſatisfieri poſſit. Collocantur eo ordine, quo ſingula fieri debent; ut, lecta regula una, ſtatim fiat quod eadem præcipitur. Nihil adeo applicatio ad exempla habet difficultatis; ita ut totam Arithmeticam practicam proprio marte addiſcere poſſis, niſi fueris valde impatiens; aut ſi, duce alterius, unam operationem arithmeticam didiciſti, ceteras deinde, abſque ullo duce, tibi familiares reddere queas.

§. 117. Si quis veritatem reſolutionis problematum perſpicere voluerit, neceſſe eſt demonſtrationes addat. Citationes in iiſdem adductæ oſtendunt principia, quibus opus habet. Neque opus eſt, ut theoremata, quæ capite primo proponuntur, demonſtret; ſed ſufficit ea ſumi, tanquam per notiones communes nota, abſque demonſtrationibus. Similiter ſufficit, ut ex capite 3 nonniſi definitionem rationis, nominis rationis, rationum identitatis & proportionis in genere, ejuſque ſpecierum, proportionis continuæ atque diſcretæ (§. 126, 136, 149, 155, 156) ſibi cognitam ac perſpectam reddat, una cum theoremate 20 & 21, quorum demonſtrationes omittere poteſt, in illuſtratione per exempla facta acquieſcens. Problema 36, de modo inveniendi logarithmum, prætermittere poteſt; immo totam de Logarithmis doctrinam tamdiu differre; donec, abſoluta Geometria, ad Trigonometriam accedere voluerit.

§. 118. Quodſi vero theoriam expetit, ſive propter uſum in ceteris Matheſeos partibus, ſive intellectus perficiendi gratia, tota omnino Elementa pertractanda ſunt, eo modo, quem in capite primo pro acquirendo gradu cognitionis ſecundo præſcripſimus, ut adeo nihil ſuperſit, quod hic veniat addendum.

§. 119. Quamvis oſtenderimus, quid faciendum ſit, ſi quis nudæ praxi operam navat, nulla prorſus habita ratione theoriæ; hujus tamen neglectum nemini ſuademus: quin potius conſultum ducimus, ut Arithmetica, etiam practica, in uſum vitæ communis, non ſine demonſtrationibus addiſcatur. Ut enim alios taceam uſus; non modo tota Arithmetica practica facilius addiſcitur; verum etiam memoriæ multo firmius infigitur, non ſine temporis compendio; & ubi quorundam oblitus eſt, abſque multa difficultate in memoriam revocantur: id quod inprimis uſui eſt, ubi arithmeticis operationibus non quotidie habueris opus.

§. 120. Ceterum hinc liquet, quod, abſque ullo negotio, ex Elementis noſtris Arithmeticæ exſcribi poſſit Compendium Arithmeticæ practicæ, in uſum illorum qui ſolam Arithmeticam practicam, propter uſum in vita communi, expetunt; levi ſumtu ab iis comparandum, qui

eodem opus habent. Quodſi plura deſiderentur exempla, ea cumulare difficile non eſt. Etenim non alia re opus eſt, quam ut in locum numerorum, quos exemplum ſiſtit, ſubſtituantur quicunque alii. Quodſi demonſtrationes non negligantur, quemadmodum ne id fiat modo ſuaſimus (§. 119); paucis exemplis obtinetur, quod non ſine multis conſequi datur, ubi theoriam omnem abjicere volueris.

§. 121. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, ii memores eſſe debent ejus, quod in ſcholio definitionis primæ (§. 2 *Arithm.*) monuimus; ſcilicet quod ab Arithmetica practica, tanquam methodo inveniendi ſpeciali, regulæ inveniendi generales abſtrahere liceat. Cumque in ſcholio generali ad Algorithmum numerorum integrorum (§. 125 *Arithm.*), iſtiuſmodi regulas abſtraxerimus, ut exemplo quodam præiremus; & in geneſi numerorum quadratorum & cubicorum (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*), nec non in theoria numerorum æquidifferentium (§. 327, 329 *Arithm.*) artificia quædam analytica docuerimus; ad hæc inprimis animum advertere debent, qui non modo in Arithmeticis, Artem inveniendi, ſed eam etiam generalem, curæ cordique habent. Si prolixioribus eſſe liceret, addi poterant multa ſpecialia, de quibus alibi commodius dicetur; ubi nimirum Artem inveniendi ea methodo tradituri ſumus, qua huc uſque Logicam & Metaphyſicam univerſam, una cum Philoſophia practica univerſali, tradidimus. Ita ex. gr. quæ (§. 142 *& ſeqq. Arithm.*) de generibus & ſpeciebus rationum rationalium docentur, inſinuant modum ex dato genere inveniendi genera inferiora eorundemque ſpecies: quo etiam Dignitatum diviſio facit (§. 252 *Arithm.*). Huc etiam pertinent fictiones, quarum exemplum habemus in fractionibus ſpuriis (§. 221, 222 *Arithm.*)

§. 122. Qui Geometriæ ſtudio ſeſe dedunt; ſimiliter aut ſoli praxi ſtudent, theoriæ nullam prorſus rationem habentes, veluti agrimenſores & architecti militares; aut in praxi nuda acquieſcere nolunt, ſed ejus demonſtrationes expetunt. Qui vero theoriæ addiſcendæ ſeſe dedunt, aut uſum in ceteris Matheſeos partibus intendunt, aut hoc faciunt intellectus perficiendi cauſa.

§. 123. Quibus in nuda praxi acquieſcere viſum eſt; iis ſatisfaciunt definitiones & problemata, omiſſis demonſtrationibus. Nullum eſt problema, quod uſui eſſe non poſſit, adeoque prætermittendum ſit: ſed definitiones quædam omitti poſſunt, veluti figuræ in genere, lateris, tangentis, ſecantis, &c. Sufficit enim didiciſſe definitiones angulorum & figurarum, atque lineæ perpendicularis, & linearum parallelarum. Ceterorum notiones confuſæ, ipſo uſu

terminorum, in caſu dato inſinuabuntur, quæ praxi ſoli intentis ſatisfaciunt.

§. 124. Quænam obſervanda ſint circa definitiones, & problemata, eorundemque reſolutiones, ex iis intelliguntur, quæ de acquirendo gradu primo cognitionis in anterioribus præcepimus (§. 5 *& ſeqq.*); niſi quod definitiones ſequentes non opus ſit reſolvi in antecedentes, quia ſufficit eas referri ad ſchemata oculis ſubjecta; cum non requiratur adæquata entium geometricorum notio, ſed vel in confuſa eorundem notione acquieſcere poſſit.

§. 125. Praxis duplex eſt: alia, quæ exercetur in charta; alia, quæ in campo. Qui praxi unice ſe dat, eam exercere intendit. Non igitur ſufficit reſolutiones problematum intelligere; verum etiam requiritur, ut facias, quæ fieri jubentur. Ad praxin igitur in charta exercendam, ad manus eſſe debet circinus, regula, inſtrumentum transportatorium, norma, & parallelifmus, una cum triangulo ex ligno ebenino, & ſcala modica; ad eandem vero in campo exercendam, baculi, cum catena, vel fune cannabino in pedes & decempedas illorumque digitos legitime diviſo, una cum inſtrumentis ceteris, quorum uſus explicatur.

§. 126. Juxta reſolutionem problematis uniuscujuſque inſtituenda eſt operatio, ſive in charta, ſive in campo; ut videas, num ea facere poſſis, quæ jubentur. Quorum vero problematum reſolutiones arithmeticæ ſunt, adeoque calculo abſolvuntur; eæ tentandæ ſunt in exemplis non modo iis, quæ ipſimet in medium attulimus, verum etiam aliis; qualia comminiſci haud difficile, ubi in locum numerorum datorum ſurrogantur alii pro arbitrio noſtro. Quemadmodum enim conſultum eſt, ut una eademque operatio, ſive in charta, ſive in campo, aliquoties repetatur, donec exacte facere poſſis quod jubetur; ita etiam exempla cumulanda. Hoc nimirum non tantummodo facit, ut reſolutionem problematis uniuscujuſque rite intelligas, eandemque memoriæ firmius infigas; ſed & ut habitum exacte faciendi, quod faciendum erat, acquiras. Qui enim praxin exercere vult, non modo intelligere debet, quid fieri debeat, ſed & ut omni exactitudine id facere poſſit requiritur. Habitus docendo communicari nequit, ſed crebro exercitio, ſeu idem ſæpius faciendo acquiritur. Qui adeo docet, officio ſuo ſatisfecit, ſi ea tradit, quæ, ut recte facias quod faciendum, noſſe debes.

§. 127. Quoniam multa dantur problemata geometrica, quorum reſolutiones per calculum expediuntur; Geometria practica Arithmeticam practicam ſupponit. Illam igitur ſi addiſcere volueris, hanc ante addiſcas neceſſe eſt.

§. 128. Ex noſtris adeo Elementis

tis Geometriæ, abſque ullo negotio, Geometria practica extrahi poterat, ne verbo quidem immutato: cui quod utiliter addatur compendium Arithmeticæ practicæ, ex Elementis Arithmeticæ exſcribendum (§. 120), nemo eſt, qui non videt (§. 127).

§. 129. Enimvero, etſi praxis abſque theoria commode addiſci poſſit, & Elementa noſtra ita conſcripta ſint, ut breviſſima ad eandem via ducant abſque ulla theoria; meo tamen, ſi quid valet, conſilio, omnes agrimenſores & architecti militares, & ſi qui alii praxin geometricam exercere voluerint, tantum theoriæ ſibi acquirere deberent, quantum ad praxin demonſtrandam ſufficit. Quemadmodum enim theoria accurata praxin accuratam parit; ita etiam probe intellecta exercitium praxeos reddit exactum. Immo ſuccurrunt ſubinde in praxi caſus nonnulli, in quibus hæret ac facile aberrat, qui theoria inſtructus non eſt. Non opus eſſe videtur, ut hoc multis rationibus adſtruatur; qui enim conſilio noſtro aurem benignam præbere voluerit, veritatem dicti reipſa experietur. Nemo non novit, ſi plures agrimenſores aream ejuſdem campi inveſtigent, haud raro magnum eſſe diſſenſum in quantitate ejus definienda; certo indicio, quod non eadem accuratione ſinguli fuerint uſi, etſi omnem diligentiam adhibuiſſe ſibi videantur. Diligentia oculata eſſe debet, quæ ab accuratione nulla in re deficit. Ut hæc oculata ſit, theoriæ debetur.

§. 130. Equidem non diffitemur, theoriam adeo exactam non requiri in iis, qui Geometriam practicam exercent, qualem nos intellectus perficiendi gratia condidimus; unde & in Elementis noſtris Germanicis ab ea abſtinuimus eandemque in compendium contraximus. Quodſi tamen viſum fuerit omnem retinere theoriam, quam dedimus; ea multiplici utilitate ſeſe commendabit etiam praxin exercentibus. Per eam enim obtinebis, ut nulla in re patiaris deſiderari attentionem tuam, & vel in minimis te præbeas circumſpectum. Taceo, quod omnibus uſui ſit, ſi facultatum cognoſcendi legitimum uſum facere queant; & ipſa obligatione naturali, nemo negligere teneatur occaſionem, qua eundem in poteſtatem ſuam redigere valet.

§. 131. Neque eſt quod excipias, agrimenſoribus, & architectis militaribus, aliiſque praxin geometricam exercentibus non convenire theoriam, ſed eam captum ipſorum tranſcendere, immo ipſos eandem naturali quadam averſione faſtidire: hoc enim quam ſit a veritate alienum, & experientia me docuit, & ratio convicit. Si qui theoriam contemnunt, non alia de cauſa hoc faciunt, quam quod eam non didicerint, nec ignoti ulla ſit cupido, & quod eadem in praxi ſua carere poſſe ſibi videantur. Aliter vero ſentirent, ubi mature theoria

eorundem animis inſtillaretur. Quod vero eam capere nequeant, ſi rite eandem doceantur, adeo verum non eſt, ut experimento contrario refellatur. Ne difficultatem præter neceſſitatem faceſſas, doce ipſos primum praxin ſolam, ſed ea methodo, ut diſtincte concipiant ſingula, quæ fieri debent, quemadmodum nos urgemus: ita enim futurum, ut notionibus diſtinctis adſueti, quid inter has atque confuſas interſit facile internoſcant. Adde demonſtrationes, quas diximus, mechanicas; ut veritatem eorum, quæ docentur, experiantur: quam ubi percepiſſe ſibi videntur, eoſdem mone experimenta hæc loqui nonniſi veritatem in caſu ſingulari, nec reiterata eandem prodere in univerſali. Neque difficile eſt convincere quemvis a poſteriori, quod a particula ad univerſale non valeat argumentatio, cum ubivis proſtent exempla, quibus idem doceri poteſt. Cum hoc modo excitaveris cupidinem ſciendi, quod ſcire delectet; commodum jam erit ad theoriam progredi. Et ubi quis in cognitionis gradu primo acquirendo noſtro more verſatus fuerit, ad ſecundum conſequendum præparatus accedit; in quo ſi denuo morem a nobis præſcriptum ſequaris, abſque ulla moleſtia in theoria addiſcenda progredi dabitur.

§. 132. Qui theoriæ operam navant, propter uſum in diſciplinis ceteris mathematicis; illo non modo omnes propoſitiones ſibi familiares reddere, verum etiam habitum demonſtrandi comparare tenentur. Quamobrem univerſa Elementa Geometriæ eo modo pertractare debent quem, acquirendi ſecundi & tertii cognitionis gradus cauſa, capite primo præſcripſimus; & definitiones, ac propoſitiones pure enunciatas memoriæ firmiter infigere tenentur: quo plurimum confert accurata demonſtrationum analyſis, in quibus definitiones & propoſitiones pure enunciatæ tanquam principia adhibentur. Hoc enim pacto demonſtrationum ſequentium evolutio repetitionis vicem ſuſtinet, qua definitiones ac propoſitiones pure enunciatæ memoriæ mandantur, & diſcenti familiares evadunt; quales ſupponuntur ad ceteras Matheſeos partes abſque difficultate pertractandas.

§. 133. Quod problemata attinet, quæ praxin continent; notandum eſt, praxin in charta exercendam uſui eſſe in ceteris Matheſeos partibus, quæ vero exercetur in campo, ea nullum habere in reliquis uſum, niſi in Architectura militari, & in Aſtronomia, atque Geographia, nonnulla ex iis cognita atque perſpecta ſupponi. Praxis accurata in charta magis ornat Mathematicum, quam neceſſaria eſt, ſi in ſola theoria acquieſcere voluerit. Neque is multo inſtrumentorum apparatu indiget; ſed ſufficit regula, cum circino, & graphio, cujus tamen vicem ſupplet penna

na ex corvorum alis evulſa (§. 123 *Geom.*). Problemata, quæ praxin in campo docent, non tamen prorſus negligenda. Eorum enim theoretica cognitio diſcentem præparat ad ceteras Matheſeos partes facilius addiſcendas. Neceſſe igitur eſt, ut reſolutionem diſtincte concipiat, & demonſtrationem noſtro more reſolvat, ac analytice exprimat; omni cura ac ſollicitudine animi obſervans, quæ de iis, ſecundi cognitionis gradus acquirendi gratia, præcepimus, qui theoreticam Matheſeos univerſæ cognitionem curæ cordique habet.

§. 134. Eadem tenenda ſunt, ſi quis, intellectus perficiendi gratia, Geometriæ ſtudet; ſive tantummodo ad ſecundum cognitionis gradum, ſive ſimul ad tertium extra Matheſin adſpiret. Utilitatem percipiet qui, in Philoſophia morali & civili, accurata diligentia verſari, eandemque ad uſum vitæ transferre, & theoriam phyſicam ad Artes perficiendas applicare voluerit.

§. 135. Qui a Geometria & Trigonometria ad Algebram progredi voluerit, is cognitionis gradum tertium in Matheſi intendit. Quamobrem ea ipſi obſervanda ſunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus capite primo. Inprimis autem animum attendere debet ad præparationem, quæ demonſtrationi præmittitur; cum ea opus quoque habeat in reſolutione problematum geometricorum in Algebra, & in ſolutionibus, præſertim algebraicis, problematum in ceteris Matheſeos partibus.

§. 136. Elementa Arithmeticæ & Geometriæ, per Matheſin univerſam, & in omni cognitione mathematica, quam philoſophicæ contra diſtinguimus (§. 14 *Diſc. prælim.*), apprime neceſſaria ſunt, ita ut eorum notitia nemo carere poſſit, qui in ceteris Matheſeos partibus ad cognitionis gradum ſecundum atque tertium adſpirat. Quo majore igitur ſtudio ac induſtria in illis fuerit verſatus, eo felicius in reliqua Matheſi progredietur. Id etiam obtinebit, quod hodie in pleriſque Mathematicis, & in ſeipſo deſideravit Vir ſummus NEWTONUS (§. 101), ut methodum Geometrarum veterum cum algebraica recentiorum conjungat, & utriuſque compos reddatur: cujus inſignem experietur uſum, ſi ad ſumma quævis in Matheſi contendat, & exemplo NEWTONI naturam mathematice tractare voluerit; inprimis ſi quando volupe fuerit mathematicam rerum naturalium cognitionem in ſyſtema redigere, quantum fert ætas noſtra, præſertim ubi ante officio ſuo ſatisfecerint Philoſophi.

§. 137. Trigonometria plana, non minus quam Sphærica, primum in uſum Aſtronomiæ fuit inventa. Quamobrem indiſpenſabilis uſus eſt in Aſtronomia, adeoque eam negligere nequit, qui nobiliſſimæ huic ſcientiæ operam dare decrevit. Poſtea

quoque

quoque ad praxin geometricam in campo fuit applicata; quemadmodum capite ultimo Trigonometriæ planæ oſtendimus. Quamobrem eidem quoque ſtudere tenentur, qui praxin geometricam in campo exercere voluerint. Applicata eadem fuit ad varia problemata in Geographia, Hydrographia, Gnomonica, Mechanica, Architectura militari, & Opticis diſciplinis: ut adeo commendanda veniat ad haſce quoque Matheſeos partes animum appellentibus. Multo igitur illuſtrior eſt ejus uſus, quam qui olim fuerat.

§. 138. Qui in ſola praxi acquieſcunt, iis ſatisfaciunt perpauca iſta problemata, quæ capite ſecundo continentur; addituri ea, quæ continentur tertio, ubi Geometriam practicam curæ cordique habent. Hoc unicum notandum eſt, quod uſum Canonis ſinuum & tangentium, una cum Canone logarithmorum tam ſinuum atque tangentium, ſibi familiarem reddere teneantur, qui in uſum praxeos Trigonometriam planam addiſcunt; additis problematis, quibus in Arithmetica uſus logarithmorum docetur (§. 349 *& ſeqq. Arithm.*), una cum definitione logarithmorum, & theorematis eorum naturam explicantibus (§. 334 *& ſeqq. Arithm.*); ſed abſque demonſtratione.

§. 139. Exempla, quibus calculum trigonometricum illuſtravimus, adeo diſtincte repræſentavimus, ut ideam exemplarem reſolutionis problematum animo inſinuent, & reſolutionis vicem tueri poſſint. Quamobrem ii, quos ſola praxis juvat, eandem ſibi familiarem reddere tenentur: id quod uno alteroque exemplo facile obtinetur. Exempla autem complura facile comminiſcitur, qui numeris in exemplo propoſito datis ſubſtituit pro arbitrio alios. Inprimis etiam ſuademus omnibus, quotquot praxin geometricam in campo exercere voluerint, ut exempla proprio marte addant problematis, quæ hunc in uſum traduntur capite tertio. Reperiuntur autem ad imitationem eorum, quæ dedimus capite ſecundo. Nimirum non alia re opus eſt, quam ut data numeris exprimantur: id quod nihil difficultatis habet; præſertim cum in expendendis problematis data a quæſitis ſemper veniant diſtinguenda (§. 26). Quodſi hoc feceris, calculus erit idem, qui in problematis citatis: quæ etiam ratio eſt, cur eundem in textu non appoſuerimus, ne præter neceſſitatem eſſemus prolixiores.

§. 140. Qui praxin oculatam deſiderant, vel theoriæ tantummodo rationem habent; illos demonſtrationes ſuperaddere & in Trigonometria eodem modo verſari debere, quem pro ſecundo & primo cognitionis gradu acquirendo ſupra præſcripſimus, me vel tacente, intelligitur. Nihil adeo prætermittere tenentur, quæ in Elementis noſtris continentur. Et quam-

quamvis Canon ſinuum atque tangentium, cum naturalis, tum artificialis, jam fuerit conſtructus, ut nullus amplius problematum, quæ in capite primo in hunc finem traduntur, videatur uſus; ea tamen negligenda non ſunt, ut appareat, quomodo Canones iſti conſtrui potuerint, & quomodo ex theoria praxis, ad quam tendit, deducatur.

§. 141. Inprimis hoc proderit iis, qui ad cognitionis gradum tertium adſpirant. Ex hiſce enim perſpiciunt, quomodo ex cognitis alia incognita ratiocinando colligantur, & quomodo haud raro praxes prorſus inexpectatæ eædemque longe utiliſſimæ ex theoriis deriventur, quarum tantam prævidere non licebat utilitatem. Sane non alia de cauſa, poſtquam Canon ſinuum & tangentium jam fuit conſtructus, Mathematici tamen recentiores alios eoſdem conſtruendi excogitarunt modos, quam quibus uſi ſunt illorum conditores. Non alia de cauſa, poſtquam docuimus Canonis ſinuum atque tangentium conſtructionem, adjecimus ſcholion (§. 27 *Trigon.*), in quo monemus, eundem adhuc multis aliis modis conſtrui poſſe; laudavimuſque URSINUM, qui nonnulla præclara dedit, & in Algebra, ubi de ſerierum doctrina agitur, oſtendimus, quomodo pro ſinibus & tangentibus, nec non pro logarithmis reperiantur ſeries infinitæ, ex quibus per approximationem deducuntur numeri, qui ſatisfaciunt.

§. 142. Trigonometria non modo pars quædam Artis inveniendi ſpecialis eſt, cujus uſus in aliis Matheſeos partibus elucet (§. 137); ſed tota etiam ita digeſta, ut appareat, quomodo ſingula fuerint inventa, modo obſervare volueris, quæ de acquirendo cognitionis gradu tertio præcepimus capite primo. Ab ea igitur regulas generales Artis inveniendi non modo abſtrahere licet; verum ſi præſcripto a nobis modo, ad quem hic provocamus, pertractetur, ad ipſam quoque Artem inveniendi acquirendam aliquid conferet. Quamobrem ſtudium trigonometricum rite inſtituendum tam iis, qui ad tertium cognitionis gradum in Matheſi adſpirant, quam illis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, commendandum.

CAPUT IV.

De Studio Algebræ, ſeu Analyſeos mathematicæ in ſpecie.

§. 143. ANalyſis mathematica eſt ipſa Ars inveniendi, qua hodie utuntur Mathematici in veritatibus mathematicis inveſtigandis. Huic adeo operam dare debent, quotquot ad cognitionis gradum tertium in Matheſi

Matheſi adſpirant. Etſi enim demonſtrationum more noſtro facta reſolutio etiam analytica ſit, ut eodem modo ex hypotheſi data inveniri poſſit, quo demonſtrandum quod demonſtratur; non tamen iis detegendis ſufficit, ad quæ analyſis recentiorum ducit, tota vulgo Algebræ nomine appellari ſolita. Etenim, per Algebram, paucis cognitis, invenire licet quæ, ſi more veterum detegenda eſſent, longam rerum inventarum ſeriem ſupponerent. Quid, quod facili labore eruantur, quæ Herculeo inveſtiganda eſſent? Hæc ſane ratio eſt, cur inventa Mathematicorum recentiorum longiſſimo intervallo poſt ſe relinquant inventa Veterum, & quod uno ſeculo plura fuerint detecta, quam tot ſeculis inveniri potuerint, quibus Matheſis antea fuit exculta. Sane ſi ARCHIMEDES & APOLLONIUS noſtro ævo reviviſcerent; in ſtuporem raperentur, viſis inventis recentiorum, quæ per Algebram fuerunt in apricum producta: neque enim unquam ſibi perſuaſiſſent, patere ad talia mortalibus aditum.

§. 144. Non tamen omnia per calculos algebraicos erui poſſunt, quæ ad Geometriam ſpectant. Patet id ex ipſa Geometria elementari. Etenim quæ ibidem de lineis perpendicularibus, de paralleliſmo linearum, de angulis, de congruentia & ſimilitudine triangulorum, aliiſque nonnullis demonſtrantur, per Algebram inveſtigari nequeunt. Pendent enim hæc a ſitu linearum, quem ad ſe invicem habent. Calculus vero algebraicus eſt calculus magnitudinum, non ſitus. Unde LEIBNITIUS in Analyſi recentiori adhuc deſiderari monuit calculum ſitus, a calculo magnitudinum prorſus diverſum; quem tamen nec ipſe dedit, nec dedit adhuc alius, ſed in deſideratis numeramus.

§. 145. Similiter Analyſin Veterum, qualem loquitur noſtra demonſtrationum analyſis, non eam eſſe qua, Algebra inventa, carere poſſimus, haud difficulter oſtenditur. Etenim antequam problemata geometrica, vel alia in Matheſi mixta ad Geometriam puram reducta, per Algebram ſolvuntur, reducendæ ſunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo ſupponit præparationem methodo Veterum inveniendam, verum etiam ipſamet per eandem methodum eruenda. Accedit ſubinde occurrere problemata, etiam in altioribus, quæ methodo Veterum multo brevius & elegantius ſolvuntur, quam per calculum algebraicum, qui haud raro admodum perplexus & nimis longus eſt. Accedit, quod abſque omni theoria calculo algebraico minime ſit locus. Hinc qui problemata phyſico-mathematica, vel etiam mechanico-phyſica ſolvunt, quædam tanquam cognita ſumere tenentur. Contingit autem haud raro, ut ſumant nondum ſatis explorata, vel ſi ea demonſtrare voluerint, quæ certa ſunt & methodo Veterum

rigide

rigide demonſtrari poterant in dubitationem adducant; ut adeo, quæ per calculum ex aſſumtis eruuntur, vel incertitudini obnoxia fiant, vel ſuſpecta reddantur acutioribus, rigori Veterum adſuetis. Immo nullum eſt dubium, quin plura irrepſerint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum Mathematicorum reviſione quadam indigerent, & haud pauca firmiori fundamento ſuperſtrui mererentur. Nec alia ratio eſt, cur inter recentiores Mathematicos agitentur controverſiæ, quales Veteribus erant ignotæ. Optime igitur ſibi conſulunt, qui methodum Veterum cum algebraica Recentiorum conjungunt. Et merito dolemus cum NEWTONO (§. 101), quod, illa neglecta, cito nimis pede ad hanc hodie properent, qui inter Mathematicos eminere volunt.

§. 146. In Analyſi noſtra, primo loco occurrit Arithmetica ſpecioſa, quam etiam literalem appellare ſolent. Primo loco agitur de ſignis tam primitivis, quam derivativis. Occurrunt nempe ſigna quantitatum, & operationum arithmeticarum, quas vulgo ſpecies Arithmeticæ vocant. Quantitates, cum ſint numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), per determinatos explicabiles ſint. Quamobrem ſuadendum tyronibus, ut literas, quibus indigitantur quantitates, per plures numeros diverſos explicent. Quoniam vero eædem quantitates etiam ſub ſe comprehendunt quamlibet magnitudinem; igitur non minus conſultum eſt, ut etiam per magnitudines, veluti per lineas, explicentur. Linearum enim,& magnitudinum quarumvis determinatarum ratio ad aliam homogeneam, quæ pro unitate ſumitur,per numeros determinatos definiri poteſt; cum numeri revera omnes, tam rationales, quam irrationales, nonniſi rationem ad unitatem exprimant. Nimirum, quod literis generaliter, hoc eſt, indeterminate deſignatur, per numeros determinate exprimitur; itidemque per magnitudines determinatas; quatenus harum ratio ad aliam homogeneam pro unitate aſſumtam numeris, ſive rationalibus, ſive irrationalibus, exprimi poteſt: ſit ita, quod hoc variis modis fieri poſſit pro diverſitate ejus, quæ pro unitate ſumitur, nec ſemper hoc præſtare valeamus. Qui theoriam entis univerſalis, ab ipſa Matheſi abſtrahendam, perſpectam habet, multo intimius quæ dixi perſpiciet, quam qui ab omni Philoſophia prorſus alienum habet animum.

§. 147. Qui Artem inveniendi in genere curæ cordique habent; modo univerſalia a ſpecialibus abſtrahere didicerint, multa animadvertent ad Characteriſticam univerſalem ſpectantia, quam eſſe partem Artis inveniendi ipſa Arithmetica univerſalis, & calculus differentialis docet, ſuoque oſtendemus loco, ſi quando ad Artem inveniendi explicandam ordo nos deducet. Ipſa autem

Ars Characteriſtica univerſalis plurimum lucis affundet, tum notationi numerorum in Arithmetica, tum ſignis, quibus utimur in calculo literali, ſive communi, ſive differentiali. Ceterum hic notandum eſt, ſigna primitiva, quæ in alia reſolubilia non ſunt, reſpondere notionibus confuſis; derivativa vero diſtinctis: quemadmodum ſuo loco demonſtrabimus. Qui enim novit differentiam, quæ inter notiones diſtinctas & confuſas, quoad uſum earundem, intercedit, quantæ ſit utilitatis huc adverti animum facile perſpiciet.

§. 148. Ipſum algorithmum in integris ſatis perſpicue explicavimus. Tyrones ſibi eundem familiarem reddent, ubi diverſis modis exempla literalia explicaverit per numeros determinatos, ſi ita viſum fuerit, etiam per concretos, quemadmodum oſtendimus (§. 28, 30 *Analyſ.*). Qui in Arte inveniendi generali proficere volunt, iis conſultum eſt, ut ex ipſis hiſce exemplis in numeris concretis datis addiſcant, quomodo algorithmus literalis ex notionibus communibus deducatur, per quas primum inventoribus innotuerunt regulæ, quibus in eodem utimur; quamvis idem, utut non eadem facilitate, jam ex Elementis Arithmeticæ ac Geometriæ addiſci poterat. Plurimum enim prodeſt ut noris, omnem tandem cognitionem humanam ex notionibus communibus fuiſſe deductam, in quocunque ſcientiarum genere. Et in Ontologia jam me monuiſſe memini, EUCLIDEM Elementa ſua reduxiſſe ad notiones communes; conſequenter, per ea, omnem Matheſin. Hoc notaſſe etiam uſui erit in Matheſi mixta: demonſtrabitur autem in Arte inveniendi generali, aliter fieri hoc minime poſſe.

§. 149. In multiplicatione quoad uſum ſignorum fictiones occurrunt, veluti ſi quantitas ſive poſitiva, ſive negativa, per privativam multiplicanda venit (§. 34, 36 *Arithm.*) Unde liquet uſus fictionum, ad conſervandam notionum univerſalitatem. Etſi autem regulas, in ſubſidium vocata Geometria, demonſtravimus; ut ad imaginationem reducantur, quæ vi intellectus concipienda, conſultum tamen eſt, ut tyrones exempla ſtatim in numeris addant, in iis regularum veritatem perſpecturi, vel ipſas etiam regulas ex iiſdem deducturi, quemadmodum in Elementis Germanicis feci. Clarius enim in numeris liquet, cur addendum ſit, quod plus fuerat ſubtractum, vel ſubtrahendum, quod plus fuerat additum, ubi conceptibus univerſalibus, utpote nimium abſtractis, nondum fueris adſuetus: id quod initio ſtudii algebraici ſupponi nequit.

§. 150. Algorithmus fractorum literalis cum numeroſo idem eſt; cum quantitates, quæ literis deſignantur, ſint numeri indeterminati; regulæ autem

autem hujus algorithmi ex notione numeri generali fluant; conſequenter ex iis deducantur, quæ numeris determinatis & indeterminatis communia ſunt. Hinc tyrones ſibi conſulunt, ſi literis numeros ſubſtituant determinatos, ut clarius appareat, nihil hic occurrere diverſitatis. Quæ vero problemate 7, & ejus corollariis, ac ſcholiis (§. 45 *& ſeqq. Analyſ.*), de ſeriebus infinitis per diviſionem prodeuntibus docentur, initio prætermitti poſſunt ab iis, quorum attentio facile defatigatur; donec multo inferius in doctrina de ſeriebus infinitis iiſdem habuerint opus, ubi attentio nihil amplius difficultatis faceſſit, cum multo uſu jam major gradus fuerit acquiſitus.

§. 151. Multiplicatio & diviſio potentiarum, & elevatio ad potentiam, atque extractio ex radice, a Logarithmorum doctrina pendet, quam in Arithmetica tradidimus. Quamobrem, niſi hic in tenebris verſari volueris, illam ante tibi perſpectam reddere debes, quam ad Algorithmum dignitatum accedas. Inprimis autem hic notanda eſt reductio quantitatum irrationalium ad formam rationalium, & unitatis ad x^0 (§. 57, 55 *Analyſ.*), quoniam hæc reductio non modo multiplicem, eundemque prorſus eximium & inexpectatum, in altioribus habet uſum; verum etiam apertiſſime loquitur, quantum interſit inter characteres primitivos & derivativos: id quod Arti characteriſticæ generali, quam partem quandam Artis inveniendi eſſe ſupra jam monuimus, notiones fœcundas ſuppeditat.

§. 152. Uſus hujus reductionis analyticus in Arithmetica irrationalium conſpicitur; præſertim ubi ea, quæ nos de eadem tradimus, cum illis conferre velis, quæ vulgo in eadem docentur, veluti cum calculo irrationalium in Elementis Algebræ Ozanami. Sane tractatio noſtra tota vere analytica eſt, qualem requirit Analyſis recentiorum mathematica. Et qui ad cognitionis gradum tertium adſpirant, hinc diſcunt, quemnam facere teneantur characterum derivativorum uſum; cumque inferius per Algebram eruamus (§. 146 *Analyſ.*) quæ hic ex charactere derivativo, regulis Artis characteriſticæ generalis convenienter, deducuntur; hinc porro diſcere licet, quomodo ex characteribus, derivativis, modo magis naturali & ad Analyſin Veterum propius accedente, eruantur, ad quæ Algebra via quadam extraordinaria ducit: ſit ita quod tyrones, quibus intimius ſingula perſpicere nondum datur, Algebræ magis fidant, quam Arti characteriſticæ, quemadmodum indigitavi in ſcholio problematis 19 (§. 60 *Analyſ.*). Illuſtratur quoque doctrina fictionum in Arte inveniendi utilium, radicibus imaginariis, de quibus in ſcholio tertio problematis 13 (§. 71 *Analyſ.*) diximus. Et perplexa Euclidis

de irrationalibus doctrina, ope hujus characteriſticæ, ab omni perplexitate liberari, eidemque plena lux affundi poteſt; ut non amplius habeant, quod de obſcuritate illius conquerantur, qui eandem ex Elementis hodie vulgo eliminare ſolent.

§. 153. Quibus calculus irrationalium ſub initium moleſtus eſt, ii eundem prætermittant, & ſtatim ad uſum calculi literalis in inveniendis theorematis ſe transferant, abſoluto algorithmo integrorum & fractorum; donec multo uſu calculum literalem magis familiarem ſibi reddiderint, majuſque acumen acquiſiverint ejus applicatione, & attentione majori uti didicerint. In ipſo autem progreſſu patebit, quandonam calculo irrationalium habeas opus; ut gradum ſiſtere & ad ea, quæ in anterioribus neglecta fuerunt, regredi tenearis.

§. 154. Sola Arithmetica literalis ſufficit ad invenienda longe plurima, quæ in Elementis *Euclideis* docentur; ita ut, qui eam didicit, abſque ullo negotio eadem facilitate theoremata *Euclidea* reperire poſſit, qua exemplis illuſtrantur. Oſtendimus hoc capite tertio. Neque in problematis reſolvendis, quæ ibidem proponuntur, alia notanda ſunt, quam ut attendatur, quomodo datorum denominatio fiat, & ut literis deſignatæ quantitates numeris quoque exprimantur; quo pateat quid interſit diſcriminis inter exempla univerſalia & ſingularia, & hiſce illis lux quædam affundatur, qua indigent tyrones. Obſervandum tamen, calculum in caſu ſingulari inſtituendum eſſe, juxta regulas calculi univerſalis ſeu literalis, ubi iſte pleniori luce fulgere debet. Ex. gr. in problemate 20 (§. 81 *Analyſ.*) jubemur determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt. Diximus radicem unam n, alteram $n+1$. Dicantur in caſu ſingulari 7 & $7+1=8$. Quodſi quadratum majoris per calculum univerſalem reperias, erit $7.7+2.7+1=64$; Quadratum minus $=7.7$, Differentia $2.7+1=14+1=15$. Ita nimirum conſtabit, calculum univerſalem etiam exerceri poſſe in numeris, & ſic abſque calculo literali eadem detegi poſſe, quæ per literalem eruuntur; quemadmodum & in Arithmetica fecimus, ubi v. gr. in geneſin numerorum quadratorum & cubicorum inquiſivimus. Conſultius tamen eſt uti calculo literali, qui hoc commodo gaudet, ut numeri determinati ab indeterminatis ſua ſponte ſeſe diſtinguant: cum ſi notis numericis uti volueris, artificiis demum opus ſit, quibus hoc fiat. Ita in allato exemplo $2.7+1=14+1$, numerus binarius 2 eſt determinatus, idem in omnibus exemplis, ſed 7 eſt indeterminatus, qui in omni exemplo alio alius. Collatio autem calculi literalis cum calculo univerſali, in exemplis ſingularibus, uſui eſſe poterit

terit ad invenienda artificia, quibus abſque ulla confuſione calculus univerſalis in numeris utiliter exercetur. Noſtrum non eſt ea hic docere uberius, quæ Ars inveniendi jure ſuo ſibi vindicat. Etſi autem calculus univerſalis in numeris inſtituendus ſuperfluus videri poterat, literali invento; falluntur tamen, qui ita ſentiunt. Facit enim ad facile demonſtrandum haud pauca in gratiam eorum, qui ad Analyſin animum appellere nolunt, nec difficiles demonſtrationes capiunt; quemadmodum patet per ea, quæ de geneſi numerorum quadratorum & cubicorum in Arithmetica docentur. Neque nullus quoque ejus uſus eſt in Analyſi ſpecioſa, prout ex ſequentibus conſtabit. Taceo alia, quæ in ejus favorem dici poterant.

§. 155. Multa hic facillime, abſque ullo fere negotio, eruimus theoremata, quæ in Elementis EUCLIDIS extant, eorumque plura erui poterant, niſi hæc ſpecimina ſufficerent. Alia vero inveſtigavimus per Algebram. Enimvero jam ſupra monuimus (§. 144), per calculum literalem, qui nonniſi magnitudinum calculus eſt, non omnia in Geometria demonſtrari poſſe theoremata, ſed quædam pendere a ſitu; ad quæ inveſtiganda & analytice demonſtranda, peculiaris requiratur calculus ſitus. Quodſi Analyſis ſitus fuiſſet reperta; non inconſultum foret integra Elementa EUCLIDIS analytice demonſtrari; ut inter methodum Veterum, & Analyſin Recentiorum clarius pateret differentia. Quodſi quis eam inveſtigare voluerit, is novas condere tenetur definitiones ſitus notionem involventes; veluti quod *Punctum* ſit ſitus ſui unicum, quod *Circulus* ſit figura plana, in cujus perimetro ſingula puncta ad punctum quoddam intra eam dato eundem ſitum habent, quod *Linea* una ſit ad alteram *perpendicularis*, ſi punctum quodcunque in ea aſſumtum ſit ſitus ſui ad idem punctum alterius unicum. Dicitur autem *ſitus ſui unicum*, quod ad aliam magnitudinem datam, ſeu punctum aliud datum, eum habet ſitum, ut nullum aliud præter ipſum eundem ſitum habere poſſit. *Eundem* vero *ſitum* habent, inter quæ idem extenſum, veluti eadem linea recta poni poteſt (§. 5 *Geom.*). Præterea opus eſt novo calculo, calculo nempe ſitus: quem inveſtigaturus perpendere tenetur, calculum in genere eſſe inventionem characteris derivativi ex aliis, ſive primitivis, ſive derivativis, per continuam æquivalentium ſubſtitutionem (§. 298 *Pſych. empir.*). Hinc enim conficitur, diverſos determinandos eſſe ſitus poſſibiles eorumque excogitandos characteres, & ut hos legitime combinare liceat, requiri axiomata quædam generalia aut, ſi mavis, regulas quaſdam generales, quibus perficitur combinatio & ſubſtitutio.

Sed nobis minime vacat, ut in talibus inveſtigandis ingenii noſtri vires exerceamus, qui magnum adhuc campum emetiri tenemur, antequam Philoſophiam univerſam ad umbilicum perduxerimus. Sufficit aliis monſtraſſe viam, qua ſit ad metam contendendum. Reddat eandem proprio ingenio & propria induſtria perviam, qui hanc attingere voluerit.

§. 156. Quanta vero ſit vis Artis characteriſticæ, non modo ex ſingulis problematis, ſed vigeſimo præſertim nono, ejuſque corollariis (§. *95 & ſeqq. Analyſ.*) perſpicitur; in quo binomium ad dignitatem quamcunque evehere docemur; quod deinde ad extractiones radicum (§. *98 Analyſ.*), & ad infinitinomium ad dignitatem datam evehendum transferimus (§. 102 *Analyſ.*). Huc animum advertere debent non modo, qui in Analyſi Recentiorum feliciter progredi voluerint, verum etiam qui eidem, Artis generalis inveniendi cauſa, operam navant.

§. 157. Quoniam vero non uno artificio analytico ûtimur in problematis iſtis per calculum literalem ſolvendis; ſingulis autem artificiis inſunt generales notiones, quæ ad Artem inveniendi generalem ſpectant; eas inde abſtrahere tenentur, qui Artis generalis inveniendi gratia in Analyſi Mathematicorum verſantur: ut vero hoc facere poſſint, acquirere ſibi tenentur acumen pervidendi abſtracta in concretis, quod quomodo comparetur docebimus in philoſophia morali, ubi praxin virtutum intellectualium, inter quas etiam ſibi acumen iſtud locum vindicat, expoſituri ſumus. Quodſi vero quis in addiſcenda Matheſi eo modo verſatus fuerit, quem capite primo præſcripſimus, & inprimis in repræſentatione definitionum, propoſitionum, & demonſtrationum ſymbolica induſtriam ſuam exercuerit, atque inprimis ad animum probe revocaverit, quæ in ſcholio generali ad algorithmum integrorum de abſtrahendis regulis generalibus, juxta quas intellectus in eodem dirigitur, inculcavimus; is ſe hujus acuminis compotem fieri animadvertet: quod quomodo fiat, nunc exponere non lubet, ne extra oleas evagari videamur. Quemadmodum vero Matheſis & Philoſophia mutuas ſibi ſuppetias ferunt; ita quoque ad acumen iſtud ipſo uſu acquirendum haud parum confert Logica, qualem nos tradidimus idiomate Latino. Immo Ontologia etiam, & Pſychologia, adjumento eſſe poterit. Quamobrem autor fui, ut, abſolutis Arithmeticæ ac Geometriæ Elementis, ſtudium Philoſophiæ cum mathematico conjungatur. Et ſi quis in Arte inveniendi generali ex ſtudio Matheſeos proficere voluerit; ei ſuademus, ut, poſtquam in Philoſophia fuerit cum laude verſatus, Matheſin univerſam denuo pertractet, & huc inprimis animum advertat, quod ad uſum facultatum in veritate cognoſcenda

cenda uſui eſſe poteſt. Nullum enim dubito fore, ut perſpicillis philoſophicis uſus plus videat, quam cum iiſdem deſtitueretur.

§. 158. Inprimis autem opera danda eſt, ut tempeſtive adſuefiamus formulis algebraicis, tam per numeros, quam per lineas, explicandis. Quamobrem conſultum eſt, ut data exprimantur, tum numeris, tum lineis, & tam in formula ſubſtituantur pro literis numeri, quam figuræ conſtruantur juxta formulam : id quod cum in præſenti capite facillime ſuccedat, plurimum confert ad formulas per Algebram erutas, geometrice præſertim, minori moleſtia conſtruendas. Ex. gr. in problemate 24 (§. 90 *Analyſ.*), partes totius ſunt Q & q, & prodit aggregatum ex Q^2 & $Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$. Quodſi fiat $Q = 4$ & $q = 3$, erit $Q + q = 7$, $Q^2 = 16$, $(Q+q)^2 = 49$, adeoque $Q^2 + (Q+q)^2 = 65$. Sed $2Q = 8$, adeoque $2Q(Q+q) = 56$. Eſt vero $q^2 = 9$. Quare $2Q(Q+q) + q^2 = 65$. Habes itaque etiam examen, quali inprimis indigent tyrones, ut tanto clarius perſpiciant, quod per calculum fuit erutum a veritate non eſſe alienum. Etſi enim exempla ſingularia non evincant veritatem in univerſali; tyronibus tamen magis ſatisfaciunt, quam ſi animum ad calculum advertentes nullibi a ſe aberratum eſſe obſervent. Neque deſtituitur ſumma probabilitate, ſi quidem formula analytica cum exemplo in numeris conſentit. Quoniam enim numeri nullo conſilio eliguntur, ſed potius ſumuntur, prout eos caſus obtulerit; vix credibile eſt te caſu incidere in numeros, qui ex ratione ſingulari ſatisfaciunt formulæ, in omni caſu minime veræ. In præſenti caſu dubium hoc eſſe nullum, quod quis movere poterat, oſtendi nullo negotio poterat, ſi calculus univerſali ratione inſtituatur etiam in numeris. Etenim ſi $Q = 4$ & $q = 3$, habebis $2.4^2 + 2.4.3 + 3^2 = 2.4(4+3) + 3^2$, hoc eſt, $2.16 + 2.12 + 9 = 8(4+3) + 9$, ſeu $32 + 24 + 9 = 32 + 24 + 9$. Vides autem pro numeris 4 & 3 ſubſtitui poſſe duos alios quoſcunque, ceteris ſemper eodem modo ſeſe habentibus. Sed nolim tyrones talibus defatigari, niſi tempeſtive adſuefieri voluerint calculo, univerſali ratione in numeris inſtituendo : quo in caſu conſultum foret, ut numeri determinati, in omni caſu iidem, qualis hic binarius ter occurrit, virgula transverſa notentur, nempe ut ſcribatur $\not{2}.4^2 + \not{2}.4.3 + 3^2 = \not{2}.4(4+3) + 3^2$. Quodſi Q & q explices per lineas & conſtruas tam quadratum ex compoſita $Q + q$, quam ex una Q, & deinde rectangulum ex compoſita Q & q in rectam Q bis ſumtam atque quadratum lineæ alterius q, formulam geometrice repræſentabis. Sed utriuſque figuræ æqualitatem intuitive non cognoſces,

quemadmodum numerorum, qui calculo ſecundum formulam inſtituto prodeunt. Hoc tamen non obſtante figurarum conſtructio non omni utilitate caret. Neque enim figuræ eum in finem conſtruuntur, ut examinis vicem ſubeant; ſed ut diſcamus, quomodo formulæ analyticæ geometrice conſtruantur, & earum ſenſus per figuras explicetur. Subinde tamen accidit, ut non minus veritatem formulæ intuendam præbeant figuræ, quemadmodum numeri. Taceo quod mechanicæ demonſtrationi, de qua ſupra diximus, hic ſit locus, ſi ad principium congruentiæ confugias & partes a figura una reſciſſas alteri ſuperimponas, prout ipſe uſus docuerit. Enimvero quibus talia inutilia videntur, is ea prætermittat. Neque enim omnia conducunt omnibus.

§. 159. Nimirum calculus literalis, & ejus applicatio ad ſolutionem problematum, doceri poterat pueros & adoleſcentes; quorum captui conſulitur, ſi, quæ abſtracta ſunt, ad ſenſum & imaginationem reducantur. In omni Philoſophia utilis eſt hæc reductio; ut eidem nunquam ſatis adſuefieri poſſit, qui in hac inoffenſo pede progredi voluerit. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, in Algebra verſantur, talia negligere non debent, quæ ſuperflua ac puerilia videntur aliis, qui in nuda veritatum mathematicarum cognitione acquieſcunt. Maximæ quoque utilitatis eſt ad recte philoſophandum, ſi actus imaginationis ab operationibus intellectus diſcernere valeas, ne abortus imaginationis cum notionibus realibus confundas: quemadmodum accidit ſummis etiam Mathematicis, qui imaginaria a realibus ſeparare non didicere, neglectis exercitiis, quæ huc facere poterant.

§. 160. Difficilis eſt tyronibus doctrina de ratione quantitatum, quam in Arithmetica demonſtravimus; præſertim ſi theoremata non exponantur per numeros, & demonſtratio ad exempla non applicetur. Delectabuntur itaque, quando in problemate 32 (§. 124 *Analyſ.*) videbunt, quomodo per calculum literalem, abſque ullo negotio, omnia pateant; ut ad ea capienda ſenſuum magis uſu, quam intellectus operationibus opus ſit. Hæc ipſa autem voluptas, non modo amorem ſtudii algebraici, ſed & alacritatem idem proſequendi inſtillabit. Conſultum vero eſt, ut literæ non minus per numeros rationales, quam irrationales explicentur: id quod non modo univerſalitatem theorematum per calculum erutorum confirmabit, verum etiam exercitio calculum irrationalium reddet magis familiarem. Immo, ne multitudine theorematum hic coacervatorum obruaris, ſed ut ſingula abſque moleſtia memoriæ infigantur, niſi hoc jam factum fuerit in Arithmetica, hoc ipſo obtinebis. Quoniam vero theoremata verbis pure enun-

enunciata in uſum futurum memoriæ mandanda ſunt (§. 21); non minus conſultum eſt, ut ſingula verbis enuncies. Hoc modo enunciatorum facilior quoque erit comparatio cum theorematis in Arithmetica propoſitis; cumque ea tota nitatur diſtinctis notionibus, faciet idem inſtitutum ad notiones confuſas ad diſtinctas revocandum, & animum impatientem reddet ad acquieſcendum in confuſis, per quas nobis veritatem perſpicere videmur: id quod haud parum proderit in Philoſophia ad præcavendam præcipitantiam, qua in periculum errandi adducimur, & in errorem haud raro præcipites damur. Theorema primum, quo inveſtigatur ratio factorum communem efficientem habentium, multiplicatis ſcilicet duabus quantitatibus, rationem quamcunque inter ſe habentibus, *a* & *ma*, per eandem tertiam *c*, ita repræſentatur:

$$a : ma$$
$$c \quad c$$

$$ac : mac = a : ma$$

Per numeros rationales explicabitur hoc modo:

$$8 : 12$$
$$3 \quad 3$$

$$3 \cdot 8 : 3 \cdot 12 = 8 : 12$$
$$\text{ſeu } 24 : 36 = 8 : 12$$

Quodſi 24 dividas per 36 & 8 per 12; fractionibus $\frac{24}{36}$ & $\frac{8}{12}$ reductis, prodibit utrobique $\frac{2}{3}$, idem nempe exponens (§. 136 *Arithm.*, quemadmodum requirit proportio (§. 149, 155 *Arithm.*).

Per numeros irrationales explicabitur hoc modo:

$$\sqrt{5} : \sqrt{3}$$
$$\sqrt{7} \quad \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5}.\sqrt{7} : \sqrt{3}.\sqrt{7} = \sqrt{5}.\sqrt{3}$$
$$\text{ſeu } \sqrt{35} : \sqrt{21} = \sqrt{5} : \sqrt{3}$$

Quodſi denuo $\sqrt{35}$ dividas per $\sqrt{21}$ & $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$, prodibit utrobique exponens idem $\sqrt{1\frac{2}{3}}$.

§. 161. Quodſi exiſtimes, committi hoc pacto circulum vitioſum, cum fractionum reductio ad minores terminos ſupponat rationum doctrinam, & calculus quoque irrationalium eadem nitatur; non unum eſt, quod reſpondeo. Primum conſtat, calculum fractionum & irrationalium erui poſſe per Algebram, quemadmodum ſpecimine quodam docuimus (§. 146 *Analyſ.*), & quod idem imitari detur in caſibus aliis, etiam in algorithmo fractionum, monuimus (§. 147 *Analyſ.*). Sane per Algebram reperiri poſſe reductionem fractionum ad minores terminos, quod dubio careat, exemplo ſingulari hoc docere lubet. Sit fractio reducenda $\frac{9}{12}$ Fiat

$$\frac{9}{12} = y$$

$$\text{erit } 9 = 12y \quad \underline{}\ 3$$

$$3 = 4y \quad \underline{}\ 4$$

$$\frac{3}{4} = y$$

adeoque $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Quodſi pro $\frac{9}{12}$ ſubſtituas $\frac{a}{ma}$, vel ſi mavis *na* : *ma*; habebis regulam, quæ in Arithmetica ad fractiones ad minores terminos reducendos præſcribitur. Cumque calculus hic nitatur axiomatis notiſſimis, intelligi etiam poterit ab iis, qui Algebram nondum didicerunt. Deinde notandum eſt, nos calculum fractorum & irrationalium jam tradidiſſe, independenter a problemate 32 (§. 124 *Analyſ.*), adeoque abſque circulo vitioſo a nobis illuſtrationis gratia adhiberi poſſe, quæ aliter jam demonſtrata ſunt, ut eorum, quæ traduntur, appareat conſenſus. Quamprimum vero ſcrupulus iſte te angit, tollitur exemplo eo, quem diximus, modo. Quodſi quis Elementa Arithmeticæ & Geometriæ methodo analytica recentiorum demonſtrare vellet, is calculum literalem cum numeroſo in Arithmetica combinare poterat, & algorithmum fractorum, nullis ſuppoſitis de ratione quantitatum theorematis, per Algebram elicere tenetur, antequam per calculum literalem demonſtret theoriam rationum. Ceterum hic notari velim, quam facile committatur circuloſus vitioſus, qui non advertitur, ab iis, qui extra ſyſtema propoſitiones aliquas demonſtrare volunt; ut agnoſcatur neceſſitas ſyſtematum veri nominis in omni ſcientiarum genere, & ut principia, quibus utimur in demonſtrando, deſumantur ex ſyſtemate, in quo propoſitiones demonſtrandæ vel non occurrunt, vel ſaltem non anteriore loco, quam principia iſta, collocantur. Videmus etiam per præcipitantiam judicare eos, qui demonſtrationi cuidam circulum vitioſum ſimpliciter imputant, qui nonniſi in relatione ad certum aliquod ſyſtema committitur; ubi nondum demonſtraverunt, non poſſe condi ſyſtema, in quo veritates ita ſibi invicem ſubordinentur, ut demonſtrationi iſti abſque circulo vitioſo ſit locus. Ad talia omnino animum advertere tenentur, quotquot intellectus perficiendi curam gerunt.

§. 162. Inprimis etiam attentionem meretur problema 29 (§. 95 *Analyſ.*), quo theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo inveſtigatur, ope ſolius calculi literalis; quatenus ſcilicet oſtendit, quomodo theoremata infinita ad unicum reduci poſſint, ita ut unum æquipolleat infinitis; ut præjudicium illud evellatur animo, quaſi intellectus finitus non ſit capax infiniti. Falſum enim eſſe hinc intelligitur, quod aliis quoque ſpeciminibus comprobabitur in ſequentibus, intellectum infinita comprehendere non poſſe; cum hic formulas numero infinitas ſub una quadam contentas exhibeamus. Rationem, cur hoc fieri poſſit, perſpiciet, qui attenta mente perpendere voluerit, quæ hic docentur. Nec minus idem problema ſingularem attentionem meretur,

tur, ob artificia ſingularia, quibus in eodem ſolvendo utimur, & quorum uſus etiam eſt in aliis, immo quæ artificia heuriſtica generalia ſuggerunt, extra Matheſin etiam uſurpanda.

§. 163. Elementa nimirum Analyſeos ita conſcripſimus, ut paucas præſcripſerimus regulas, reliqua vero artificia ipſo uſu inſinuentur: quibus cum utendum ſit, non modo in eo problemate ubi primum adhibentur, verum etiam in aliis ubi adhiberi poſſunt; ſi reflectendo ſuper iiſdem diſtincta eorundem notio animo imprimitur, & facilius eadem memoria retinentur, & eorum ſtatim meminimus, quando iiſdem denuo opus habemus, nec tentatis demum fruſtra aliis in ea caſu incidimus. Generalia vero Artis inveniendi præcepta ut inde abſtrahat, qui artificia quibus utimur nondum diſtincte animo concepit, & in rationes eorum inquiſivit, prorſus impoſſibile eſt. Quoniam generalia conſtituuntur ſimilitudine latente in ſpecialibus; ingenii quoque acumen mirifice augetur generalium iſta abſtractione, quam juvant regulæ de notione generis ex data notione ſpeciei formanda (§. 710 *Log.*), & de notione generum ſuperiorum ex notionibus inferiorum derivanda (§. 711 *Log.*), quemadmodum applicationem extra Matheſin adjuvant regulæ de notionibus ſpecierum ex notione generis (§. 712 *Log.*), & de notionibus ſpecierum aliarum ex notione ſpeciei unius deducenda (§. 714 *Log.*); quas ſingulas & ipſas a Matheſi abſtrahi poſſe, exempla docent, quibus problemata hæc illuſtravimus in Logica.

§. 164. Nemo a nobis requiſiverit, ut artificia ſpecialia, quibus utimur, ad notiones generales revocemus, & alias ſpeciales determinemus, quibus extra Matheſin in aliis veritatibus inveſtigandis opus eſt. Hæ enim pertinent ad Artem inveniendi generalem, quam ſuo loco, ſi Deo viſum fuerit, explicaturi ſumus: ubi in notis adjectis doceri poterit, quomodo ab artificiis analyticis Mathematicorum abſtrahantur, quæ in ea ex notionibus ontologicis, & pſychologicis, aliiſque Philoſophiæ principiis, demonſtrantur. Sufficit excitaſſe attentionem illorum, qui ſtudium Philoſophiæ cum mathematico conjungunt, ea methodo philoſophantes, qua nos utimur.

§. 165. Enimvero progrediamur ad Algebram proprie ſic dictam. Algebra primum non erat niſi regula arithmetica, quæ inſtar regulæ trium in eadem docebatur, & in numeris tantummodo exercebatur. Arithmetica literali a VIETA, Gallo, inventa, latior patebat ejus uſus; cum ſub literis, non ſolum numeri ſeu quantitates diſcretæ, ſed & magnitudines ſeu quantitates continuæ comprehenderentur. Unde calculum literalem VIETÆ ad Geometriam elementarem applicabat

Ghetaldus Italus in Libris *de Reſolutione & Compoſitione mathematica.* Cum Harriottus Anglus, Arithmeticam literalem ope characteriſticæ magis perfeciſſet, & Cartesius genuina characteriſtica potentiarum uſus, (quemadmodum jam obiter monuerat Keplerus in *Harmonica*, & rationem deſignationis perſpicue multo ante docuerat Stifelius in *Arithmetica integra*, numerorum coſſicorum naturam ex genuinis fundamentis eruens,) Algebram quoque ad Geometriam ſuperiorem applicaret; illuſtrior adhuc ejus evaſit uſus. Nos igitur ut in tradenda Algebra gradatim progrederemur, primum eam exercere docuimus in problematis arithmeticis determinatis; deinde etiam in indeterminatis; mox in problematis Geometriæ elementaris; tandemque in problematis Geometriæ ſublimioris. Quoniam vero Geometria ſublimior aliud adhuc calculi genus requirit, in quo quantitates ſupponuntur infinite parvæ, methodo a Keplero in *Stereometria* primum quaſi obiter indicata, a Cavalerio in *Geometria Indiviſibilium magis promota* & a Stephano præſertim de Angelis, atque Gregorio a S. Vincentio ulterius exculta; hoc quoque calculi genus, cum reductione quantitatum ad ſeries infinitas per diviſionem Mercatoris, & extractiones radicum *Newtonianas*, combinatum, explicavimus; & Algebræ uſum, adhibito hoc calculo in Geometria ſublimiori, multo latiorem expoſuimus. Ceterum cum in Geometria elementari omiſerimus theoremata nonnulla, quæ difficilius demonſtrantur; qualia ſunt de multiſectione anguli, ſeu diviſione circuli & arcus in partes quotcunque æquales, & de inveſtiganda ſoliditate corporum regularium, nec non de inſcriptione quorundam polygonorum in circulo ab Euclide demonſtrata; Geometriam vero ſublimiorem methodo Veterum demonſtratam prorſus non attigerimus; quæ hic deſiderari poterant, per Algebram inveſtigare docuimus, ut una eademque opera & Ars inveniendi exerceretur, & theorematum ſcitu neceſſariorum cognitio acquireretur. Quoniam enim non cujuſvis eſt in numeris, & lineis, atque figuris conſeneſcere, & ab omnibus ſtudium Philoſophiæ cum mathematico conjungi conſultum ſit; plerique etiam non alio fine Matheſin puram tractare debent, quam ut in Philoſophia aliiſque ſtudiorum generibus felicius progrediantur; Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ abunde ſufficere exiſtimavimus, ut genuinam methodum, ſine qua ad ſolidam rerum cognitionem in quocunque ſcientiarum genere perveniri minime datur, nobis familiarem reddamus; præſertim ſi demonſtrationes noſtro more reſolvantur, & ſingula analytice repræſententur, quemadmodum capite

primo

primo præcepimus; & ceterarum veritatum mathematicarum facillimo modo acquirendam eſſe duximus cognitionem.

§. 166. Studium algebraicum ut facilitaremus, primas tantummodo expoſuimus regulat (§. 141, 143 *Analyſ.*), eaſque ſtatim applicavimus ad exempla; problematis eo conſilio electis, ut vel artificium aliquod analyticum animo inſinuent, vel veritatem quandam cognitu neceſſariam doceant. Ita problemate ſtatim 38, quod in hoc genere primum eſt, (§. 144 *Analyſ.*) oſtendimus, dari proprietates numerorum ſingulares, quibus ab omnibus aliis diſtinguuntur, & quæ differentiam eorum numericam conſtituunt. Hoc ipſo illuſtratur doctrina de differentia numerica individuorum, in Ontologia a nobis tradita, & in Coſmologia, ac Pſychologia demonſtrata; ex doctrina autem de origine idearum in intellectu divino, prorſus a priori deducta, ex ipſa natura & attributis Dei, entis omnium primi, multo clarius elucefcens, ſcholæ autem non ſatis animadverſa, multo minus expenſa. Quoniam vero exemplum nonniſi ſingulare eſt, numeri nempe nonniſi duodenarii; ſequente ſtatim problemate (§. 145 *Analyſ.*) theorema generale eruere docemus, tum ut pluribus exemplis confirmetur idea tam nobilis, multique per philoſophiam omnem, tam practicam quam theoreticam, uſus, tum ut uberius explicetur artificium problemata particularia, immo ſingularia, ad univerſalitatem revocandi; cujus jam ſpecimina quædam dedimus in anterioribus, veluti cum problema generale de binomino ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analyſ.*), de radice quacunque inde extrahenda (§. 98 *Analyſ.*) & de infinitinomio ad dignitatem quamcunque evehendo proponeremus (§. 102 *Analyſ.*), & regulas de permutatione quantitatum, ſeu variatione ordinis earundem, ad univerſalitatem revocaremus. Similiter problemate 40 (§. 146 *Analyſ.*), ſpecimine quodam docui per Algebram inveſtigari poſſe talia, quæ aliis etiam modis erui poſſunt, & in ſcholio (§. 147 *Analyſ.*) monui, idem in aliis quoque eodem modo procedere. Quod vero utilitate ſua non deſtituatur, eandem veritatem pluribus modis diverſis inveſtigari, ſupra jam monuimus (*§. 161*). Illuſtravimus differentiam, quæ intercedit inter ſolutionem problematum in numeris abſtractis & concretis (§. 161 *& ſeqq. Analyſ.*), & artificia reductionis inſinuavimus (§. 163, 183, 184 *Analyſ.*). Cum de proportione harmonica & contra harmonica, nec non de numero pronico, & numeris polygonis, aliiſque figuratis nihil dixerimus in Arithmetica, ne ejus theoriam nimium extenderemus, & a ſtudio Geometriæ nimis diu detineremus tyrones, ſtudii mathematici facile effecturi deſertores; defectum

iſtum

iſtum hic ſupplemus, dum theoremata præcipua ad theoriam iſtorum numerorum ſpectantia per Algebram eruere docemus (§. 186 *& ſeqq. ac* §. 206 *& ſeqq. Analyſ.*). Idem a nobis factum eſſe in reliquis capitibus, qui animum huc advertere libuerit, facile deprehendet.

§. 167. Inprimis autem ſingularem attentionem meretur artificium prorſus ſingulare, quo in ſummandis quadratis & cubis, quorum radices in ſerie numerorum naturali progrediuntur, utimur (§. 200 *Analyſ.*), & quod mox ad ſummandas potentias quaſcunque numerorum naturalium transferimus (§. 203 *Analyſ.*), ac deinde ad ſummandos numeros polygonos (§. 212 *Analyſ.*), & ad ſummandos quoque pyramidales adhibemus (§. 216 *Analyſ.*). Quantum enim eodem præſtetur, abunde intelliget, qui quæ hac methodo eruuntur conferre voluerit cum *Arithmetica infinitorum* WALLISII & inprimis BULLIALDI. Facile autem apparet, methodum hanc ad alia problemata arithmetica ſolvenda transferri poſſe, perinde ac calculus ſummatorius in Geometria ampliſſimum habet uſum. Nec puto faciliori modo potentias, & numeros figuratos ſummari poſſe. Loquuntur autem hæc ipſa problemata, & problema de binomio ad dignitatem infinitam evehendo, ac radice quacunque ex eodem extrahenda, ut alia taceamus, quam ardua problemata per calculum literalem, & Algebram ſolvi poſſint; etiamſi pauciſſima theoria fueris inſtructus; ut adeo methodi hæ, in Arte inveniendi, præ methodo Veterum ſeſe maxime commendent. Per eas enim aditus ad ea patet, quæ a noſtra cognitione intervallo quam longiſſimo adhuc ſunt remota. Clarius idem eluceſcet in ſequentibus. Unde ſi quis in Matheſi inventorem agere voluerit, ei Analyſis Mathematicorum recentiorum nunquam ſatis commendari poteſt.

§. 168. Per univerſam Analyſin, in ſolvendis problematis, calculum integrum diſtincte exhibuimus; ut quilibet tyro proprio marte intelligat, quomodo problema fuerit ſolutum, & quomodo ordine in ſolutione ſit progrediendum, quem præſcribunt regulæ generales ab initio expoſitæ. Lineis quoque diſtinximus ea, quæ ex anterioribus concluduntur, ab iis, ex quibus colliguntur per communem algorithmum. Non tamen hoc ipſo ſolutiones reddidimus prolixiores, quin potius in minus eaſdem ſpatium haud raro coarctavimus. Et qui citra confuſionem, quæ errorem facile parit, abſque ulla moleſtia, problemata ſolvere voluerit; eo modo calculum inſtituere tenetur, quo eundem in contextu repræſentamus. Quilibet adeo experietur, nullibi ipſi eſſe hærendum, modo attentionem afferre voluerit. Equidem, brevitatis gratia, nonniſi ſpeciminibus quibuſdam oſtendimus,

quo-

quomodo formulæ algebraicæ verbis explicentur, ut prodeant regulæ, per quas problema ſolvitur in dato quocunque caſu particulari; nec non quomodo theoremata ex calculo eruantur. Suadendum tamen tyronibus, ut idem faciant in ſingulis problematis. Sentient utilitatem, ubi in hoc labore ſeſe præſtiterint diligentes. Explicavimus formulas per numeros; ut diſcant tyrones, quod eædem inſtar regulæ ſint, quæ per calculum eruuntur univerſalem. Initio tamen utilitate ſua non caret, ſi ſolutionem algebraicam tentent in exemplis ſingularibus, numeris in locum literarum, quibus quantitates datæ deſignantur, ſurrogatis, quemadmodum exemplo aliquo oſtendere lubet. In problemate 41 (§. 148 *Analyſ.*), datur duarum quantitatum ſumma & eorundem factum, quæruntur quantitates ipſæ. Quare ſi ſit ſumma $a = 14$, factum $b = 48$; reſolutio talis erit:

Sit ſumma $= 14$, ſemidiffer. $= x$
factum $= 48$, erit Quantitas

$$\begin{array}{r} \text{maj.} = 7 + x \\ \text{min.} = 7 - x \\ \hline -7x - x^2 \\ 49 + 7x \\ \hline \text{Factum} = 49 - x^2 \end{array}$$

Ergo

$$\begin{array}{c} 49 - x^2 = 48 \\ \hline 1 - x^2 = 0 \\ \hline 1 = x^2 \\ \hline 1 = x. \end{array}$$

Quare $7 + x = 8$, & $7 - x = 6$.

§. 169. Quodſi problemata quoque per Algebram numeroſam ſolvas; non modo hinc elucefcet diſcrimen inter Algebram numeroſam & ſpecioſam, & hujus præ illa præſtantia agnoſcetur; cum per iſtam nonniſi exempla computentur, per hanc vero ſolutiones, adeoque veritates univerſales detegantur; verum etiam calculus algebraicus reddetur familiarior & clarior. Hoc vero ſuademus nonniſi primis tyronibus. Qui enim in calculo jam fuerint verſati, iſtiuſmodi exercitiis non amplius habebunt opus. Conſultum vero eſt exemplum calculi numeroſi conferri cum calculo ſpecioſo; tum ut appareat, quantum conveniant, quantum differant, tum ut numeroſus lucem affundat ſpecioſo. Quodſi quis univerſalitatem in calculo numeroſo conſervare velit, haud difficulter idem præſtabitur, quemadmodum exemplum modo allatum, & hic alia forma exhibitum, docet:

$$\begin{array}{c} 7^2 - x^2 = 48 \\ \hline 7^2 = 48 + x^2 \\ \hline 7^2 - 48 = x^2 \\ \hline \sqrt{(7^2 - 48)} = x \end{array}$$

Vides nimirum, in quolibet caſu, a quadrato ſemiſummæ 7^2 ſubtrahendum eſſe factum & ex reſiduo extrahendam radicem, ut habeas ſemidifferentiam numerorum quæſitorum. Quodſi Veteres hoc animadvertiſ-

ſent, per Algebram numeroſam, ante inventum calculum literalem, non minus veritates univerſales eruiſſent, quam nunc per ſpecioſam erui ſolent. Si enim in calculo numeroſo univerſalitatem conſerves, ſpecioſo prorſus æquipollet, quemadmodum collatio utriuſque calculi intuenti extemplo prodit. Immo hoc pacto etiam, eodem ſucceſſu, per Algebram numeroſam ſolvi poterant problemata geometrica, quemadmodum nunc ſolvuntur per ſpecioſam. Sed de hoc dicemus ſuo loco. Ratio in aprico eſt. Per calculum ſpecioſum obtinentur ſolutiones univerſales, quia idem in omni caſu particulari, & pro literis, quibus quantitates datæ deſignantur, numeri quilibet ſubſtitui poſſunt, ſalvo calculo integro. Idem vero ſuccedere eodem modo in calculo numeroſo, qui univerſalitatem conſervat, per ſe patet. Quoniam ſigna primitiva, qualia ſunt quibus exprimuntur quantitates datæ, prorſus arbitraria ſunt; notis autem numericis ſignificatum univerſalem imponere licet; univerſum a ſingulari, quem habent, abſtrahere licet: veluti ut 14 non ſignificet ſummam ex duobus numeris determinatis, (quas hic eſſe 8 & 6 ſolutio prodit), ſed ſummam ex duobus quibuſcunque numeris, immo generalius ex duabus quibuſcunque quantitatibus compoſitam, veluti ſi ſignificet lineam in duas quaſcunque partes diviſam; & ſimiliter 48 non denotet factum ex duobus numeris determinatis iiſdem cum anterioribus, quorum ſumma eſt 14, ſed potius factum ex duobus quibuſcunque aliis, cum illis tantummodo iiſdem qui ſummam conficiunt, vel generalius ex duabus quibuſcunque quantitatibus, cum illis iiſdem ex quibus ſumma componitur; veluti quando 14 ſignificet lineam in duas quaſcunque partes diviſam, ſi 48 denotet rectangulum ex parte una in alteram.

§. 170. Non difficile fuiſſet Veteribus hæc animadvertere; ſi quidem in univerſalia in iis, quæ cognoſcebant, latentia mentis aciem intendere voluiſſent, & a notatione numerorum notiones Artis characteriſticæ univerſales abſtraxiſſent: ad quod faciendum non defuit ipſis acumen, ſed defecit tantummodo attentio ad ea, quæ, pro ſcopo præſente, ſatis cognita atque perſpecta deprehendebant. Diſcant hinc velim omnes, quibus puerilia, aut ſaltem ſuperflua videntur, quæ ad tractandam Matheſin præcipimus; quantum non modo ſibi, verum etiam ſcientiæ deſint, qui, quæ ſe ſatis intelligere arbitrantur, ea nulla amplius attentione dignantur, & vulgarium meditationem ad ſublimia nitentibus non convenire arbitrantur. Multo luculentius hæc patebunt, ubi Artem inveniendi explicare licuerit. Nos experti, quantum valeat vulgarium meditatio, nulli dubitamus, quin in Philoſophia univerſa, præſertim in Phyſica, & Philoſophia morali, im-

mo ipſa civili, dudum principia certa, per quæ ad remotiora paratur aditus, conſtituiſſent Philoſophi; ſiquidem ad notiones communes, ex maxime vulgaribus derivandas, ſufficientem attentionem afferre voluiſſent. Neque vero exiſtimandum eſt, convenire hæc iis, quibus ad ſublimiora non conceditur aditus. Etenim non leve acumen requiritur, ut notiones communes, quas ſuppeditant obvia, non modo ad diſtinctas & determinatas revoces, ſed & inde univerſales abſtrahas. Quænam enim, quæſo, ratio eſt, cur notionum communium, admodum fertilium, quemadmodum vel EUCLIDIS Elementa teſtantur, immo ipſa quoque Algebra confirmat, non eum hactenus fecerint uſum Philoſophi, nec etiam in dirigendis actionibus viri prudentes, quem facere poterant, niſi quod negligantur ab iis, qui acumine alios vincunt. Sane cur Mathematici ſummi, quorum acumen accuſari nefas, genuinam demonſtrationis formam non apprehenderint, ratio alia non eſt, quam quod eandem attentione ſufficiente dignati minime fuerint, ſine qua diſtinctam ejus notionem conſequi minime datur. Conſtat autem, quantum ſibimetipſis defuerint, tum ubi demonſtrationes more Veterum in ipſa Matheſi dare voluerunt, tum quando extra eandem veritates quaſdam demonſtrare conati ſunt. Quo majore acumine maxime vulgaria perluſtrantur, eo profundiora in iis latentia in apricum proferuntur.

§. 171. Poſtquam uſum Algebræ in ſolvendis problematis Arithmeticis determinatis oſtendimus, ad problemata indeterminata progredimur capite ſecundo. Applicamus in eo Algebram ad problemata pleraque DIOPHANTI, a quo horum ſolutio *Analyſis Diophantea* appellari ſuevit. Ex quo Algebra ad Geometriam, præſertim ſublimiorem, & inprimis ad problemata phyſico-mechanica applicata fuit; Analyſis Diophantea negligi cœpit, ita ut præter OZANAMUM in *Elementis Algebræ*, vix quiſquam fuerit alius, qui ultra *Diophanteos* limites eandem promovere conatus fuerit. Quam minus recte autem hoc fiat, jam LEIBNITIUS monuit, qui ejus præclarum uſum in Analyſi infinitorum obſervavit. Singularibus in iis artificiis haud raro opus eſt, tum ſi denominationem ſpectes, tum ſi reductionem conſideres. Quamobrem ſuadeo, ut, qui horum problematum ſolutionem expendit, in rationem inquirat, cur denominatio hoc modo fuerit facta & reductio hoc modo inſtituatur, ubi aliquid inuſitati occurrit. Ex. gr. in problemate 92 (§. 230 *Analyſ.*), quo ſummam duorum quadratorum induo alia quadrata dividere jubemur, ubi latus quadrati majoris dicitur a, minoris *b*; latus quæſiti unius appellatur *a z*, latus alterius *y z b*. Ratio denominationis non patet per communes

 regulas;

regulas: per eas enim dicendum erat latus unum x, alterum y (§. 141 *Analyſ.*). Enimvero ſi denominatio hoc modo fiat, habebimus $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$, conſequenter $x = \sqrt{(a^2 + b^2 - y^2)}$. Sed hæc ſolutio nulla eſt, cum in Analyſi Diophantea ſolutio quæratur in numeris rationalibus. Quamobrem in ſcholio (§. 231 *Analyſ.*) monuimus, cur ad vitandam irrationalitatem, latera quadratorum quæſitorum ſumſerimus $a - z$ & $yz - b$. Enimvero cum idem non fecerimus in ceteris, ſed propriæ diſcentis meditationi reliquerimus; neceſſe eſt ut ad rationem generalem animum advertens ſpecialem ex conditione calculi eruat.

§. 172. Quoniam in problematis indeterminatis facilius aberratur, ubi ſingularia artificia adhibenda ſunt; tyronibus ſuadendum, ut problemata generaliter ſoluta etiam in numeris aliquoties ſolvant, quo artificia iſta ipſis magis familiaria reddantur. Conſultum etiam eſt, ut, ubi formulas generales per numeros explicaverint, examen addant, quo numeros repertos conditionem in problemate præſcriptam habere innoteſcit. Ex. gr. in problemate 87 (§. 225 *Analyſ.*), reperiuntur numeri 11 & 6, quorum partes aliquotæ numeris ſuis additæ efficere debent eandem ſummam. Quoniam 11 eſt numerus primus, quem quippe ſola unitas metitur (§. 75 *Arithm.*), præter unitatem partem aliquotam aliam non habet (§. 30, 74 *Arithm.*). Unitas igitur ſi eidem addatur, ſumma efficitur 12. Aſt ſenarii partes aliquotæ ſunt 1, 2 & 3, quas ubi addas ipſi numero 6; habebis itidem ſummam 12. Similiter, per formulam generalem determinantur duo numeri 104 & 116. Illius partes aliquotæ ſunt, 1, 2, 4, 8, 13, 26 & 52: hujus vero 1, 2, 4, 29 & 58. Eſt vero $1 + 2 + 4 + 8 + 13 + 26 + 52 + 104 = 210$, & $1 + 2 + 4 + 29 + 58 + 116 = 210$. Nec inconſultum eſt, ut etiam in hac Analyſi formulæ algebraicæ verbis explicentur, quemadmodum ſupra præcepimus (§. 168); ſi quis præſertim Matheſin non ſibi ſoli diſcit, ſed intellectus potiſſimum perficiendi gratia eidem incumbit. Etenim non leve exercitio opus eſt, ut, quicquid animo concipis, verbis diſtincte enuncies. Niſi vero hac facultate polleas, in ſtudio philoſophico, & quocunque alio ſcientiarum genere, accurata methodo nunquam uteris. Extra Matheſin non habemus characteres & figuras, quibus imaginatio juvatur, & defectus diſtincte enunciandi, quæ concipiuntur vi intellectus, ſuppletur. Inprimis autem uſui eſt, ut quam maxime abſtracta verbis perſpicuis accurate enunciare valeas; ubi tibi propoſitum fuerit, ex perceptionibus obviis eruere notiones univerſales quæ iiſdem inſunt, & veritatibus in caſu particulari agnitis omnem ſuam tribuere ampli-

amplitudinem, quam habere poſſunt: id quod mirifice conducit ad omnem cognitionem promovendam, & prudentiam, qua ad recte agendum opus habemus, amplificandam. Immo augebitur eodem medio notiones diſtinctas formandi facultas, quæ non adeo facile acquiritur, quemadmodum vulgo putatur, præſertim ubi cum abſtractis tibi fuerit negotium. Scholaſtici in diſtinguendis iis, quæ diverſa ſunt, ſatis fuerunt acuti; ſed quæ confuſe perceperunt diſtincte concipere, & verbis perſpicuis accurate enunciare non valuerunt. Quamobrem Metaphyſicam tenebris involverunt, nec ratiocinando quicquam ex notionibus confuſis colligere potuerunt; ut ſcientia nobiliſſima in terminologiam verſa fuerit, ac proinde a nonnullis perperam pro Lexico quodam philoſophico habita. CARTESIUS vero, qui notionum diſtinctarum uſum indiſpenſabilem in ſcientiis perviderat, Ontologiam in eorum numerum retulit quæ contemni merentur; & in Phyſicis, imaginaria cum realibus confudit, ut ad veritatem liquidam pertingere non potuerit; Philoſophiam vero practicam, quam excoli maxime intereſt, prorſus intactam reliquit; etſi ipſi propoſitum eſſet Philoſophiam reformare, cujus defectus abunde agnoſcebat.

§. 173. Sed dicta ſufficiant de applicatione Algebræ ad problemata arithmetica. Progrediamur itaque ad problemata geometrica, quæ capite tertio traduntur. Problemata geometrica duo ſingularia habent. Etenim plerumque artis eſt invenire æquationem; nec ea tam obvia eſt, quemadmodum in problematis arithmeticis puris, ubi ſcilicet numeri dantur abſtracti. Deinde non minoris artis eſt formularum algebraicarum, per quas determinatur quæſitum, conſtructio geometrica. Immo ſubinde difficultate non caret, ut reperias, quid quæri debeat, ut in commodam incidas ſolutionem. Quamvis vero problemate 110 (§. 250 *Analyſ.*) præſcribantur regulæ generales de invenienda æquatione; eædem tamen non ita determinatæ ſunt, ut in dato quolibet caſu ſtatim appareat, quanam earum utendum ſit ad æquationem inveniendam, ſed haud raro variis id tentandum eſt modis. Similiter in problemate 111 & 112 (§. 252, 253 *Analyſ.*) docuimus, quomodo conſtruantur æquationes ſimplices & quadraticæ omnes; monuimus tamen in ſcholio (§. 254 *Analyſ.*), quod hoc modo raro incidamus in conſtructiones concinnas, quales ſunt, quæ in Elementis Geometriæ extant, cum tamen concinnæ potiſſimum deſiderentur. Quamobrem modus quo pervenitur ad æquationem, & quo æquatio ultima, per quam determinatur quæſitum, conſtruitur, majorem attentionem meretur, quam qua in

problematis arithmeticis uſi fuimus; ut pateant artificia, quibus utimur, in aliis caſibus ſimilibus, quando occurrunt, imitanda. Ut autem conſtructionem concinnam reperias, primo tentanda eſt per regulas generales, quæ præſcribuntur. Deinde diſpiciendum, quomodo omnes linearum determinationes eidem ſchemati includantur, in quo lineæ ſingulæ commodum nanciſcantur ſitum; ut prodeat ſchema, quod viſum minime offendit, & in quo citra moleſtiam lineæ ex loco uno in alterum transportantur. Nulla adhuc datur conſtructionum elegantium theoria, in qua elegantia, quam ipſi tribuimus, ad notiones diſtinctas reducitur; quamvis ea non impoſſibilis ſit. Pendet ea a principiis generalibus pulchritudinis entis compoſiti, quam & ipſam nemo hactenus explicavit. Inſunt Architecturæ civili notiones quædam generales, quæ huc faciunt; ſed nemo hactenus ad eas, quantum publice conſtat, animum advertit. Quamobrem hactenus, in caſu omni, demonſtrari nequit, conſtructionem, quam dediſti, eſſe eam, in qua nihil deſiderari poſſit. Et haud raro, caſui magis quam arti tribuendum, quod in conſtructionem incidas, quæ pulchritudine ſua ſeſe commendat. Neque vero exiſtimandum eſt, ſi vel in noſtris Analyſeos Elementis, vel apud autores alios, occurrunt conſtructiones elegantes; eas ex formula algebraica juxta regulas generales reſoluta primo ſtatim conamine deductas fuiſſe. Quin potius pro certo tenendum, eas haud raro multum negotii feciſſe inventoribus, antequam ad eam formam deducerentur, quam habent. Ceterum ut dicta intelligantur, ſpecialia quædam addenda ſunt.

§. 174. In problemate 113 (§. 255 *Analyſ.*), quo, ex data perimetro & area trianguli rectanguli, hypothenuſam invenire, ipſumque triangulum conſtruere docemus, non minus æquationis inveſtigatio, quam trianguli conſtructio ſingularia quædam habent, quæ attentionem merentur. Quodſi in inveſtiganda æquatione via ordinaria, quam monſtrant regulæ generales, incedere voluiſſemus, hoc modo æquatio inventa fuiſſet.

$$AB + BC + CA = a \qquad AC = x$$
$$\text{Area} = b^2 \qquad AB = y$$

erit

$$AB + BC = a - x$$
$$BC = a - x - y$$

Duæ cum inveniendæ ſint æquationes, alteram ſuppeditat theorema Pythagoricum, vi cujus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*), alteram vero area trianguli $= \frac{1}{2} AB \cdot BC$ (§. 392 *Geom.*). Habemus itaque

$$x^2 = 2y^2 + a^2 - 2ax$$
$$+ x^2 - 2ay + 2xy$$
$$0 = 2y^2 + a^2 - 2ax - 2ay + 2xy$$
$$2ax - 2xy = 2y^2 + a^2 - 2ay$$
$$x = \frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y}$$

$$b^2 = \frac{1}{2}ay \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$$
$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}y^2 - b^2$$
$$xy = ay - y^2 \quad 2b^2$$
$$x = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y}$$

Quam-

Quamobrem

$$\frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y} = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y}$$

$$2y^3 + a^2y - 2ay^2 = 2a^2y - 4ay^2 - 4ab^2 + 2y^3 + 4b^2y$$

$$0 = a^2y - 2ay^2 + 4b^2y - 2ab^2$$

$$2ay^2 - 4b^2y - a^2y = -4ab^2$$

$$y^2 - \frac{4b^2 + a^2}{2a}y = -2b^2$$

Fiat $\frac{4b^2 + a^2}{2a} = m$,

erit $y^2 - my = -2b^2$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$y^2 - my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 - 2b^2$$

$$\left.\begin{matrix} y - \tfrac{1}{2}m \\ \tfrac{1}{2}m - y \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$

Vides hic, quam prolixus evadat calculus, ſi viam ordinariam ingrederis ſtricte inhærens regulis generalibus. Incidis in æquationem quadraticam affectam; cum in ſolutione, quam in textu dedimus, æquatio ſit ſimplex, adeoque primi gradus. Quodſi y per conſtructionem geometricam determinare volueris, primo eruendus eſt valor ipſius m. Eſt vero $m = \frac{4b^2 + a^2}{2a} = \frac{2b^2}{a} + \frac{1}{2}a$. Unde patet, te eadem opera, ſi æquatione in contextu utaris, reperiſſe hypothenuſam, qua hic valorem m reperis, quo in conſtructione geometrica æquationis ultimæ hic opus habes: ut adeo dubitari non poſſit, conſtructionem quoque fore multo prolixiorem, & intricatiorem ea, quam in contextu exhibemus. Abbreviatur calculus, & æquatio multo ſimplicior eruitur, quia problema ad æquationem reducturus uteris theoremate de compoſitione quadrati, cujus radix binomia (§. 261 *Arithm.*); adeoque plures veritates cognitas ſupponis, quam ſi viam ordinariam ingrederis; & ad circumſtantias particulares animum attendis, quarum viam ordinariam ingreſſus nullam habes rationem. Nihil itaque hic ſingulare occurrit, quod non eodem modo locum habeat in aliarum regularum generalium applicatione. Qui ea attentione utitur in addiſcenda Matheſi, quam in capite primo inculcavimus; rationem hanc jam didicit in Practica Italica, ubi, ob circumſtantias ſingulares, ope theorematum quæ tanquam cognita præſupponuntur, & quorum in regula trium opus non habemus, calculus abbreviatur. Diſcas hinc velim, quod, ſi noſtro more in ſtudio Arithmeticæ & Geometriæ verſatus acumen quoddam tibi comparaveris, te in ſtudio quoque algebraico fore acutiorem, & dum eidem incumbis, in majore luce verſaturum. Acumen vero, hoc ſtudio algebraico auctum, non uno nomine ſeſe tibi commendabit, ubi ad Philoſophiam & alia addiſcendum

dum progredieris, immo in ipſa praxi vitæ. Enimvero conſtructio quoque trianguli rectanguli, ex perimetro & area datis, attentionem meretur. Vulgo triangula rectangula conſtruimus ex datis cruribus, quibus ad angulum rectum junctis determinatur hypothenuſa: quæ etiam ratio eſt, cur problema per regulas generales ſolventes inveſtigamus cruris y valorem. Conſtrui vero etiam poteſt triangulum rectangulum data hypothenuſa & altitudine: quæ conſtructio denuo uberiorem theoriam ſupponit, quam communis; quod facile animadvertes, ubi fundamentum, quo nititur conſtructio, perpendere volueris. Unde vides cur, inventa hypothenuſa, etiam quæſiverimus altitudinem. Et quoniam inventa in numerum cognitorum refertur, x non amplius ſpectatur tanquam magnitudo incognita, ſed pro cognita habetur; ut adeo conſtructionem præter neceſſitatem efficeres prolixiorem & intricatiorem, ſi pro x valorem inventum in æquatione $y = b^2 : \frac{1}{2}x, = 2b^2 : x$ ſubſtituere velles. Immo commodius accidit, ſi retineas $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, quam ſi, reductione modo ordinario facta, ſumas $y = 2b^2 : x$. In quo denuo latet quoddam artificium, quod in geometricis conſtructionibus formularum algebraicarum utile eſt, & quo etiam in ſequentibus utimur.

§. 175. Regulas arithmeticas non adſcripſimus, brevitatis gratia; non modo, quod geometricarum conſtructionum hic potiſſimum habetur ratio; verum etiam quod ex anterioribus ſatis manifeſtum ſupponimus, quomodo formulæ algebraicæ arithmetice explicentur, & regulæ arithmeticæ inde deducantur. Non tamen ideo tyrones negligere debent formularum per numeros explicationem, & regularum arithmeticarum enunciationem. Etſi vix opus eſſe videatur, exemplo præſenti rem declarari; ut tamen conſulamus minus perſpicacibus, id feciſſe non nocebit. Æquatio itaque $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ hanc ſuppeditat ſolutionem arithmeticam, adhibito artificio, quod ſub finem paragraphi præcedentis commendavimus: 1. Quæratur ad perimetrum dimidiam $\frac{1}{2}a$, & latus quadrati areæ æqualis b, tertia proportionalis, quæ erit $\frac{2b^2}{a}$. 2. Hæc ſubtrahatur a ſemiperipheria $\frac{1}{2}a$, relinquetur hypothenuſa quæſita. Arithmetice explicabis formulam hoc modo. Sit $a = 12$, $b^2 = 6$. Erit $\frac{1}{2}a = 6$, adeoque $x = 6 - \frac{12}{12} = 6 - 1 = 5$.

§. 176. Qui ex ſolutionibus problematum proficere voluerit, quantum datur; is negligere minime debet theoremata, quæ offerunt æquationes. Quamobrem in problemate, quod nunc perluſtramus, docuimus, quomodo theorema ex æquatione ſecunda, ſeu penultima eruatur. Enimvero ipſa etiam æquatio ultima theorema

rema non inelegans ſuppeditat. Cum enim $2b^2 : a$ vel $b^2 : \frac{1}{2}a$ ſit differentia inter ſemiperimetrum trianguli rectanguli $\frac{1}{2}a$ & hypothenuſam x, extemplo patet theorema ſequens: *Differentia inter hypothenuſam & ſemiperimetrum trianguli rectanguli eſt tertia proportionalis ad ſemiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis.* Non video quid obſtet, quominus hoc theorema ceteris Geometriæ elementaris adſcribi poſſit; niſi quod uſum, quem habere poſſit, non prævideas: nullum enim eſſe demonſtrare minime vales. Sane ſi hæc ratio ſufficeret ad theoremata ex Matheſi eliminanda, multa ex eadem arcenda & olim fuiſſent, & nunc eſſent; quorum egregius prorſus, ſucceſſu temporis, comparuit uſus, & in poſterum comparebit. Ecquis prævidere poterat uſum, quem habet comparatio progreſſionum arithmeticarum & geometricarum, cui inventum logarithmorum longe utiliſſimum deberi conſtat, & qua STIFELIUS uſus in algebraicis æquationibus intimius explicandis? Quodſi igitur hanc comparationem tanquam inutilem rejicere voluiſſent Mathematici, locum in Matheſi eidem denegaturi, quod uſum ejus minime prævidérent; logarithmorum doctrina & ardua illa, quæ in Matheſi ſublimiori ab eadem pendent, forſan hodienum non eſſent detecta. Inventores non ſolliciti eſſe debent, num, quod inveſtigandum ſibi ſumunt, utile ſit, ſed num quod inveſtigaverunt ſit verum. Utilitas enim ſua veluti ſponte ſeſe manifeſtabit, ubi in veritate inveſtiganda progrediuntur, quam prævidere nullo modo poterant. Multum obeſt incremento ſcientiæ, ſi qui eam promovere poſſunt ac volunt, hoc præjudicio tenentur, quod de veritatis inveniendæ utilitate prima moveri debeat quæſtio. Hæc enim cura tangere debet nonniſi eos, qui ab aliis inventa certo fine addiſcunt; etſi cautione multa opus ſit, ubi utilitatem ex vero æſtimare voluerint; ne quemadmodum plerumque accidit, quæ maxime utilia ſunt pro inutilibus reputentur.

§. 177. Forſan non inconſultum judicaveris, ut conſtructiones ex calculo erutæ, itemque theoremata hinc derivata etiam more Veterum, ſeu ſynthetice demonſtrentur. Non improbo conſilium, ubi hoc facile fieri poteſt, & ea fini problemata quædam per leges rationum reduximus, quemadmodum problema 116 (§. 259 *Analyſ.*); ubi ipſa reductio demonſtrationem quæſitam continet, modo ſingulæ analogiæ verbis enuncientur. Enimvero, cum per Algebram ſolvantur problemata, quæ a cognitione noſtra adhuc procul ſunt remota; defectu principiorum ad ratiocinandum requiſitorum, per quæ ratiocinando colligi poterat quæſitum, quemadmodum in Geometria fecimus; multa haud raro theoremata intermedia

dia eſſent invenienda, antequam demonſtratio ſynthetica dari poſſet. Unde facile intelliges eam non eſſe in poteſtate tua. Sume exempli loco theorema, quod modo (§. 176) elicimus: In triangulo rectangulo differentia hypothenuſæ a ſemiperimetro eſt tertia proportionalis ad ſemiperimetrum & latus quadrati triangulo æqualis. Si demonſtrationem ſyntheticam dare volueris; hæc analogia ex aliis notis colligenda per theoremata de ratione quantitatum. Enimvero in Geometria elementari nihil adhuc demonſtratum eſt de perimetro trianguli rectanguli. Quamobrem alia adhuc invenienda eſſent theoremata, antequam demonſtrationem conſummatam dare poſſis, quales dedimus in Geometria. Nobis jam non vacat eam in rem inquirere, ut exemplo dicta confirmaremus. Nemini igitur ſuademus, ut tempus in quærendis iſtiusmodi demonſtrationibus fallat, quod longe utilius in exercenda Analyſi conſumere datur. Quodſi vero obvia fuerit demonſtratio, eam addi non diſſuademus.

§. 178. Si exiſtimaveris demonſtrationes ſyntheticas dari poſſe, ſi veſtigiis calculi inſiſtens verbis enuncies, quæ per eum patent, & in reddendis rationibus ad leges calculi confugias; totus falleris: neque enim forma demonſtrationis mutabitur, ſi characteribus expreſſa verba enuncientur. Abunde hoc videre licet in *Phoronomia* HERMANNI, cujus prætenſæ demonſtrationes ſyntheticæ ſeu lineares, quas vocat, quantum diſtent a demonſtrationibus *Euclideis* nullo negotio deprehendet, qui cum fuerit in reſolvendis demonſtrationibus more noſtro verſatus reſolutionem demonſtrationum *Hermannianarum* tentare voluerit. Præſtat igitur in analyſi acquieſcere, quam per eandem reperta minus recte demonſtrare. Sane ipſe NEWTONUS (quod citra injuriam in maxima Viri ſummi merita dictum eſto,) multa, corollariorum inſtar, abſque ulla demonſtratione ſubjicit propoſitionibus, quæ ſubinde prolixam deſiderant demonſtrationem, ſi *Euclideo* more evincenda eorundem veritas; immo corollariorum loco habet quæ abſque ulla demonſtratione pateant lectori, quæ poſita propoſitione minime ponuntur. Exempli loco eſt, quando problema inverſum virium centripetarum in ſectionibus conicis pro corollario directi habet, cum tamen converſio per ſe minime pateat; nec quis ferret, in Geometria elementari, ſi, ex parrallelisſmo linearum demonſtrata angulorum æqualitate, per modum corollarii abſque demonſtratione inferret: Ergo etiam parallelæ ſunt lineæ, ſi anguli alterni fuerint æquales. Non omnes propoſitiones poſſe converti, ex doctrina logica de converſione ſatis manifeſtum eſt. Quamobrem ubi converſio per rationes logicas non ſtatim patet, converſa utique demon-

demonſtranda eſt. Immo cum ex principiis logicis demonſtrandum foret, propoſitionem converti poſſe; Geometris veteribus conſultius viſum ex principiis propriis, aliunde non ſupponendis, demonſtrare converſam. Nos vero, qui omnibus juſtum ſtatuere pretium ſolemus, demonſtrationes logicas in numerum artificiorum heuriſticorum referimus, per quas reperire, nonnunquam ſaltem conjectare licet, propoſitionem aliquam datam & demonſtratam converti poſſe. Qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat, is a rigore demonſtrandi ne latum quidem unguem recedere tenetur; ne methodi confuſæ notiones & de eadem concepta præjudicia noceant extra Matheſin: quod quam facile fieri poſſit, jam in ſuperioribus monuimus (§. 100, 101).

§. 179. Ceterum, cum demonſtrationibus ſyntheticis confundendæ non ſunt demonſtrationes, quibus evincitur conſtructionem juxta formulam per calculum erutam rite eſſe factam. In his enim ſupponimus quæſitum eo modo determinandum eſſe, quemadmodum exigit formula algebraica. Quoniam nos conſtructiones ad formulam retulimus, earundem demonſtrationes in ipſa conſtructionum explicatione jam continentur. Quodſi vero illas verbis enunciare velles, demonſtratio ubique adjicienda foret, de qua hic ſermo eſt. Ita in exemplo noſtro, ubi triangulum rectangulum conſtruendum ex formulis $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & $y = b^2 : \frac{1}{2}x$ (§. 255 *Analyſ.*); conſtructio pure enunciabitur hoc modo: Fig. Algebr. Tab. XII. *Fig.* 113. 1°. Erigatur ad perimetrum BD perpendicularis AB, quæ ſit ad latus quadrati areæ trianguli æqualis in ratione dupla; fiatque BG ipſi lateri huic æqualis. 2°. Quæratur ad BD, AB & BG quarta proportionalis BH. 3°. Fiat BC ſemiperimetro æqualis; & ex C in I transferatur modo inventa BH. 4°. Super BI deſcribatur ſemicirculus; & ad BO dimidiam ipſius BI, & BE dimidiam ipſius AB, quæratur tertia proportionalis BK. 5°. Ducatur denique ex puncto K diametro BI parallela KL. Quodſi 6°. punctum L cum extremis diametri B & I rectis BL & LI connectatur, prodibit triangulum rectangulum quæſitum BLI. Hoc modo ſi enunciaveris conſtructionem, ut prodeat reſolutio problematis, quali forma exhibentur reſolutiones in Geometria elementari; demonſtratio ſequens adjicienda utique eſt, ut manifeſtum evadat, ſuppoſitis formulis abgebraicis tanquam veris, ſeu, uti loqui amamus, iiſdem conceſſis, conſtructionem eſſe veram. Nimirum quoniam BD $= a$, AB $= 2b$, BG $= b$; erit quarta proportionalis BH $= 2b^2 : a$. Quare cum ſit BC $= \frac{1}{2}a$ & CI $=$ BH, erit BI $= x$, ſeu hypothenuſa trianguli rectanguli conſtruendi per formulam primam. Jam quia porro BO $= \frac{1}{2}x$, BG $=$ BE $= b$, erit BK

 $= b^2$:

$=b^2 : \frac{1}{2}x$, adeoque altitudo trianguli rectanguli conſtruendi. Quoniam itaque recta KL eſt ipſi BI parallela & BLI ſemicirculus ſuper hypothenuſa trianguli deſcriptus; erit BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenuſa $\frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & altitudo $=b^2 : \frac{1}{2}x$. Quod erat conſtruendum. Suppono nimirum hic tanquam notum, quomodo triangulum rectangulum datæ altitudinis ſupra hypothenuſa ſit conſtruendum. Quodſi enim notum non ſit, demonſtratio ex principiis Geometriæ elementaris facile contexitur. Etenim angulus BLI, cum ſit in ſemicirculo *per conſtr.* rectus eſt (§. 317 *Geom.*), adeoque BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenuſa BI (§. 91, 95 *Geom.*). Linea KL eſt diametro BI parallela, & KB ad BC perpendicularis, *per conſtruct.* conſequenter perpendicula inter eaſdem intercepta KB & ex L in BI demiſſum æqualia ſunt (§. 226 *Geom.*). Enimvero KB eſt altitudini trianguli æqualis, *per conſtruct.* & perpendiculum ex L in BI demiſſum ipſa trianguli BLI altitudo (§. 227 *Geom.*). Patet itaque ſi ſupra hypothenuſa deſcribatur ſemicirculus & in ejus altero extremo erigatur perpendicularis altitudini æqualis, per ejus vero ſummitatem ducatur recta diametro parallela & punctum, in quo hæc ſecat ſemicirculum, connectatur cum extremis diametri; triangulum rectangulum datæ altitudinis ſupra hypothenuſa data eſſe conſtructum. Problema hoc, cum ſua demonſtratione, Elementis Geometriæ inſeri poterat; ex cujus quippe principiis eodem prorſus modo demonſtratur, quo problemata cetera ibidem demonſtrantur.

§. 180. Cum formulæ algebraicæ contineant regulas, per quas ex datis determinatur quæſitum; & per calculum ac demonſtrationem æquationis, niſi hæc in conditione ſeu hypotheſi problematis continetur, verum eſſe conſtet, quod ſic determinetur quæſitum, quemadmodum vult formula; qui conſtructiones ex formulis erutas pure enunciat, & eaſdem deinde hiſce convenienter factas demonſtrat, in demonſtrando ſeſe non minus exercet, quam ſi in demonſtrationibus Arithmeticæ & Geometriæ elementaris verſetur. Quamobrem qui methodum demonſtrandi ſibi familiarem reddere intendunt, eadem extra Matheſin feliciter uſuri; iis omnino ſuadendum, ut conſtructiones pure enuncient, & ad eam formam redigant qua reſolutiones problematum in Geometria elementari exhibentur, atque deinde demonſtrationes, cum quibus jam nobis negotium eſt, ſuperaddant.

§. 181. Et quoniam problematum ſimplicium reductio per leges rationum, cujus exempla quædam dedimus (§. 259, 266, 289 *Analyſ.*), & reductio quadratici ordinis ad lineas reciprocas (§. 263, 265, 278 *Analyſ.*) propius accedit ad Analyſin Veterum,

terum, & demonſtrationes ad formam Veterum componendas formaliter continet; eam negligere minime debet, qui methodum Veterum cum methodo Recentiorum conjungere voluerit. Probe nimirum notandum eſt, ſignorum uſu non variari ipſam methodum, quæ in modo ratiocinandi conſiſtit, ſed tantummodo facilitari & clariorem reddi; quemadmodum demonſtrationes Veterum eædem manent, ſi noſtro more reſolutæ, ope Artis characteriſticæ, ſymbolice repræſentantur. Sane per hoc, quod in Geometria elementari utamur ſignis, quorum in Algebra uſus eſt, demonſtrationes non fiunt algebraicæ, quemadmodum hebetiores judicant; ſed tantummodo brevius & clarius exprimuntur. Vocabula non minus ſigna ſunt, quam ſigna alia, quæ in locum eorum ſurrogantur. Quemadmodum itaque eadem manet demonſtratio, ſi vocabula idem ſignificantia ſibi mutuo ſubſtituis, prouti in verſionibus accidere ſolet, ubi v. gr. Latinis ſubſtituis Germanica, vel Gallica; ita nec alia evadit, ſi vocabulis alia ſigna ſubſtituis, quæ cum ipſis idem ſignificant. Ita perinde eſt, ſive dicas, triangulum BDE ſimile eſt triangulo BAC; ſive ſcribas, △ BDE ∽ △ BAC: etenim ſi verbis reddere volueris, quæ ita ſcripſiſti, verbis iſtis eadem efferre teneris; perinde ac dicendum eſt, *das Dreyecke* BDE *iſt dem Dreyecke* BAC *ähnlich*, ubi Germanice reddere volueris, quod Latine dictum fuerat.

§. 182. In problemate 114, (§. 257 *Analyſ.*) quo, data area trianguli rectanguli, cujus latera ſunt in proportione continua, inveniri jubentur latera; & reductio, & conſtructio ſingularia habet, quæ attentionem tyronum merentur. In reductione notandus eſt modus, quo eliminatur quantitas alterutra incognita, utpote a regula generali recedens (§. 141 *Analyſ.*). Notanda quoque eſt applicatio calculi irrationalium, qua formula efficitur ſimplicior. In conſtructione autem notatu dignum eſt artificium, quo numeri irrationales in lineis exhibentur, & radices quoque quadrato-quadratæ per Geometriam elementarem conſtruuntur. Quæ enim in aliquo problemate ſingularia occurrunt, ad ea advertendus eſt animus, cum eidem inſinuentur artificia, quibus utendum in caſu ſimili, quoties is occurrit. Et ſelecta dicuntur problemata, quæ vel in veritatum cognitu neceſſariarum notitiam nos deducunt, vel artificia ſuggerunt, quibus Ars inveniendi locupletatur, ipſo uſu rectius diſcenda, quam per præcepta; cum hæc non ſatis intelligantur, niſi per exempla. Quamobrem qui in Analyſi proficere voluerit, non ſine ſingulari attentione circa ſingula problemata verſari tenetur; ut, ſi qua nova occurrunt, ea comparatione cum regulis generalibus inſtituta advertat & memoriæ infigat.

§. 183. Non commemoramus hic alia, quæ in ceteris problematis annotabit attenta mente & ſolutionem & conſtructionem perluſtrans; ne præter neceſſitatem juſto prolixiores videamur. Unum tamen eſt, quod notaſſe non piget, ſcilicet ex problemate 124 (§. 275 *Analyſ.*) patere, per Algebram ſubinde prodire formulas, quæ ſtatim dant conſtructionem, quam Veteres ſuo modo invenerunt. Patet in hoc problemate ratio, quod in æquatione inveſtiganda inſiſtamus iiſdem principiis, quibus uſi Veteres in eruenda conſtructione. Et quamvis problema ſequens (§. 279 *Analyſ.*) de latere Pentagoni inveniendo contrarium inſinuare videatur; videbis tamen, ſi attentius rem conſideres, nos totos in eo eſſe, ut inveſtigemus relationem lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni regularis eidem circulo inſcriptorum ſimul, qua nititur conſtructio Veterum. Eam vero non dare regulas reductionis generales; ſed utendum hic eſſe ſingulari artificio ſubſtitutionis; quo neglecto, per æquationem $x^2 = 4b^2 - b^4 : a^2$, vel per $\frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ longe alia prodiret conſtructio, quam dedere Veteres. Immo niſi relatio lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni ſimul, ex inventis Veterum, nobis cognita & perſpecta fuiſſet; non facile adfuiſſet ratio, cur de iſta ſubſtitutione cogitaſſemus. Duo igitur hic probe notari velim, cum in veritate inveſtiganda multum relictum ſit tentaminibus, in problematum reſolutionibus algebraicis & præſertim in formularum conſtructionibus, operam dandam eſſe ut problema & ejus conſtructio efficiatur dependens a veritatibus aliis jam inventis; quæ dependentia in methodo Veterum, qua uſi ſumus in Geometria elementari; & in demonſtrationibus propoſitionum ſyntheticis, unice attenditur, & ut ea fini tententur ſubſtitutiones, quibus locus eſſe poteſt. Eluceſcit hinc uſus, quo commendatur ſtudium in veritatibus nobis jam notis analytice inveſtigandis, ſi nempe proponantur tanquam quærendæ. Iſtiuſmodi enim inveſtigationes efficient, ut animum attendas ad artificia, quæ alias eundem non ſubirent, & quibus poſthac felici ſucceſſu uſurus es in inveſtigandis iis, quæ nondum cognita, ſed adhuc latent. Neque enim ſufficit, artificia quædam eſſe in poteſtate noſtra; verum etiam requiritur ratio, cur eadem mentem noſtram ſubeant, quando iiſdem commode utimur: id quod ex principiis noſtris pſychologicis abunde patet. Ratio autem iſta non ſemper a nobis pendet, ſed a caſu, qui poteſtati noſtræ ſubducitur. Quodſi vero artificia nobis fuerint familiaria, quoniam iiſdem jam ante uſi ea attentione conveniente memoriæ infiximus; probe conſcii varia eſſe tentanda, ubi veritas latens eruenda; eadem nobis in memoriam revocamus: id

quod

quod denuo per principia noſtra pſychologica manifeſtum eſt; ut nihil affirmetur, quod non ex iiſdem demonſtrari poſſit, ſi demonſtratio exigatur; quamvis defectum demonſtrationis hic ſuppleat experientia domeſtica, ſi quis dictis fidem habere voluerit.

§. 184. Forſan nec inconſultum erit quædam adhuc moneri circa examen Regulæ *Renaldinianæ* polygonum regulare quodcunque circulo inſcribendi. Conſtat ex Elementis EUCLIDIS, conſtare modum, quo trigonum, quadratum, pentagonum, octogonum, decagonum, quindecagonum circulo inſcribitur, & idem patet ex anterioribus. Quamobrem totum examen huc redit, ut inveſtigetur valor lateris cujuſdam polygoni, aut ſaltem partis ejuſdem, per regulas demonſtratas; deinde vero idem valor eruatur per regulam RENALDINI; quæ ſi vera fuerit, valor per eam inventus erit alteri æqualis. Quodſi ergo hoſce duos valores æquales ponas, & exinde eruas contradictionem; hinc patebit, regulam *Renaldinianam* eſſe falſam, cum alteram veram eſſe conſtet. Nimirum hinc agnoſcitur illam contradicere veritati manifeſtæ, adeoque, per principia logica, quibus nititur tota methodus demonſtrandi per indirectum, colligitur eam falſam eſſe debere. Examen adeo præſens pendet a principio contradictionis, & in applicatione methodi demonſtrandi per indirectum conſiſtit. Eodem artificio utimur etiam in aliis; veluti ſi quis dederit Quadraturam circuli; ſumta diametro pro unitate, valorem peripheriæ eruimus in fractionibus decimalibus, quia conſtat numeros LUDOLPHI notiſſimos cum veritate conſentire. Quodſi enim ab his diverſi prodeant, prætenſam quadraturam circuli veritati contradicere, adeoque falſam eſſe colligitur. Novi equidem quod huic examini manus victas dare nolint, qui circuli quadraturam ſibi inveniſſe videntur: ſed hi ſunt, qui ignorant, quomodo numeros ſuos eruerit LUDOLPHUS, & quales ſint methodi recentiorum, quibus inveſtigantur ſeries infinitæ pro circulo, unde iidem numeri deducuntur. Valeat hic pervulgatum iſtud: Cum ignorante principia non eſt diſputandum.

§. 185. Quantum interſit diſcriminis, inter conſtructionem elegantem & minus elegantem, clariſſime eluceſcit, ubi utramque conſtructionem * trianguli rectanguli, ex data area una cum angulo uno obliquo, inter ſe conferre volueris. Ipſa vero hæc collatio etiam manifeſtabit rationem, cur conſtructio ſecunda prima ſit elegantior. Conſtructio ſecunda ſimplicitate ſua ſeſe ita commendat, ut in Geometriam referri poſſit. Habet autem hoc ſingulare conſtructio, quod recta ſimul repræſentet ſinum totum, & rectam datam; ſicque loco quartæ proportionalis inveniendæ

* Probl. 149.

ſit tertia, ſingulari modo per conſtructionem trianguli rectanguli determinata, qui ab eo longius recedit, quam in Elementis Geometriæ docuimus; etſi hujus quoque fundamentum in illis ipſis contineatur. Quodſi quis conſtructionibus æquationum in Algebra ſedulam operam navaverit; is varias ſolutiones ex Elementis demonſtrandas deteget, quæ in uſum conſtructionum elegantium in Algebra, non ſine tyronum commodo, poſthac Geometriæ elementari inſerentur; ut hæc ampliorem nanciſcatur uſum, & ſtudium conſtruendi formulas algebraicas facilitetur.

§. 186. Problema 152, cum duobus ſequentibus (§. 325 *& ſeqq. Analyſ.*) inter difficilia referri ſolet. Ita autem eadem reſolvimus, ut nec tyronibus quicquam difficultatis faceſſant. Præmittitur, in reſolutione primi, theorema quod tanta facilitate ex principiis Geometriæ elementaris demonſtratur, ut ipſum in iiſdem Elementis locum mereatur. Hoc ipſo autem exemplo docemur, quod in uſum Analyſeos & Geometriæ ſublimioris, ſupplementum quoddam Elementorum Geometriæ conſcribi poſſet, quo ſtudium algebraicum & Matheſeos mixtæ multum facilitaretur. Sane ſi hoc ipſum theorema, quod ad reſolvendum problema præſens primus adhibuit Newtonus, ab Euclide jam fuiſſet traditum; Mathematici alii non tantopere in reſolvendo hoc problemate deſudaſſent. Confirmat igitur problematis præſentis reſolutio ea, quæ ſuperius (§. 176) inculcavimus de non contemnendis theorematis, quæ nullum uſum habere videntur, ſeu quorum ſaltem uſum prævidere minime licet. Vi hujus theorematis, ſolo calculo literali, abſque regulis Algebræ, ex ſinu & coſinu anguli ſimpli eruuntur ſinus & coſinus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, ſextupli, ſeptupli &c. ita ut hoc problema jam ſuperius c. 3. exhibere potuiſſemus, ubi uſus calculi literalis in inveniendis theorematis explicatur. Apparent adeo denuo, quam ardua ſolo calculo literali eruantur, etiamſi Algebra prorſus ignota ſupponatur. Inprimis vero animum attendi convenit ad artificium, quo ex theorematis particularibus eruitur univerſale. Conſiſtit hoc in reductione ad theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo; & reductio ipſa nititur comparatione formularum particularium problematis præſentis cum formulis particularibus problematis ſuperioris. Principium hoc reductionis ampliſſimum habet uſum in omni Arte inveniendi, etiam extra Matheſin; quemadmodum jam in Pſychologia me monuiſſe memini. Inprimis autem reductio problematis unius ad aliud, quod notius & ſimplicius, in Geometria ſublimiori & in calculo integrali uſum prorſus eximium habet. Quamobrem con-

conſultum eſt hoc artificium tempeſtive obſervari. Tollit reductio hæc, in caſu præſente, omnem laborem, eumque valde moleſtum, quo alias opus foret, ſi eodem modo legem progreſſionum in infinitum, quam formulæ particulares loquuntur, ex earundem comparatione elicere velles; quemadmodum ſupra fecimus, cum theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo inveſtigaremus. Oſtendi etiam, quomodo ex formula coſinus multipli, expungatur valor ſinus ſimpli, per legem ſubſtitutionis, ut coſinus multipli determinetur per ſolum ſimplum atque ſinum totum. Hoc modo eruuntur alia theoremata particularia; & univerſale quoque aliud prodiret, ſi eadem ſubſtitutione valores b^2, b^4, b^6, b^8, &c. eliminare velles. Quem calculi moleſtia non deterret, is eundem tentare poteſt; quamvis non opus habeamus hiſce theorematis, cum dato ſinu facile reperiatur coſinus (§. 16 *Trigonom.*). Ceterum hic quoque elucet, quomodo infinita theoremata comprehendantur uno generali. Sed cum hic nihil occurrat, quod non jam animadverſum fuerit in problemate 29 (§. 95 *Analyſ.*); plura ea de re non addimus. Corollarium vero, quod adjicitur, attentionem meretur, ut notes alibi etiam profutura. In eodem ſcilicet oſtendimus, quod idem theorema inſerviat determinandis chordis arcuum multiplorum, quo ſinus angulorum multiplorum determinantur: immo quod hinc etiam pendeat mulplicatio arcus, & conſequenter anguli per datum numerum. Notandum igitur hic eſt; in ſcientiis, problematum quoque æquipollentiam eſſe perpendendam; non modo, ne entia præter neceſſitatem multiplicentur, verum etiam ut, in ſolutione problematis inveſtiganda, ſeligamus illud quod facilius ſolvi poteſt. Sane, in noſtro caſu, non adeo prona erat ſolutio, ſi loco ſinus anguli multipli inveſtigandam tibi propoſuiſſes chordam arcus multipli. Neque enim meditatio te duxiſſet ad theorema geometricum, cui debetur ſolutionis problematis præſentis facilitas. Multum in philoſophia uſum habet, ut æquipollentia agnoſcantur. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, Matheſi operan navant, ea probe notare tenentur, ad quæ hic attentionem excitamus.

§. 187. Problema de tangente arcus multipli ex data tangente ſimpli invenienda, quod operoſiſſime ſolvitur ab aliis, hic nullo fere negotio ſolvitur, ſi noſtram ſolutionem cum aliis ſolutionibus compares. Notanda igitur ſunt artificia, quæ facilitatem ſolutionis pariunt. Primum artificium, idque palmarium, in eo conſiſtit, quod problema hoc conſideretur tanquam dependens ab altero de inveniendo ſinu anguli multipli ex dato ſinu ſimpli. Unde intelligitur, quantæ ſit utilitatis, ut

ut dependentiæ problematum a ſe invicem habeatur ratio. Quoniam vero hoc pacto prodit formula, tangentem anguli multipli ex datis ſinu & coſinu ſimpli, non ex tangente ſimpli determinans, quod quærebatur; ideo, per legem ſubſtitutionis, valores ſinus & coſinus ſimpli eliminamus, ut eorum loco introducatur tangens anguli ſimpli. Duæ ſunt quantitates exterminandæ, nimirum *a* & *b*. Singulari autem ratione hic accidit ut, cum una earundem *a*, eliminetur etiam altera *b*: quod niſi ſuccederet, ſubſtitutione nihil efficeres, propterea quod valorem ipſius *a*, per tangentem *t* expreſſum, ingreditur ſimul *b*, & viciſſim valorem *b*, per *t* expreſſum, ſimul *a*. Atque hæc forſan ratio fuit, cur problema noſtrum independenter a problemate ſinus & coſinus anguli multipli inveniendi ſolvendum eſſe viſum fuerit. Unde patet veritatem inveſtigaturum non nimis tribuere debere iis, quæ apparent; &, niſi impoſſibilitas fuerit demonſtrata, non obſtante apparentia tentandum eſſe, quod ſucceſſu cariturum videtur. Tentaminibus enim in veritate inveſtiganda multum eſſe tribuendum nemo diffitebitur, niſi qui eorum uſum nondum fuit expertus. Ceterum hic quoque attentionem meretur artificium, quo utimur in abbreviando calculo, eoque a perplexitate tædioſa liberando; dum pro coëfficientibus ſubſtituimus literas majores, pro quibus deinde, calculo abſoluto, iterum reponuntur earundem valores. Etſi enim eodem artificio jam antea fuerimus uſi, veluti in problematis 54 & 81 (§. 165, 213 *Analyſ.*); applicatio tamen in caſu præſenti non ſtatim cuilibet ſuccurrit, niſi qui in anterioribus ad idem artificium animum attendit, & diſtincta notione comprehenſum memoriæ infixit; quemadmodum ex natura animæ, vi principiorum noſtrorum pſychologicorum, facile demonſtratur. Ea enim dedimus in Pſychologia principia, per quæ ratio a priori dari poteſt, in caſu dato, eorum quæ in anima contingere obſervamus. Denique notandum eſt, quomodo formula pure enuncietur, ut prodeat ſolutio facillima intellectu, in locum formulæ ſurroganda. Continet ea legem progreſſionis in infinitum, qua nituntur formulæ particulares, qualem in anteriori problemate deduximus ex formulis particularibus in uſum generalis eruendæ. Ceterum, quæ hic annotavimus de problemate tangentis multipli ex tangente ſimpli arcus inveniendæ, eadem etiam tenenda ſunt de problemate ſecantis anguli multipli ex data ſecante ſimpli invenienda (§. 328 *Analyſ.*).

§. 188. Quæ hactenus de Algebra tradidimus, non progrediuntur ultra terminos ab Arabibus aſſignatos, a quibus eandem accepimus; niſi quatenus ope Arithmeticæ literalis, ſeu calculi univerſalis, ad quem animum

non

non adverterunt Arabes, multo amplior efficitur illius uſus, ut per eam pateat acceſſus ad ea, quæ inacceſſa videbantur. Ante inventam vero Arithmeticam literalem, Algebram ulterius provehere ſtuduerunt Itali; nec infelici prorſus ſucceſſu. Cum enim Arabes in æquationibus quadraticis ſubſiſterent; SCIPIO FERREUS, ulterius progreſſus, dedit regulas ex æquationibus cubicis extrahendi radicem, a CARDANO publici juris factas; LUDOVICUS vero *Ferrarienſis* etiam ex æquatione biquadratica radicem extrahere docuit. Neque Algebra in hunc uſque diem ulterius promota, ex quo, ope calculi literalis & calculi differentialis, adeo amplificatus eſt ejuſdem uſus, ut nihil videatur a cognitione noſtra adeo remotum, quin ad ipſum aperiat aditum. Etſi enim DE TSCHIRNHAUSEN inveniſſe ſibi viſus eſt methodum univerſalem quamcunque æquationem affectam reducendi ad puram; eamque Analyſi ſuæ demonſtratæ inſerere nullus dubitavit CAROLUS REYNEAU; tentanti tamen apparebit, eam non ſuccedere, niſi in æquationibus cubicis, ad quas etiam eandem tantummodo applicavit DE TSCHIRNHAUSEN & qui eandem approbavit REYNEAU: eandem enim methodum ad æquationes altioris gradus applicaturus, incides in æquationes, quæ ſuperioris gradus ſunt quam reſolvenda; id quod monendum utique fuerat, ne Algebra complementum ſuum videatur nacta, a quo tamen longiſſimo intervallo adhuc diſtat. Non difficile fuerat Dn. DE TSCHIRNHAUSEN hoc obſervare, modo applicationem in ſuperioribus æquationibus tentaſſet, nec nimia forſan in vires ſuas confidentia, quæ ipſum non in unum errorem ſeduxit, difficultates oblatas pro ſuperabilibus reputaſſet, quæ omnino inſuperabiles ſunt, ſaltem hactenus ſuperari minime poſſunt. Quoniam itaque methodus univerſalis, extrahendi radicem exactam ex æquatione quacunque data, deſiderabatur, nec adeo facile erat eandem reperire; ad extractionem radicis per approximationem confugerunt Analyſtæ, & methodum ingenioſam jam dedit FRANCISCUS VIETA. Alii alio modo idem tentarunt; quod prolixe recenſeri noſtri jam non eſt inſtituti: neque enim nobis propoſitum eſt hiſtoriam Algebræ ſcribere, ſed ea tantummodo enarrare, quæ ſcitu neceſſaria ſunt lectori Elementorum noſtrorum Analyſeos, ut majore luce fruatur, nec quaſi in tenebris verſetur, ignorans, cur ea de extractione radicum ex æquationibus altioribus tradamus, quæ capite quinto continentur. Nos hic retinuimus methodum facillimam, (quam Arithmetici noſtrates, *die Rechenmeiſter*, in Algebra numeroſa *Coſſicam mechanicam* appellarunt; & quam etiam adhibuit NEWTONUS, & RAPHSON in peculiari Tractatu multis exemplis

 illuſtra-

illuſtravit); ſed noſtro more captui tyronum magis accommodatam; qua radix æquationis reperitur in fractionibus decimalibus tam exacta, quantum deſideratur. Et quoniam Halleius regulas duas univerſales inveſtigavit, alteram rationalem, alteram irrationalem, quæ merito commendatur; eaſdem eadem methodo inveſtigare docuimus, qua in exemplis ſingularibus uſi ſumus, & quæ breviori ac trita magis via ad eaſdem ducit, quam qua Halleius ad eaſdem pervenit. Methodus hæc in praxi ſatisfacit, nec ea ulteriorem Algebræ perfectionem deſiderat. Neque enim in praxi deſiderantur numeri irrationales, quales prodeunt per inventas generales formulas radicum in æquationibus cubicis (§. 358 *Analyſ.*); ſed numeri rationales. Quando vero ex irrationali actu extrahenda radix; eam quærimus in fractionibus decimalibus, quales reperimus per methodum, de qua jam nobis ſermo eſt. Applicatio autem formularum irrationalium plerumque plus pareret laboris quam methodus approximandi. Immo ſi in formula, ſubſtitutis numeris pro literis, extrahenda foret radix altioris gradus; non inutiliter recurreremus ad methodum approximandi, qua ſtatim uti poteramus (§. 365 *Analyſ.*). Non tamen ideo damnamus, ſi quis in extrahendis radicibus ex æquationibus ſuperioribus ulterius progrediatur: facit enim ad perfectionem theoriæ, ſeu incrementum ſcientiæ, & ad Artem inveniendi locupletandam. Enimvero, cum de commoda methodo extrahendi radicem ex æquatione quacunque data, ſive exacte, ſive per approximationem, laborarent Mathematici; in naturam æquationum inquiſiverunt & quomodo eædem præparentur, ſicubi opus eſt, inveſtigarunt. Unde enata ſunt problemata iſta, quæ initio hujus capitis explicantur.

§. 189. Problemata iſta intellectu facilia ſunt ei, qui in anterioribus attentionem ſuam ſuumque acumen deſiderari minime paſſus; ut adeo opus non ſit quædam de iis moneri. Calculum in ſingulis adeo perſpicue repræſentavimus, ut in eodem verſantes levi ſaltem attentione opus habeant ad problematum ſolutionem intelligendam. Uſus autem eorum, quæ de natura æquationum docentur, elucеſcit ex problemate 165 (§. 351) de extrahenda radice rationali, ſi quam habet æquatio; id quod rariſſime accidit. Duplicem proponimus methodum. Altera nititur principio ſubſtitutionis; altera vero principio de natura æquationum, quod ſcilicet æquationes altiores prodeant per multiplicationem ſimplicium. Atque hæc poſterior ingenioſior eſt priori. Non amplius turbabit tyrones, quod alterum æquationis membrum hic ponatur o, modo in anterioribus fuerint ſatis attenti; quoniam per reductionem aliquoties prodit

dit talis æquationum forma. Quando primum tale quid occurrit, attoniti quaſi hærent tyrones, quod aliquid nihilo æquale eſſe debere exiſtiment, non advertentes ad diverſitatem ſignorum, ut ipſis ſuccurreret axioma, Si æqualia ab æqualia ſubtrahuntur, nihil relinquitur. Nimirum hic differentia nulla eſt: differentia autem nulla per fictionem quandam nihilo æqualis ponitur. Proprie enim loquendo ei, quod non eſt, nullum prædicatum poſitivum competere poteſt; juxta canonem tritiſſimum ſcholaſticorum, Non entis nulla ſunt prædicata. Æqualitas eſt prædicatum, quod quantitatibus convenit: quod vero nullum eſt, cum non ſit in quantitatum numero, nec æquale dici poteſt alteri. Fingitur adeo nihil quantitatis eſſe aliquam quantitatis ſpeciem; ut de eo prædicatum, quod nonniſi quantitatibus convenire poteſt, enunciari poſſit fiducia axiomatis, Quamlibet quantitatem æqualem eſſe ſibimetipſi. Nugari videretur, qui extra uſum in calculo talia proponeret; veluti ſi demonſtrare vellet, nihilum æquale eſſe nihilo. Hac tamen demonſtratione ſubſiſtit fictio adeo utilis in calculo algebraico. Simile quid obtinet, ſi alterum æquationis membrum fuerit quantitas privativa; ubi tyrones perſpicaciores, ad diverſitatem ſignorum in altero æquationis membro non attenti, vel ſaltem ignari, quantitates privativas excedere poſitivas, hærent, exiſtimantes aliquid poni minus nihilo, ſeu quod aliquid eſt æquale eſſe debere ei quod nihilo minus eſt; cum tamen revera minus nihilo ponatur ei quod minus nihilo eſt æquale; quatenus, in calculo, fingimus quantitatis defectum per eam, quæ deficit, æſtimabilem eſſe veram quantitatem. Fictiones iſtiuſmodi plurimum habent utilitatis in calculo, nec iiſdem carere poſſumus. Nodum in ſcirpo quærit, qui contra eas difficultates faceſſit. Ad fictiones recurrendum eſt etiam extra Matheſin, niſi neſcire velis, quæ ſcitu maxime neceſſaria ſunt. Ita, in Jure naturali, Civitatem fingimus inſtar perſonæ liberæ, quæ ſui juris eſt, & cui per naturam ſuam certa competunt jura; immo individuum unum phyſicum in plura moralia dividimus, & individuum morale phyſico contradiſtinguimus, tanquam perſonam diverſam ab eo; immo unum eundemque hominem diſtinguimus a ſe ipſo, quaſi duæ ſint perſonæ, quarum una alteri obligatur, & uni in alteram competunt certa jura: qua fictione utitur ipſe Apoſtolus, dum hominem novum veteri contradiſtinguit. Nec ignotæ ſunt iſtiuſmodi fictiones in Jure Romano. Exemplo ſit poſtliminium; ut taceamus alia, ubi fictiones non adeo manifeſtæ ſunt, alio loco a nobis commemorandæ. Quod ſi dicas, in explicanda æquationum natura poni $x = -b$, adeoque quantitatem poſitivam æqua-

lem privativæ: id quod utique contradictorium ſit; cum quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſint, adeoque ratio æqualitatis, qualem ſupponit æquatio, inter eas intercedere nequeat (§. 24 *Analyſ.*). Enimvero cum, in æquationibus compoſitis, radix non minus quantitas negativa, quam poſitiva eſſe poſſit; ea autem deſignetur litera x; quamdiu valor ejus ignoratur, ſignum eidem adjiciendum dubium eſt: in caſu autem dubio ſigno + afficitur: id quod etiam in ſequentibus fiet, ubi utile eſt non attendi ſignorum diverſitatem. Quando itaque in formatione æquationum ſumitur $x = -b$, non ſupponitur, quantitatem poſitivam privativæ æqualem eſſe, ſed tantummodo ſumitur, eadem litera x indigitari poſſe non minus quantitatem poſitivam, quam negativam; cum ſigna primitiva ſint prorſus arbitraria; & quantitatem privativam ſubinde utiliter conſiderari inſtar poſitivæ, quando fictionem iſtiuſmodi fert natura rei, nec ea in errorem ſeducit.

§. 190. In reſolutione problematis 168 (§. 358 *Analyſ.*), quo ex æquatione cubica extrahi jubetur radix, ſingulare occurrit artificium, quo quantitas incognita x dividitur in duas partes indeterminatas y & z, & harum ope æquatio data transmutatur in aliam, quæ duas incognitas indeterminatas continet. Etenim hoc ipſo obtinetur, ut lege comparationis terminorum utraque determinetur, & ſic inveniatur quæſitum per partes. Nimirum, quia y & z indeterminatæ ſumuntur, ideo licet ponere $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ & $y^3 + z^3 = q$; non alia de cauſa, quam quia commodum accidit, ut per primam æquationem eruatur valor unius indeterminatæ z, qui in æquatione altera ſubſtitutus dat valorem ipſius y atque z determinatum. Æquatio $y^6 - qy^3 = -\frac{1}{27}p^3$ duas habet radices; quarum altera quod ſit $= y$, altera vero $= z$, ex eo liquet, quia ex æquatione prima $3y^2z + 3z^2y = py + pz$, reperitur $y = p : 3z$, perinde ac $z = p : 3y$, & valor ipſius y in altera $y^3 + z^3 = q$ ſubſtitutus dat æquationem $z^6 - qz^3 = -\frac{1}{27}p^3$, eandem cum anteriore. Manifeſtum enim eſt æquationem, quæ ducit ad valorem determinatum quantitatis cognitæ, duas habere debere radices, quarum una denotat y, altera vero z; etſi perinde ſit quam ipſi y, quam vero ipſi z tribuere velis; cum quantitates y & z pro arbitrio aſſumantur, ut pro majore & minore habere poſſis, quam volueris. Hoc artificio jam uſi ſumus in inveſtiganda regula tollendi ſecundum terminum ex æquatione data (§. 343 *Analyſ.*), ut nempe coëfficiens ſecundi termini propter indeterminatam t poni poſſit nihilo æqualis. Diverſa tamen in præſenti caſu ejus applicatio eſt.

§. 191. Limites æquationum eo modo inveſtigare docuimus, (§. 356 *Analyſ.*), qui in *Commentariis ad Geometriam*

metriam CARTESII proponitur. Habet enim hoc ſingulare ea methodus; quod Algebram, quæ tota nititur ratione æqualitatis, extendat ad rationem inæqualitatis, ubi inæqualia, mediante ſigno $>$ vel $<$, eodem modo inter ſe comparantur, quo in Algebra æqualia mediante ſigno $=$, & reductio per ſimilia axiomata inſtituitur, quo eadem in Algebra fieri conſuevit. Hanc ipſam vero methodum, etſi hactenus attentione ſua indignam eam judicaverint Analyſtæ, etiam alibi uſui eſſe poſſe, exemplo aliquo facili monſtrare lubet. Ponamus quæri, qualis ſit ratio, quam habent duæ quantitates inæquales ad eandem tertiam. Reſolutio problematis ita ſeſe habet:

Sit major $=x$ Data tertia $=a$
minor $=y$

erit

$$x > y$$
$$\overline{}\; a$$
$$ax > ay$$

Fiat $x : a = t : v$

erit $x = \frac{at}{v}$

adeoque $\frac{a^2t}{v} > ay$

$$\frac{at}{v} > y$$

$$\frac{t}{v} > \frac{y}{a}$$

Ergo ob $\frac{t}{v} = \frac{x}{a}$

$$\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

hoc eſt $x : a > y : a$

Habemus adeo theorema: *Majus ad idem majorem rationem habet, quam minus*, iſtiuſmodi analyſi inveſtigatum, qua problemata algebraice ſolvuntur. Non alio fine proponimus hoc problema, quam ut ideam quandam hujus methodi animo tyronum ingereremus. Conſultum igitur erat, ut exemplum eligeremus facile, & ex anterioribus jam notum. Videbimus deinceps applicatione methodorum, quæ nobis innoteſcunt, ad exempla notiſſima & maxime vulgaria haud raro detegi maxime ardua: ſit ita, quod methodorum inventores, ne ardua nullo fere negotio detexiſſe videantur, eas applicent ad exempla, quæ ſublime quid ſpirant & intellectu difficilia deprehenduntur.

§. 192. Extractio radicis ex ſerie infinita (§. 366 *Analyſ.*), etiam artificium quoddam ſingulare habet; quod conſiſtit in diverſa applicatione aſſumtionis quantitatum indeterminatarum lege comparationis determinandarum; quo ſupra jam uſi ſumus in tollendo ſecundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analyſ.*), & in extrahenda radice ex æquatione cubica (§. 358 *Analyſ.*). Series enim aſſumtitia, qua exprimitur valor ipſius x, qui quæritur, coëfficientes habet

indeter-

indeterminatos, lege comparationis determinandos. Ut vero determinari poſſint, perinde ac ſuperius lege ſubſtitutionis; æquatio propoſita, cujus coëfficientes determinati ſunt, transmutatur in aliam, quam coëfficientes indeterminati cum determinatis ſimul ingrediuntur; quemadmodum fecimus in extractione radicis ex æquatione cubica (§. 358 *Analyſ.*); etſi alio principio hic nitatur coëfficientium indeterminatorum determinatio, cujus ratio ex ipſo contextu liquet, & quod affine eſt ei, quo eodem fine uſi ſumus in tollendo ſecundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analyſ.*), quamvis ob aliam rationem. Patet hinc, quam utile ſit ut artificia analytica, quibus in reſolutione problematum utimur, inter ſe conferantur, quo pateat eorum, quæ eadem ſunt, diverſa applicatio. Quodſi enim in rationem applicationis inquiſiveris; id non modo efficiet, ut eadem in caſu eodem recurrente facilius memoriam ſubeat; verum etiam hoc ipſo conſequeris, ut eandem, prout caſus exigit, ipſemet variare poſſis. Iſtiuſmodi autem diſquiſitiones apprime neceſſariæ ſunt ei, qui in Arte inveniendi generali proficere vult ſtudio Algebræ, & intellectui conciliare geſtit eam habitudinem, qua ad artificia heuriſtica diverſimode applicanda opus habet. Problema, de quo jam loquimur, maximæ utilitatis eſt: continet enim methodum, quæ *Regreſſus ſerierum* nomine venit, & cujus maxima eſt utilitas in Geometria ſublimiori; quemadmodum ſuo loco oſtendemus. Equidem problema hoc tanta perſpicuitate expoſuimus, ut tyro in anterioribus cum laude verſatus idem abſque ulla difficultate intelligat, niſi calculi moleſtias fugiat; quodſi tamen quis ab iiſdem abhorreat, idem tamdiu ſeponat, donec regreſſu ſerierum ad ſolvenda problemata opus habuerimus.

§. 193. Extractiones radicum ex æquationibus, de quibus diximus in capite præſente, uſum tantummodo habent in ſolutionibus problematum arithmeticis. Quamobrem docendum quoque erat, quomodo æquationes altiores geometrice conſtruantur. Per rectas & circulum eædem conſtrui nequeunt: ſed confugiendum hic eſt ad lineas curvas. Quamobrem cum de lineis curvis, præter circulum, nihil doceatur in Geometria elementari; noſtrum erat ante docere, quomodo Algebra ad Geometriam ſublimiorem, quæ de curvis agit, applicetur; ut ejus ope curvarum deſcriptiones, & proprietates, ac ſymptomata, hoc eſt, prædicata abſoluta & conditionata, inveniantur. Applicationem hanc debemus CARTESIO, qui eam docuit in Geometria, ſed non ad captum tyronum. Facile tamen reperiri poterat, ſi quis ad vulgaria animum attendere voluiſſet. Tota enim in

hoc

hoc conſiſtit, ut curva definiatur per æquationem, & ex ea, adhibitis artificiis in Algebra uſitatis, eliciantur curvarum conſtructiones, proprietates, & ſymptomata. Ecce igitur tibi facillimam ad hanc methodum, quæ inexhauſtæ utilitatis eſt in Geometria ſublimiori, viam. Conſtat ex elementis Geometriæ (§. 327 *Geom.*), ſemiordinatam PM eſſe mediam proportionalem, inter abſciſſam AP & complementum diametri PB; ſi utamur terminis in doctrina de Curvis receptis, & initio capitis ſexti explicatis. Quare ſi ſit diameter AB $=a$, abſciſſa AP$=x$, ſemiordinata PM$=y$, erit complementum diametri PB$=a-x$; conſequenter

Tab.II. Fig.17.

$$AP : PM = PM : PB$$
$$x : y = y : a-x$$

adeoque $y^2 = ax - x^2$

Habemus adeo æquationem, quæ circulum definit. Quodſi jam ponamus, nos neſcire, qualis ſit hæc curva; ea, quæ de eadem nobis innoteſcere poſſunt, hoc modo eruimus.

Sit $y = 0$

erit $ax - x^2 = 0$

$ax = x^2$

$a = x$

Patet itaque 1°. curvam ſecare rectam AB in B.

Sit $x = 0$

erit $y^2 = 0$

$y = 0$

Unde liquet 2°. curvam ſecare rectam AB in A.

Sit $x = \frac{1}{2}a$

erit $y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$

$= \frac{1}{4}a^2$

$y = \frac{1}{2}a$

Videmus itaque, 3°. ſi ex medio rectæ AB erigatur perpendicularis CD, æqualis AC, curvam tranſire per punctum D.

Quoniam eadem curva tranſit per A & B (*vi num.* 1 & 2); evidens eſt, 4°. eam concavitatem rectæ AB obvertere. Et quoniam patet, ſingula ſeſe eodem modo habere debere, ſi ſemiordinatæ ex altera parte ſumantur; porro liquet, 5°. curvam eſſe in ſe redeuntem. Quæratur jam magnitudo rectæ MC, ex puncto C, in medio rectæ AB aſſumto, ad extremitatem ſemiordinatæ PM, ſeu punctum in curva M ductæ.

Sit AC$= \frac{1}{2}a$ MC$=z$

AP$=x$

erit PC$= \frac{1}{2}a - x$

adeoque PC$^2 = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$

PM$^2 = ax - x^2$ per naturam curvæ.

Ergo ob MC^2=MP^2+PC^2, $z = \frac{1}{4}a^2$

$z = \frac{1}{2}a$

6°. Recta igitur ex puncto C in quodlibet peripheriæ punctum M ducta æqualis eſt rectæ AC, ſeu dimidiæ rectæ AB; conſequenter rectæ omnes ex eodem puncto C in periphe-

riam ductæ æquales ſunt (§. 87 *Arithm.*): quæ eſt proprietas circuli, per quam definiri ſolet in Geometria elementari.

Hinc vero porro 8° liquet, Curvam hanc deſcribi, ſi recta CA circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ eſt definitio circuli realis.

Ponamus $y = \frac{1}{2}a$

erit $y^2 = \frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

Quoniam ſuperius (*n.* 3) reperimus $y = \frac{1}{2}a$, ſi fiat $x = \frac{1}{2}a$; ideo patet, 9°. In nullo alio puncto, quam in C ſemiordinatam rectæ dimidiæ AB æqualem eſſe poſſe.

Si ſit $PM = y$, $PC = v$, $CM = \frac{1}{2}a$ (*n.* 6); erit per theorema Pythagoricum:

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$$

adeoque $\frac{1}{4}a^2 > y^2$

$$\frac{1}{2}a > y$$

$$y < \frac{1}{2}a$$

Quamobrem 10°. ubivis extra centrum, ſemiordinata minor dimidia recta AB: conſequenter cum minor ſit ſemiordinata in centro erecta CD (*n.* 3), ſemiordinatæ autem ſint chordarum dimidiæ; 11°. diameter chordarum maxima eſt.

Sit diſtantia ſemiordinatæ a centro $PC = v$, $PM = y$, erit

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2 \ (n. 6).$$

Et ſi alia $PC = t$, PM alia $= z$, erit $\frac{1}{4}a = z^2 + t^2$

Quare $z^2 + t^2 = y^2 + v^2$

ſit $t > v$

erit $z^2 < y^2$

$$z < y$$

12°. Semiordinata itaque z tanto minor alia quacunque ſemiordinata y, quanto magis a centro diſtat; conſequenter chordæ tanto minores, quanto a centro remotiores.

Sit $AB = a$, $AP = x$, erit $PB = a - x$, adeoque Tab. I Fig. 1

$AP^2 = x^2$

$PM^2 = ax - x^2$, ex natura Curvæ

$AM^2 = ax$

Similiter $PB^2 = a^2 - 2ax + x^2$

$PM^2 = ax - x^2$

$MB^2 = a^2 - x^2$

$AM^2 = ax$

$$MB^2 + AM^2 = a^2 = AB^2$$

Quoniam $AB^2 = AM^2 + PB^2$, triangulum AMB rectangulum eſt, conſequenter 13°. angulus AMB in ſemicirculo rectus.

Et quia $AM^2 = ax$, $BM^2 = a^2 - ax$; erit $a : AM = AM : x$

$a : BM = BM : a - x$

hoc eſt $AB : AM = AM : AP$

$AB : BM = BM : PB$

Eſt

Eſt igitur 14°. Chorda media proportionalis inter diametrum AB & ſegmentum adjacens.

Tab.II. Fig. 19. Quodſi quæratur recta TM ex puncto quocunque T intra circulum aſſumto in peripheriam ducta; ducatur, per centrum C & punctum T, recta AB, quæ erit diameter circuli, & ex puncto peripheriæ M demittatur perpendicularis MP, quæ erit ſemiordinata. Sit jam

$$AC = CB = a \qquad AP = x$$
$$BT = b \quad \text{erit} \quad PC = a - x$$
$$\text{erit } CT = ab \qquad PT = 2a - b - x$$

Porro

$$PM^2 = 2ax - x^2, \text{ ex natura circuli}$$
$$PT^2 = (2a - b^2) - 4ax + 2bx + x^2$$

$$TM^2 = (2a - b)^2 - 2ax + 2bx$$
$$= (2a - b)^2 - 2(a - b)x$$
$$= TA^2 - 2CT.\ AP$$

Eſt adeo 15°. Quadratum rectæ TM æquale exceſſui quadrati rectæ TA ſupra rectangulum ex duplo diſtantiæ puncti T a centro C in abſciſſam AP puncto M reſpondentem. Hoc theorema in Elementis non extat: ex eo tamen conſequuntur, quæ in iis demonſtrantur. Nimirum quia 2CT conſtans eſt; decreſcente abſciſſa AP decreſcit quoque rectangulum ex AP in 2CT; & cum quadratum rectæ TA non minus conſtans ſit, quo minus fuerit rectangulum ex 2CT in AP, eo major evadet exceſſus quadrati rectæ TA ſupra hoc rectangulum; conſequenter eo majus erit quadratum rectæ TM, quippe eidem æquale, adeoque etiam ipſa recta TM. Et quando TM incidit in diametrum, ſeu punctum M in A, quadratum ipſius TM æquale evadit quadrato ipſius TA; conſequenter TA major eſt qualibet TM, adeoque maxima rectarum, quæ ex puncto T in peripheriam duci poſſunt. Incidimus adeo 16°. in theorema 63 (§. 303 *Geom.*)

Ante invenimus (*n.* 14) $AM^2 = AB.\ AP$, hoc eſt, quod quadratum chordæ ſit æquale rectangulo ex diametro in abſciſſam. Quamobrem, cum creſcente abſciſſa AP creſcat arcus AM, creſcat etiam rectangulum ex diametro AB in abſciſſam AP; ideo patet 17°. quadratum chordæ majoris eſſe majus quadrato chordæ minoris; conſequenter chordam majorem ſubtendere arcum majorem, quam minor, ſeu chordam arcus majoris majorem eſſe, chordam minoris minorem. Tab.II. Fig. 18.

Alia ex æquatione ad circulum deducuntur, in ipſa Analyſi præſertim infinitorum, qua in Geometria ſublimiori carere minime poſſumus. Ex hactenus dictis abunde patet, quomodo applicatione Algebræ ad ea, quæ ex EUCLIDE notiſſima ſunt, methodus definiendi curvas per æquationes, & ex iis deducendi earum geneſes ac conſtructiones, proprietates, aliaque ſymptomata, innoteſcere potuerit. De ſectionibus conicis APOLLONIUS ſimiliter demonſtravit theoremata, quorum ope per æquatio-

nes definiuntur, quemadmodum in hoc capite fecimus. Quamobrem apparuit, eandem methodum ad conicas quoque ſectiones applicari poſſe. Atque ſic enata eſt methodus tractandi curvas per æquationes, ſeu Algebram ad Geometriam ſublimiorem applicandi. Hæc non eo fine a nobis adducuntur, ut inventorum laudi detrahamus; ſed ut diſcamus, vulgarium meditationem ducere ad maxime ardua; & ea neglecta inventores ſibimetipſis obeſſe, ſi quando per ambages quærunt, quæ obvia ſunt recta via incedentibus; utque tyrones ideam hujus methodi animo concipiant, quæ in ejus applicatione ad altiora facem præfert. Qui recta via in inveniendo progreditur, ex iis, quæ cognita atque trita ſunt, colligit quæ nondum patent, parum ſollicitus, quamnam utilitatem ſint habitura, quæ deteguntur. Sed de his dicemus, ubi Artem inveniendi ex inſtituto expoſituri ſumus.

§. 194. Diximus ſuperius (§. 169), nondum invento calculo univerſali, Algebram numeroſam jam applicari potuiſſe ad Geometriam, ut per eam detegerentur theoremata & problematum conſtructiones. Immo ipſa etiam applicatio ad Geometriam ſublimiorem fieri poterat non ſine ſucceſſu. Dictis igitur fidem facere noſtrum eſt uno alteroque exemplo. Ponamus ex. gr. quæri relationem rectarum AT & TE, ex eodem puncto T extra circulum dato ductarum; quarum altera Tab. II.
AT circulum tangit in A, altera TE Fig. 2.
eundem ſecat.

Sit diameter $BE = 1$, $TB = x$
erit $AC = \frac{1}{2}$, $TC = \frac{1}{2} + x$
ſit porro $AT = 2$, $TE = 1 + x$
Quoniam AT perpendicularis ad AC (§. 308 *Geom.*), erit
$TC^2 = AC^2 + TA^2$ (§. 417 *Geom.*)
adeoque $(\frac{1}{2})^2 + 2.\frac{1}{2}x + x^2 = (\frac{1}{2})^2 + 2^2$

$$2.\tfrac{1}{2}x + x^2 = 2^2.$$

ſed $2.\frac{1}{2} = 1$, per cond. probl.
ergo $1x + x^2 = 2^2$
hoc eſt $(1 + x)x = 2^2$
ſive $TE.\ TB = AT^2$
Quamobrem $TE : AT = AT : TB$

Habemus itaque duo theoremata: 1°. Quadratum tangentis, in hypotheſi problematis, eſt æquale rectangulo ex ſecante in ejus portionem extra circulum. 2°. In eadem hypotheſi tangens eſt media proportionalis inter ſecantem & ejus portionem extra circulum.

In Algebra ſpecioſa diametrum appellamus *a*, tangentem *b*. Cum hæc ſigna ſint primitiva, perinde eſt ſive diametrum *a*, ſive 1, & num tangentem *b*, an vero 2 dicas, modo in calculo univerſalitatem conſerves, ut in locum 2 quemcunque numerum alium ſurrogare poſſis, ſive rationalem, ſive irrationalem, ſive integrum, ſive fractum, qui in dato caſu exprimit rationem ad diametrum tanquam unitatem.

Pona-

Tab. I. *Fig.* 3. Analyſ. Ponamus porro problema 13 (§. 255 *Analyſ.*) ſolvendum eſſe per Algebram numeroſam, ſed univerſaliter, quemadmodum ſolvitur per ſpecioſam. Solutio hæc erit:

ſit $AB+BC+CA=6$ $AC=x$
Area $\triangle = 2^2$, erit $BC+BA=6-x$
$AC^2=x^2$

Cum ſit $AC^2=AB^2+BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2+BC^2=(AB+BC)^2-2AB.BC$ (§. 216 *Arithm.*); erit $AC^2=(AB+BC)^2-2AB.BC$ (§. 91 *Arithm.*). Eſt vero $(AB+BC)^2=6^2-2.6x+x^2$ & $2AB.BC=4.2^2$ (§. 392 *Geom.*). Quamobrem

$$x^2=6^2-2.6x+x^2-4.2^2$$

$$0=6^2-2.6x-4.2^2$$

$$2.6x=6^2-4.2^2$$

$$x=\frac{6}{2}-2.\frac{2^2}{6}$$

Patet itaque hypothenuſam trianguli rectanguli x eſſe æqualem exceſſui ſemiperimetri $\frac{6}{2}$ ſupra tertiam proportionalem ad ſemiperimetrum $\frac{6}{2}$ & latus quadrati 2 areæ trianguli æqualis. Unde liquet, problema geometrice conſtrui, ſi ad ſemiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis quæratur tertia proportionalis, & hæc ex ſemiperimetro auferatur.

Æquatio pro circulo erat $y^2=ax-x^2$, ubi a diametrum denotat, ſive igitur diametrum dicas a, ſive 1 aut 2, modo obſerves ea, quæ ad univerſalitatem calculi conſervandam præcepimus; ex æquatione $y^2=1x-x^2$, vel $y^2=2x-x^2$ eadem erues, quæ paulo ante ex altera eruimus (§. 194).

Immo nondum invento calculo litterali poterant quoque quantitates datæ exprimi literis, quibus in Geometria lineas indigitamus, veluti in exemplo primo.

Diameter $=BE$ $TB=x$ Tab. II.
radius $=AC$ $TC=AC+x$ *Fig.* 20.
tangens $=AT$ $TE=BE+x$

Unde reſultat æquatio

$$AC^2+2AC.x+x^2=AC^2+AT^2$$

$$2AC.x+x^2=AT^2$$

$$(BE+x)x=AT^2$$

h. e. $TE.TB=AT^2$

vel in problemate altero

Periph. $\triangle=AB+BC+CA$ $AC=x$ Tab. I.
Area $\triangle=DE^2$ $AC^2=x^2$ *Fig.* 3. Analyſ.
$BC+CA=AB+BC+CA-x$

Unde reperitur ut ante æquatio:

$$x^2=(AB+BC+CA)^2-2(AB+BC+CA)x+x^2-4DE^2$$

$$0=(AB+BC+CA)^2-2(AB+BC+CA)x-4DE^2$$

$$2(AB+BC+CA)x=(AB+BC+CA)^2-4DE^2$$

$$x=\tfrac{1}{2}(AB+BC+CA)-2DE^2:(AB+BC+CA)$$

 Simi-

Tab.II. Fig. 17. Similiter ſi diameter circuli dicatur AB, ſemiordinata PM, abſciſſa AP; æquatio ad circulum eſt $PM^2 = AB.AP - AP^2$: unde eadem deducuntur, quæ ex æquatione $y^2 = ax - x^2$ deduximus.

Talia monemus, ut appareat Veteribus plura in poteſtate fuiſſe, quam exiſtimavere, propterea quod ad ſtudium mathematicum non eam attentionem attulerunt, quam in ſuperioribus commendavimus, ut methodos intimius perſpiciamus, ea diſcernentes, quæ ſunt legum methodi, ab iis, quæ characteriſticæ tribuenda, & ut characteriſticæ ubivis commodum faciamus uſum: neque enim iidem characteres æque ſatisfaciunt in omni caſu, ſed alii aliis non ſine utilitate haud raro ſubſtituuntur. Neque vero eſt, quod excipias, nos in calculo univerſali numeroſo, & ſubſtitutis linearum appellationibus communibus, adhibere artificia ex characteriſtica, qua in Algebra ſpecioſa utimur, petita; veluti dum potentias linearum deſignamus per exponentes, numeris vel literis majoribus quibus lineæ denotantur adſcriptos inſtar apicum. Etenim hanc denotationem jam indicavit KEPLERUS in *Harmonica*, calculo literali adhuc ignorato, & per ea eadem patere poterat, quæ de natura numerorum coſſicorum, quos vocat, tradidit STIFELIUS in *Arithmetica integra*, multo ante, quam VIETA de Arithmetica literali cogitaret, & HARIOTTUS atque CARTESIUS eandem ulterius perficerent. Et quamvis recentior characteriſtica commodior ſit; ipſa tamen methodus per eam non variatur, quæ etiam abſque omni characteriſtica ſubſiſtit: ſit ita, quod, deficiente characteriſtica commoda, ſubinde tantæ ſuboriantur moleſtiæ, quas devorare non eſt cujuſvis, & ea requiratur attentio, ut ab errore immunem te præſtes, quam non quivis afferre valet. Hæc ignorare non poteſt, qui ad characteriſticam, qua hodie in Arithmetica utimur, eam attentionem attulerit, quam in ſuperioribus commendavimus; & quæ acumen iſtud, quo ea quæ ſunt legum methodi, ab iis quæ characteriſticæ debentur ſeparantur, confert.

§. 195. Circulus per æquationem algebraicam definiri poteſt, quia punctorum omnium M ad diametrum AB conſtans quædam relatio eſt, quæ exprimitur per relationem ſemiordinatæ ad abſciſſam; demittendo ſcilicet ex puncto quolibet M perpendiculum PM in diametrum AB, ut abſcindatur AP. Unde facile intelligitur idem ſuccedere debere in aliis curvis ubi ſimilis relatio obtinet. Quamobrem cum conſtet, APOLLONIUM de parabola, hyperbola, & ellipſi, ſeu ſectionibus conicis, tale quid demonſtraſſe; ſtatim prævidere licet methodum, qua in circulo uſi ſumus, in iiſdem quoque adhiberi poſſe. Enimvero poſſunt puncta curvæ Tab.II. Fig. 18.

væ referri ad quamcunque aliam rectam poſitione datam: id quod cum uſui ſit in ſequentibus, exemplo circuli hoc ipſum declarare lubet. Ducatur recta AL, quæ circulum in C tangat; erit ea ad radium GC perpendicularis
Tab.II. (§. 308 *Geom.*). Ducatur quoque DA,
Fig. 21. quæ circulum tangit in D, adeoque ad radium DG perpendicularis (§. *cit.*); cum etiam CG ſit perpendicularis ad GD (§. 143, 78 *Geom.*), erit AL diametro DE parallela (§. 258 *Geom.*), & AD ad eandem perpendicularis (§. 230 *Geom.*), adeoque ſemiordinata (§. 370 *Analyſ.*). Ducatur ſemiordinata alia quæcunque PM, continuanda donec diametro DE in Q occurrat; erit MQ ad DE perpendicularis. Sit AC=DG=a, AP=x, PM =y; erit QM=$a-y$; adeoque per naturam circuli, cum ſit

$$QM^2 = DQ.\ QE$$

erit, $a^2-2ay+y^2=2ax-x^2$

Quæ æquatio circulum definit reſpectu tangentis AL.

Fiat jam $x=0$, erit

$$a^2-2ay+y^2=0$$

$$a-y=0$$

$$a=y$$

hoc eſt, in origine abſciſſæ A ſemiordinata AD eſt radio circuli æqualis.

Sit $x=a$, erit

$$a^2-ay+y^2=2a^2-a^2$$
$$=a^2$$

$$y^2-2ay=0$$

$$y-2a=0$$

$$y=2a$$

hoc eſt, ſemiordinata CN diametro circuli æqualis, ſeu perpendicularis CN ad AC curvæ in N occurrit.

Sit $x=2a$, erit

$$a^2-2ay+y^2=4a^2-4a^2$$
$$=0$$

$$a-y=0$$

$$a=y$$

hoc eſt ſemiordinata LE radio circuli æqualis.

Quodſi quæratur recta GM, cum ſit per theorema Pythagoricum

$$GM^2=MQ^2+QG^2$$

erit $GM^2=2a^2-2ay+y^2-2ax-x^2$

eſt vero ex natura curvæ

$$a^2-2ay+y^2=2ax-x^2$$

Ergo $GM^2=a^2$

$$GM=a$$

Quare ſi ponamus, nos ignorare, ad quam curvam ſit æquatio; patet hinc eam eſſe ad circulum.

Nimirum quando ex æquatione data eruuntur, quæ de curva cognoſci poſſunt, tum ſemper ſupponitur, non conſtare, ad quamnam curvam ſit æquatio. Quodſi ſemicirculus DNE ad rectam AL referretur, ſemiordinata PO foret y, adeoque QO=$y-a$. Quamobrem cum eadem prodiret, quæ ante æquatio; alterum ejus membrum $a^2-2ay+y^2$ duas habet radices $a-y$ & $y-a$: id quod indicio eſt, ſemiordinatam recta AC & minorem, & majorem eſſe poſſe; conſequenter ex ipſa æquatione intelligitur,

gitur, curvam a ſemiordinata ſecari in duobus punctis. Quoniam itaque in C eandem nonniſi in uno puncto N ſecat; id indicio eſt, quod in C eandem tangat. Similiter quia in A & L ſemiordinata nonniſi unum valorem habet; hinc conficitur, quod ſemiordinatæ AD & LE curvam ſimiliter tangere debeant. Unde liquet curvam eſſe in ſe redeuntem, & ejus puncta referri ad lineam, quæ tota extra curvam cadit, ab ea tamen non diſtat. Diſtantia enim a tota curva æſtimatur ex perpendiculari minima, quæ hic nulla eſt.

Suadendum omnino eſt, ut tyrones notent, quomodo curvæ agnoſcantur, & a ſe invicem diſtinguantur; nimirum relatione punctorum ad rectam quandam poſitione datam, & circulum referant ad varias rectæ poſitiones, ut totius methodi vim ac poteſtatem rectius ac intimius perſpiciant. Hoc enim pacto non modo nihil difficultatis habebit, quod in capite præſenti occurrit; verum etiam doctrina de Locis geometricis, quæ omnem rectæ illius poſitionem poſſibilem ſupponit, non perturbabit tyronem. Immo in genere notandum eſt, ſi ad maxime obvia & notiſſima applicentur methodi novæ, in quas incidimus; haud raro talia offerri, circa quæ hærent etiam exercitatiores, ubi in applicatione methodi ad nondum cognita occurrunt. Exemplum ſuppeditat æquatio, quam modo dedimus pro circulo $a^2-2ay+y^2=2ax-x^2$. Etenim ſi ſumis, eam explicare relationem quadrantis DMC ad rectam AC, & ponis AP $=$ AC, ſeu $x=a$, per ea, quæ vidimus in æquatione præcedente (§. 193), prodire debere videtur $y=0$. Unde miraris, ubi prodit $y=2a$. Verum enimvero ubi conſideras, æquationem $a^2-2ay+y^2$ habere duas radices, alteram nimirum $a-y$, alteram $y-a$, & priori reſpondere QM, poſteriori autem QO; hinc diſces, per æquationem $a^2-2ay+y^2=2ax-x^2$ tam ſemicirculi ſuperioris DNE, quam inferioris DCE ad rectam AL relationem exprimi; conſequenter in puncto C, ubi valor unus ipſius PM ſive $y=0$, etiam prodire debere valorem alterum ipſius $y=2a$, recta nimirum PO in CN degenerante. Quodſi tale quid occurreret in tractatione æquationis, cui, quænam curva reſpondeat, adhuc ignoratur; unde hoc fiat, non adeo facile animadverteres, & multum omnino olei ac operæ perderes, antequam ex perturbatione eluctari valeres. Similiter ubi ponis $x=0$ & $x=2a$, prodit $a^2-2ay+y^2=0$, adeoque $y-a=0$ & $a-y=0$, quæ utraque æquatio dat eundem valorem nempe $y=a$. Unde vides, in contactu D & E, duas radices æquales habere æquationem; quemadmodum deinceps ſupponitur in methodo tangentium, & ſine quo principio CARTESIUS ad methodum ſuam tangentium non perveniſſet.

Non

Non addimus plura, cum hactenus dicta abunde ſufficiant ad perſuadendum utilitatem meditationis eorum, quæ nobis notiſſima ſunt, ut eorundem ope detegantur alia, quorum alias cogitatio animum nunquam ſubiiſſet.

§. 196. Quodſi hanc methodum, quam adeo fœcundam experiris in circulo, etiam ad curvas alias, quas tractarunt Veteres, applicare volueris; non omnes promiſcue per æquationes definiri poſſe animadvertes, ubi eodem modo puncta eorum refers ad rectam quandam poſitione datam. Non ſuccedet in Spiralibus ARCHIMEDIS, nec in Quadratice DINOSTRATIS, quemadmodum ſub finem capitis videbimus. Quoniam itaque ex iis, quæ de circulo diximus, & per ſectiones conicas confirmantur, didiceris, quod æquatio curvam definiens ſupponat conſtantem relationem puncti cujuslibet ad eandem rectam poſitione datam; hinc utique patet, non dari poſſe æquationem ad curvam, cujus puncta ad rectam poſitione datam conſtantem relationem minime habent. Atque adeo non miraberis, nec hærebit aqua, ubi curva offertur, quæ per iſtiuſmodi æquationem explicari nequit. Et patet ratio, cur CARTESIUS curvas diſtinxerit in algebraicas & non algebraicas, quarum illas vocat geometricas, has vero mechanicas; propterea quod exiſtimavit, illas ſolas in Geometriam recipi poſſe, has vero ex eadem excludi debere; quod ignoravit æquationes differentiales, de quibus dicemus in Analyſi infinitorum, & quarum ope non minus algebraice tractantur curvæ, quæ a CARTESIO mechanicæ appellantur, quam quas geometricas appellat. Et ſic patet ratio diviſionis Curvarum in algebraicas & tranſcendentes, quam tradimus (§. 377, 380 *Analyſ.*)

§. 197. Notandum vero eſt artificium, quo æquatio curvæ particularis reducitur ad generalem, quæ infinitas curvarum ſpecies ſub ſe comprehendit: id quod fit exponentium indeterminatorum ſurrogatione in locum determinatorum: quo artificio jam uſi ſumus in anterioribus, veluti in theoremate generali de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analyſ.*). Probe quoque notandum eſt, quod in iſtiuſmodi æquationibus obſervanda ſit lex homogeneorum, quæ præcipit, ut termini ſinguli æquationum habeant dimenſiones numero æquales, hoc eſt, ut unus valor prodeat, ductis tot rectis in ſe invicem, quot in ſe invicem ſunt ducendæ, ut prodeat quilibet alter. Etſi enim in Geometria non detur magnitudo, quæ ultra ſolidum, quod trium dimenſionum eſt & tribus rectis in ſe invicem ductis reſultat, aſſurgit; in Algebra tamen fictione non inutili admittuntur hyperſolida, quæ ductu quotlibet rectarum in ſe invicem in infinitum reſultant. Nititur hæc fictio princi-

pio, quod inter duas lineas infinitæ cadere poſſint lineæ mediæ continue proportionales, quemadmodum ex geneſi potentiarum in infinitum progredientium liquet; veluti ſi ponas numeros in progreſſione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. in infinitum, hoc eſt $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$, &c. in infinitum; ubi inter 1 & 2^2 una, inter 1 & 2^3 duæ, inter 1 & 2^4 tres, inter 1 & 2^5 quatuor cadunt numeri medii continue proportionales, & ſic porro in infinitum. Etſi enim hic numeri omnes, quorum ductu in ſe invicem reſultant termini ulteriores, ſint inter ſe æquales; conſtat tamen, vel ex Geometria elementari, (in qua v. gr. rectangulum reducitur ad quadratum eidem æquale, & parallelepipedum ad cubum ſibi æqualem,) ea, quæ ductu linearum inæqualium in ſe oriuntur, reduci poſſe ad talia, quæ oriuntur ductu totidem æqualium in ſe invicem. Sufficiant hæc in gratiam tyronum dicta, ut ipſis aliqua lux affundatur in conſiderandis hyperſolidis, quæ Algebra admittit. Inprimis autem attentionem meretur æquatio, quæ eminenter continet omnes æquationes ad algebraicas curvas. Etenim in eo latent tria artificia, nimirum 1°. quod æquationis alterum membrum ſit nihilum, de quo artificio jam ſupra diximus (§. 189); 2°. quod terminus unus repræſentet in caſu particulari plures, ut adeo coëfficientes explicandi ſint non uno, ſed diverſis modis, 3°. quod in æquatione nulla habeatur ratio ſignorum, quæ in particularibus variant æquationibus, ſed termini omnes afficiantur ſigno +, ne opus ſit plures formare æquationes generales, ubi omnes particulares ſub una comprehendi poſſunt, quod ſane artificium maximi faciendum. Enimvero ut applicatio formulæ generalis manifeſta evadat, lubet eam applicare ad circulum. Æquatio generalis eſt:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$$

Æquatio ad circulum:

$$y^2 + ax - x^2 = 0$$

Vides hic abeſſe xy, nec ullum adeſſe membrum conſtans ex mere cognitis, adeoque $cy^r x^s + df = 0$, conſequenter formula generalis contracta hæc relinquitur:

$$ay^m + bx^n = 0$$

Eſt igitur

$$ay^m = y^2$$

adeoque $a = 1$.
$m = 2$.

Porro

$$bx^n = +ax \qquad bx^n = -x^2$$

adeoque $b = a, n = 1 \qquad b = -1, n = 2$.

Docet adeo hoc ipſum exemplum, quomodo terminus unus in generali comparetur cum pluribus in particulari, ut coëfficientes indeterminati in generali determinentur ex particulari. Patet etiam, quomodo ſignum + in formula generali non obſtet, quo minus coëfficiens negati-

vus determinetur ex particulari, dum hic reperitur $b = -1$. Habet nimirum b in caſu præſenti valorem duplicem, alterum poſitivum $+a$, alterum negativum -1.

§. 198. Qui quæ de circulo diximus probe perpendit, ei non hærebit aqua circa ea, quæ de ſectionibus conicis aliiſque curvis in præſenti capite, & de locis geometricis in ſequente demonſtrantur. Incepimus a parabola, quæ eſt ſectionum conicarum ſimpliciſſima. Æquatio ejus $y^2 = ax$. Quodſi fiat

$$x = 0$$

erit $$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Tab.II. Fig.22. Atque adeo patet 1°. in origine abſciſſæ A curvam ſecare rectam datam, ad quam refertur, AX.

Sit alia abſciſſa $AP = v$, eidem reſpondens ſemiordinata $PM = z$, erit $z^2 = av$.

Ponamus $$v > x$$

erit $$av > ax$$
adeoque $$z^2 > y^2$$

$$z > y$$

2°. Creſcentibus adeo abſciſſis, ſemiordinatæ quoque creſcunt; conſequenter curva in infinitum continuari poteſt, & ab axe AX continuo magis magiſque recedit.

Si fiat $$x = a$$

erit $$y^2 = a^2$$

$$y = a$$

3°. Quando igitur abſciſſa parametro æqualis, etiam ſemiordinata eidem æqualis eſt, conſequenter ſi abſciſſa parametro æqualis, ſemiordinata & abſciſſa æquales ſunt.

Sit $$y = \tfrac{1}{2}a$$

erit $$ax = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$x = \tfrac{1}{4}a$$

4°. Si ergo ſemiordinata ſemiparametro æqualis, quarta diametri parte a vertice A ſeu origine ſua diſtat.

Quodſi æquationem ad parabolam cum æquatione pro omnibus curvis algebraicis conferre volueris; cum hæc ſit:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$$

pro parabola vero

$$y^2 - ax = 0$$

& in hac deficiat xy & terminus conſtans ex mere cognitis reſpondens ipſi df, æquatio generalis contrahitur in

$$ay^m + bx^n = 0$$

eſtque $$ay^m = y^2 \qquad bx^n = -ax$$

adeoque $a = 1, m = 2 \quad b = -a, n = 1$

Hæc addere libuit, ut appareat, eodem modo tractari poſſe æquationem ad parabolam, qua tractavimus æquationem ad circulum. Cetera enim patent per reſolutionem problematum in hoc capite propoſitorum.

§. 199. De methodo tangentium, qua utimur problematis 181, 189, 208, (§. 410, 440, 491 *Analyſ.*), quædam adhuc annotanda ſunt. Tangentes curvarum facillime determinantur per calculum differentialem, quemadmodum in Analyſi infinitorum docemus. Quoniam vero ſectiones conicas referre minime licet ad diametrum, niſi præſuppoſita tangente, cui ſemiordinatæ ſunt parallelæ & quæ ex puncto contactus ducitur; ideo neceſſarium fuit tangentem determinari per Algebram communem. Adhibuimus itaque methodum CARTESII, quæ nititur hoc principio, quod in contactu duæ radices evadant æquales: id quod ſuperius in circulo reperimus (§. 195). Tab. II. Fig. 23. Ponamus enim rectam TR ſecare curvam in M & N; evidens eſt, quod, ſi abſciſſæ AP & AQ dicantur x, eiſdem reſpondere duas ſemiordinatas PM & QN, per quas y in æquatione explicari poteſt. Ducatur alia tr, quæ eandem curvam ſecat in punctis m & n: habebimus denuo duas ſemiordinatas pm & qn, per quas explicatur y in æquatione data. Patet autem abſciſſam unam PM continuo creſcere, & alteram QN continuo decreſcere, donec punctis M & N in contactu coincidentibus, in æquatione data una alteri fiat æqualis. Ad hæc qui animum advertit, nullo negotio deprehendet, quomodo ad methodum iſtam pervenire licuerit. Patebit autem ſuo loco, ſubtangentem per hanc methodum prodire eandem in ſectionibus conicis, quæ invenitur per calculum differentialem. Etſi autem hæc methodus videatur univerſalis, ad tantas tamen in curvis altioribus calculi perplexitates deducit, quæ vix videntur ſuperabiles. Unde in ea perficienda plurimum deſudarunt Geometræ, donec tandem ope calculi differentialis obtentum fuerit quod quærebatur.

§. 200. In Ellipſi $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420 *Analyſ.*). Quodſi hic ponas

$$x = 0$$

erit

$$ay^2 = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Quamobrem patet, 1°. in origine abſciſſarum curvam ſecare rectam poſitione datam, ad quam refertur.

Si fiat

$$x = a$$

erit

$$ay^2 = a^2b - a^2b$$
$$= 0$$

adeoque denuo $y = 0$

Unde liquet, 2°. curvam quoque ſecare rectam, ad quam refertur, ſi abſciſſa ſit datæ a æqualis, adeoque concavitatem obvertere eidem rectæ: ex quo porro ſequitur, cum ex altera parte eodem modo ſeſe habeant, quæ modo reperimus, curvam eſſe in ſe redeuntem.

Fiat

Fiat $b = a$

erit $ay^2 = a^2x - ax^2$

$$y^2 = ax - x^2$$

3°. Æquatio adeo ad ellipſin degenerat in æquationem ad circulum, ut circulus pro ſpecie quadam ellipſeos haberi poſſit, nacturus nomen ellipſeos æquilateræ, niſi jam antea nomine circuli inſignita fuiſſet hæc curva.

Quodſi a ponatur infinita, erit in æquatione ad ellipſin

$$\frac{bx^2}{a} = 0$$

adeoque $y^2 = bx$

Cum adeo æquatio ad ellipſin degeneret in æquationem ad parabolam, ideo liquet 4°. In locum ellipſeos, cujus axis infinitus eſt, ſurrogari poſſe parabolam eandem cum ellipſi parametrum habentem.

Quodſi quis hæreat in infinitate axis elliptici, & in eo, quod hinc colligatur $\frac{bx^2}{a} = 0$; is evolvat, quæ in Ontologia de infinito mathematico demonſtravimus.

§.201. Eodem modo in hyperbola quoque generalia quædam ex æquatione ejus colliguntur. Æquatio ad hyperbolam eſt: $ay^2 = abx + bx^2$, ſeu $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$.

Sit $x = 0$

erit $y^2 = 0$

$$y = 0$$

Patet ergo 1°. in origine abſciſſarum curvam ſecare rectam poſitione datam, ad quam ea refertur.

Sit $x = a$

erit $y^2 = ab + a^2b : a$
$= ab + ab = 2ab$

$$y = \sqrt{2ab}$$

Unde liquet 2°. ſi abſciſſa fuerit axi transverſo æqualis, ſemiordinatam fore mediam proportionalem inter axem transverſum & duplam parametrum.

Sit $x = b$

erit $y^2 = b^2 + \frac{b^3}{a}$

$$y = \sqrt{(b^2 + \frac{b^3}{a})}$$

Patet adeo 3°. ſi abſciſſa fuerit parametro æqualis, ſemiordinatam eſſe mediam proportionalem inter parametrum & compoſitam ex parametro & tertia proportionali ad axem transverſum & parametrum.

Sit alia abſciſſa v, alia ſemiordinata eidem reſpondens z; erit per naturam curvæ

$$z^2 = bv + \frac{bv^2}{a}$$

Quare ſi $v > x$

erit $bv > bx$

$$\frac{bv^2}{a} > \frac{bx^2}{a}$$

$$bv + \frac{bv^2}{a} > bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$y^2 > z^2$$

$$y > z$$

Patet itaque 4°. creſcente abſciſſa creſcere ſemiordinatam; adeoque curvam continuo magis magiſque ab axe recedere; conſequenter in infinitum continuari.

Quodſi æquationem pro hyperbola cum generali pro omnibus algebraicis conferre volueris; cum ſit

$$ay^m + bx^n + cx^r\, y^s + df = 0$$

$$ay^2 - abx - bx^2 = 0$$

erit $cx^r\, y^s + df = 0$

$$ay^m = ay^2$$

$$a = a\,,\; m = 2$$

$bx^n = -abx$ $\quad bx^n = -bx^2$

$b = -ab,\, n = 1$ $\quad b = -b,\, n = 2$

Reliqua in ipſa Analyſi reperiuntur.

§. 202. Enimvero applicemus eandem methodum ad æquationem pro hyperbola intra aſymptotos. Quoniam $xy = ab$,

erit $x = \frac{ab}{y}$

Fiat, $x = 0$

erit $\frac{ab}{y} = 0$

adeoque, $y =$ infinit.

Patet itaque 1°. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe infinitam.

Similiter cum ſit $y = \frac{ab}{x}$

Si ponamus $x =$ infinit.

erit $\frac{ab}{x} = 0$

adeoque $y = 0$

Unde liquet 2°. rectam, in qua ſumuntur abſciſſæ cum curva non concurrere niſi intervallo infinito, ſeu ab eadem non diſtare niſi intervallo infinite parvo; quatenus $a\, b$ quantitas ordinaria per infinitam diviſa dat particulam infinite parvam, quæ reſpective nihilum eſt.

Sit jam alia abſciſſa v, ſemiordinata alia z; erit per naturam curvæ

$$z = \frac{ab}{v}$$

Ponamus $v > x$

erit $\frac{ab}{v} < \frac{ab}{x}$

adeoque $z < x$

Videmus ergo 3°. creſcente abſciſſa decreſcere ſemiordinatam; conſequenter lineam curvam continuo magis magiſque ad eam appropinquare rectam, in qua ſumuntur ſemiordinatæ.

Quoniam itaque hæc cum curva non concurrit niſi infinito intervallo, aut potius ab eadem non diſtat niſi quantitate infinite parva, quando illa

illa in infinitum continuatur (*vi num.* 2); & in origine abſciſſarum ſemiordinata infinita (*vi num.* 1); curva continetur inter duas rectas, quæ in infinitum excurrunt, & ad quas curva continuo propius propiuſque accedit, nunquam tamen eaſdem ſecat. Continetur adeo inter aſymptotos. Ex hoc exemplo apparet, quomodo ex æquatione colligatur, quod curva, quæ per eam definitur, habeat aſymptotos.

§. 203. Sed demus etiam exemplum in curva quadam ſuperioris generis, cujus æquatio perplexa videtur. Sit itaque $x^4 + 2bx^3 + y^2 x^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2$, quam invenimus pro Conchoide prima ſive ſuperiore (*§.* 538 *Anal.*); erit

$$y^2 x^2 = a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2 - x^4 - 2bx^3 - b^2 x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

Fiat $x = 0$

erit $x^2 - 2bx = 0$

$$\frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} = \frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0} = \text{infin.}$$

adeoq; $a^2 - b^2 = 0$, reſpectu $\dfrac{a^2b^2}{0^2} + \dfrac{2a^2b}{0}$

Quare $y^2 =$ infin.

$y =$ infin.

Patet itaque 1°. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe infinitam, conſequenter curvæ aſymptotum.

Fiat $x = a$

$$\text{erit } y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2} + \frac{2a^2b}{a} + a^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$= b^2 + 2ab + a^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$= 0$$

$y = 0$

Quando igitur 2°. abſciſſa fit ipſi a æqualis, ſemiordinata nulla eſt, adeoque curva rectam, in qua ſumuntur abſciſſæ, ſecat.

Quoniam y ex infinita nulla evadit, dum x ex nihilo degenerat in a; neceſſe eſt 3°. creſcente abſciſſa decreſcere ſemiordinatam.

$$\text{Quia } y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + 2\frac{a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

$$= \left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (x+b)^2$$

$$y = \sqrt{\left(\left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (x+b)^2\right)}$$

Eſt igitur y latus trianguli rectanguli, cujus hypothenuſa componitur ex $\frac{ab}{x}$ & a, crus unum vero ex b & x. Unde liquet, 4°. Si ſemiordinata infinita dicatur regula, recta b diſtantia poli a regula, recta vero a diſtantia verticis a regula, quemadmodum termini in Conchoide recepti ſunt (§. 535 *Anal.*); ſemiordinatam eſſe crus trianguli rectanguli, cujus hypothenuſa componitur ex tertia proportionali ad abſciſſam (ejus origine in regula conſtituta), diſtantiam regulæ a vertice & ejuſdem a po-

a polo diſtantiam, atque diſtantia ejuſdem regulæ a vertice, crus vero alterum ex abſciſſa & diſtantia regulæ a polo.

Tab.II. Fig.24. Hinc 5°. ex data abſciſſa BP, diſtantia regulæ a polo BC, & a vertice BA, reperitur ſemiordinata PM, ſi ex P intervallo BA interſecetur regula in O, & recta PO producatur, donec perpendiculari CH in polo erecta in H occurrat; tandemque intervallo CH interſecetur PM ad AB perpendicularis in M.

Quoniam enim $PB = x$, $PO = a$, $BC = b$; erit $OH = \frac{ab}{x}$, conſequenter $PH = \frac{ab}{x} + a$, trianguli rectanguli PCH hypothenuſa. Quamobrem cum porro ſit $CP = b + x$; erit $CH = \sqrt{((\frac{ab}{x} + a)^2 - (b+x)^2)} = y$, conſequenter quia $PM = CH$; erit PM ſemiordinata quæſita. Quodſi fiat $CL = PB$ & $CN = BA$, ac LN ad BC perpendicularis; recta CN producta ſtatim reſecabit ſemiordinatam PM.

Manifeſtum itaque eſt, quomodo ex æquatione eruatur modus determinandi geometrice punctum curvæ reſpondens cuilibet abſciſſæ, quamvis æquatio primo intuitu videatur admodum perplexa. Ceterum in applicatione methodi generalis adhibentur varia artificia, ex anterioribus equidem nota, quæ tamen tyroni non ſtatim ſuccurrunt. Quamobrem hinc eluceſcit, quod jam ſæpe inculcavimus, artem exercendam eſſe per exempla, non per regulas particulares: etſi particulares annotandæ ſint, ubi occurrunt; ut tanto facilius ſuccurrant, quando denuo iiſdem opus habemus. Non addimus de conchoide alia, quæ ex ejus æquatione deduci poterant, ne ſimus juſto prolixiores.

§. 204. Etſi ex dictis appareat, ductum curvæ hac methodo facillime indagari poſſe, ut de reliquis taceamus; non tamen exiſtimandum eſt, idem in qualibet promiſcue curva eadem facilitate ſuccedere. Etenim ſi in æquationibus altioribus occurrunt termini, quos duæ indeterminatæ ingrediuntur, nec earum ſeparatio in promptu eſt, quemadmodum vidimus in conchoide (§. 203); hærebit aqua. Sit ex. gr. $y^3 - axy = x^3$. Quodſi ponamus $x = a$, prodibit $y^3 - a^2y = a^3$, æquatio cubica affecta, ex qua radicis extractio difficilis & cujus constructio geometrica per inferiora demum patet. Similiter, quamvis per calculum algebraicum, quæ quæruntur, haud raro mira facilitate eruantur, quemadmodum ſupra vidimus in circulo (§. 193), & plurima capitis præſentis problemata loquuntur, quæ de ſectionibus conicis propoſuimus; ſubinde tamen calculus prolixus & intricatus evadit, prouti videre licet in probl. 193, 195, 209, (§. 449, 454, 492 *Analyſ.*)

§. 205.

§. 205. Nos ſectiones conicas conſideravimus in plano & æquationes aſſumſimus, quæ eas definiunt. Hinc vero nondum conſtat, curvas iſtas eſſe ſectiones coni, niſi ſupponas theoriam ſectionum conicarum a Veteribus traditam, tanquam cognitam. Quamobrem conſultum eſſe duximus analytice demonſtrari, ſectione coni prodire has ipſas curvas, quas in plano conſideravimus, & quarum deſcriptiones, proprietates aliaque ſymptomata ex æquationibus aſſumtis deduximus (§. 511 & ſeqq. *Anal.*). Poteramus æquationes, quas aſſumſimus, eruere ex proprietatibus, quas ex ſectione coni derivavimus: ſed cur hoc minime fecerimus, jam monuimus (§. 514 *Anal.*). Ex. gr. pro parabola ex ſectione coni deduximus.

$$y^2 : q^2 = x : z$$

ubi y & q denotant ſemiordinatas, x & z autem ipſis reſpondentes abſciſſas.

Quoniam etiam eſt

$$y^2 : x = q^2 : z$$

erit $y^2 : ax = q^2 : az$;

Quare ſi ponamus, conſtantem a talem aſſumi, ut ſit $y^2 = ax$; evidens eſt fore etiam $q^2 = az$, atque adeo in omni puncto curvæ eſſe quadratum ſemiordinatæ æquale rectangulo ex abſciſſa in eandem rectam conſtantem. Poſſe autem a talem aſſumi, ut ſit $y^2 = ax$ patet, quia a tertia proportionalis eſt ad abſciſſam & ſemiordinatam. Idem etiam hoc modo patere poterat. Si alternando eſſe debet $y^2 : x = q^2 : z$ (§. 173 *Arithm.*) cum ratio non ſit niſi homogeneorum (§. 126 *Arithm.*) x & z denotare debent rectangula, quorum latus unum unius eſt x, latus unum alterius z, latus vero alterum unitas ſeu recta, quæ pro unitate ſumitur (§. 375 *Geom.*), utique eadem utrobique (§. 178 *Arithm.*). Quodſi ergo hæc recta efficere debet rectangulum $1\,x$, æquale quadrato y^2, unitas iſta degenerare debet in tertiam proportionalem ad x & y, quam fore eandem cum tertia proportionali ad q & z per modo demonſtrata patet. Unde manifeſtum eſt, æquationem ad ſectionem coni præſentem eſſe $y^2 = ax$, aut, ſi $a = 1$, $y^2 = x$. Notandum adeo hic eſt, ſi in æquationibus non appareat lex homogeneorum obſervata, termini pauciorum dimenſionum coëfficientem eſſe unitatem, ſeu rectam quandam determinatam, quæ pro unitate ſumitur. Cum autem quælibet recta pro unitate aſſumi poſſit, unitatem eſſe eandem non ſumendum, ſed demonſtrandum eſt. Ita ſumere licet $y^2 = x$, ubi coëfficiens ipſius x eſt 1; ſumere quoque licet $q^2 = z$, ubi coëfficiens ipſius z eſt 1. Enimvero non licet ſumere coëfficientes ipſarum x & z eſſe æquales; ſed hoc demonſtrandum, quemadmodum ex modo dictis claret. Nihil hic ſupponitur, quod non ſit ex notione numeri rationalis integri manifeſtum, quem in communi Arithmetica

metica practica conſideramus; modo ad communia perpendenda omnem attentionem afferamus: qua neglecta, haud raro hærent tyrones, ubi ſumuntur quæ per ea patent, & ad ardua magis applicantur; niſi fide Mathematicorum tanquam vera admittere velint, quorum rationem minime capiunt.

§. 206. Id quoque notandum eſt, in æquationibus, per quas definiuntur curvæ, originem abſciſſarum non ſemper aſſumendam eſſe in aliquo curvæ puncto, etiam ſi recta, ad quam curva refertur, eandem ſecat vel tangit; ſed eandem eſſe poſſe quodvis punctum aliud in eadem recta aſſumtum. Ita ex. gr. in circulo, ſi peripheriæ puncta referuntur
Tab. I. Fig. 25. ad diametrum AB, origo abſciſſarum ſtatui poteſt in centro C, ut ſit PC $= x$, PM $= y$ & radius AC $=$ MC $= a$. Quoniam enim $MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebimus $a^2 = y^2 + x^2$, adeoque $y^2 = a^2 - x^2$; quæ æquatio non minus circulum definit, quam altera, quam ſupra dedimus, & unde circuli geneſin atque proprietates, cum aliis ſymptomatis, deduximus (§. 193). Atque ex hac æquatione eadem deducere licet, quæ ibidem ex altera deduximus, ſi tanquam data ſupponatur, ut adhuc ignoretur, ad quamnam curvam ea ſit. Etenim ſi hic ponas

$$x^2 = 0$$

erit $$y^2 = a^2$$

$$y = a.$$

Unde liquet 1°. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe conſtanti a æqualem.

Si vero ponas $x = a$

erit $$y^2 = a^2 - a^2$$
$$= 0$$

$$y = 0$$

Unde patet 2°. ſi abſciſſa fiat ſemiordinatæ, quæ in origine abſciſſarum eſt (*vi num.* 1), æqualis, curvam ſecare rectam poſitione datam, ad quam refertur.

Quoniam $a^2 = y^2 + x^2$; ideo liquet, 3°. Hypothenuſam trianguli rectanguli, cujus crura ſunt abſciſſa & ſemiordinata, ad quodvis punctum curvæ, eſſe eandem; conſequenter cum hæc hypothenuſa conſtanter ex origine abſciſſarum ducatur, rectas omnes ex origine abſciſſarum ductas ad curvam eſſe inter ſe æquales. Æquatio adeo nos deducit ad geneſin circuli non minus, quam ad definitionem ejus nominalem; &, ubi definitio circuli ex elementis nota ſupponitur, hinc diſcimus, æquationem eſſe ad circulum. Immo poteſt origo abſciſſarum etiam extra centrum ſtatui, veluti in L, ubi AL conſtans eſt, & abſciſſa LP. Sit enim AL $= b$, AB $= a$, LP $= x$, PM $= y$, erit AP $= b + x$, PB $= a - b - x$, conſequenter ob Tab. Fig.

$$PM^2 = AP \cdot PB$$
$$y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$$

Quodſi

Quodſi hic ponas

$$x = 0$$

erit $y^2 = ab - b^2$

$$y = \sqrt{(ab - b^2)}$$

Unde liquet, 1°. in origine abſciſſarum ſemiordinatam eſſe mediam proportionalem inter rectam quandam conſtantem b & differentiam ejus a conſtante alia a.

Quodſi fiat

$$x = a$$

erit $y^2 = ab - b^2 + a^2 - 2ab - a^2$
$= -ab - b^2$

Patet itaque 2°. abſciſſam nunquam fieri poſſe ipſi a æqualem, ſed ſemper eadem minorem eſſe debere.

Sit $x = a - b$

erit $y^2 = ab - b^2 - 2ab + 2b^2 + a^2$
$- ab - a^2 + 2ab - b^2$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Patet adeo, 3°. ſi abſciſſa fiat differentiæ quantitatum conſtantium æqualis, curvam ſecare rectam poſitione datam.

Sit $x = \frac{1}{2}a - b$

erit $y^2 = ab - b^2 - ab + 2b^2 + \frac{1}{2}a^2 - ab$
$- \frac{1}{4}a^2 + ab - b^2$

$$y^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{2}a$$

Videmus itaque 4°. ſi abſciſſa fiat $\frac{1}{2}a - b$, ſemiordinatam eſſe $= \frac{1}{2}a$.

Quodſi ponamus

$$b = 0$$

erit $y^2 = ax - x^2$

Æquatio igitur degenerat in æquationem ordinariam pro circulo (§. 193).

Licet etiam originem abſciſſarum ſtatuere extra circulum, veluti in N, ut ſit, NP $= x$, adeoque ſi NA $= b$, AP $= x - b$. Et ſimiliter abſciſſas computare licet in aliqua a centro C diſtantia, ut earum origo vel ſit inter A & C, vel inter C & B. Hæc ſi notent tyrones, in doctrina de locis geometricis & conſtructione æquationum altiorum nihil prorſus ſentient difficultatis. Patebit etiam, quomodo ad formulas generales plana ſit via. Quæ vero hic annotamus de relatione curvarum ad rectam, quæ curvam in puncto quodam ſecat, eadem quoque locum habent, ubi eandem referre libuerit ad rectam extra curvam quomodocunque ſitam. Nec oleum atque operam perdunt tyrones, ſi in omni caſu poſſibili æquationem ad circulum inveſtigent, ut methodum definiendi curvas per æquationem intimius inſpiciant beneficio exempli omnium facillimi & notiſſimi, idem imitaturi in curvis aliis, quod in circulo fecere.

§. 207. Enimvero abunde ea documus, quæ in hac methodo lucem accendunt tyronibus, ne in tenebris

bris palpitent ad magis ardua progreſſi, quemadmodum vulgo accidere ſolet. Sed dicenda quoque nonnulla ſunt de lineis non algebraicis, quarum nonnullæ ſub finem capitis definiuntur. Definimus Quadratricem DINOSTRATIS, per $ay=bx$, ubi x denotat arcum AN, a Quadrantem AB, b radium AC, & y portionem radii AP, quæ ad radium eandem rationem habet, quam habet arcus AN ad Quadrantem. Quamobrem etſi æquatio alias definiat triangulum rectangulum æquicrurum; conſequenter in ea ſpectetur relatio rectæ, quæ hypothenuſa eſt ad crus unum, in quo ſumuntur abſciſſæ; præſenti tamen in caſu æquatio, quæ eadem videtur, prorſus diverſa eſt. Etenim in caſu priori, quando eſt ad triangulum rectangulum æquicrurum, a & x denotant lineas rectas; in poſteriori autem, quando ad Quadratricem eſt, a deſignat quadrantem; x arcum circuli quadrante minorem. Æquatio igitur algebraica non eſt; niſi cum in ea ſingulæ literæ denotent totidem rectas. Hoc tamen non obſtante æquationes iſtiuſmodi, quas curvæ lineæ ingrediuntur, tractari poſſunt eodem modo, quo ante tractavimus algebraicas: quod ſuccedere ipſa præſens æquatio docere poteſt. Etenim

Tab. VI. Fig. 67. Algeb.

Si fiat $x = 0$

erit $ay = 0$

$y = 0$

Atque adeo patet, quadratricem concurrere cum radio in origine abſciſſæ.

Si $x = a$

erit $ay = ab$

$y = b$

Unde liquet, quamprimum x fit quadranti æqualis, rectam AP, quæ deſignatur per y, degenerare in radium.

Si $x = \frac{1}{2}a$

$ay = \frac{1}{2}ab$

$y = \frac{1}{2}b$

Evidens igitur eſt, dimidio quadranti reſpondere radium dimidium.

Eadem adeo eliciuntur, quæ per geneſin Quadratricis manifeſta ſunt.

Quod vero etiam alia ignota hinc deduci poſſint, ſuo patebit loco (§. 55 *Anal. infin.*): id quod omnino notandum, ne nullum in uſum æquatio iſta data videatur.

Singulare quid habet æquatio; quod non exprimat relationem ipſius curvæ ad rectam poſitionem datam per ſe, ſed relationem potius curvæ alterius, nimirum Quadrantis circuli, cujus ope determinatur punctum M; quod rectæ AP & arcui AN, hoc eſt duabus indeterminatis y & x reſpondet. Exprimit ſcilicet relationem arcus AN ad rectam AP, qualis eſſe debeat, ut ipſi AP reſpondeat punctum M in Quadratrice. Data enim hac relatione datur etiam punctum M.

Quo-

Quoniam vero $y = \frac{ab}{x}$, adeoque AP quarta proportionalis ad arcum AN, quadrantem AB & radium AC; determinatio puncti M dependet a rectificatione indefinita circuli, conſequenter a circuli quadratura. Ceterum Quadratrix inſinuat artificium reductionis conſtructionis curvarum ad curvas ſimpliciores, ſuppoſita harum quadratura vel rectificatione: neque enim in omnibus curvis rectificatio pendet a quadratura, prouti in circulo obtinet (*vi. theor.* 3. §. 128 *Anal.*), quemadmodum ſuo loco videbimus, ubi de quadratura & rectificatione curvarum agitur. Artificium hoc maximi momenti eſt in Analyſi infinitorum ad Geometriam ſublimiorem applicata, quemadmodum patet per problemata phyſico-mechanica, qualia in Elementis Mechanicæ occurrunt. Quamobrem conſultum eſt, ut tyrones, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, tempeſtive annotent, quomodo inventa Veterum recentioribus Geometris inſinuaverint artificia, aut ſaltem inſinuare potuerint, ſiquidem attentionem ſuam deficere non fuerunt paſſi.

§. 208. Notandum adhuc eſt, poſſe etiam curvas referri ad curvas alias poſitione datas, quemadmodum referuntur ad rectas poſitione datas, ita ut abſciſſæ ſumantur in curva poſitione data, quemadmodum ſumuntur in recta poſitione data: quod ut facilius intelligatur, dabo exemplum. Sit AMO parabola *Apolloniana* ſeu primi generis. Producatur ſemiordinata PM in N, donec recta MN habeat ad arcum parabolicum AM eam relationem, quam habet ſemiordinata PM ad ejus abſciſſam AP; evidens eſt, ſi arcus AM $= x$, MN $= y$ & recta quædam conſtans $= a$, fore $y^2 = ax$. Æquatio hæc ab æquatione ad parabolam in eo differt, quod x denotet arcum parabolicum AM, cum in æquatione ad parabolam denotet rectam AP. Ceterum eadem ex æquatione hac deducuntur, quæ ex æquatione ad parabolam, niſi quod theoremata ingrediatur arcus parabolicus. Nimirum cum ſit $y = \sqrt{ax}$; ſemiordinata MN eſt media proportionalis inter arcum parabolicum datum AM & rectam quandam datam conſtantem a, quæ tertia proportionalis eſt ad quemvis arcum parabolicum & ipſi reſpondentem ſemiordinatam. Et quemadmodum in parabola quadrata ſemiordinatarum habent rationem abſciſſarum, ita ſemiordinatæ curvæ ANR ſunt in ratione arcuum parabolicorum ipſis reſpondentium. Hoc artificio jam uſus eſt ARCHIMEDES in ſpiralibus qui eas retulit ad peripheriam circuli tanquam ad axem. Facile autem apparet, relationem ſemiordinatæ MN ad arcum AM exprimi poſſe per æquationem curvæ algebraicæ cujuſcunque alte- Tab. II. Fig. 22.

rius. Ita ſi arcus $AO = a$, $AM = x$, & $MN = y$; curva AMR definiri poteſt per æquationem $y^2 = ax - x^2$, quæ eſt æquatio ad circulum (§. 193).

Si ponamus $x = a$

$$y^2 = a^2 - a^2$$
$$y = 0$$

$$y = 0$$

Unde liquet punctum R cum puncto O coincidere, adeoque curvam AR parabolam AO ſecare in O.

Si fiat $x = \frac{1}{2}a$

$$y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$$
$$= \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{2}a$$

Patet itaque, ſi arcus parabolicus AO biſecetur, fore MN arcui dimidio æqualem.

Ponamus ex adverſo $y = \frac{1}{2}a$

erit $\frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$$
$$x - \frac{1}{2}a = 0$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

Unde manifeſtum eſt, in nullo alio puncto, quam in medio arcus AO arcum parabolicum AM rectæ MN æqualem eſſe.

§. 209. Præter ſectiones conicas definivimus potiſſimum eas curvas, quæ a Veteribus fuerunt inventæ, & quas recentiores Geometræ addiderunt, antequam Algebra ad Geometriam ſublimiorem applicaretur & doctrina curvarum amplificaretur. Veteres præter circulum, parabolam, hyperbolam & ellipſin conſiderarunt conchoidem, ciſſoidem, quadratricem, atque ſpirales, & recentiores addiderunt logarithmicam & cycloidem, cui deinceps acceſſit epicyclois. Tenendum nimirum eſt, Veteres non animum advertiſſe ad curvas, niſi quatenus problematis geometricis ſolvendis inſerviebant. Duo autem apud ipſos celebrabantur problemata; alterum ſcilicet de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas datas; alterum de quadratura circuli. In uſum prioris problematis ſolvendi Nicomedes invenit conchoidem, Diocles ciſſoidem: poſterius autem problema per ſpirales ſolvere tentavit Archimedes, per quadratricem Dinostrates. Recentius quadratura circuli tentata per cycloidem, ad cujus imitationem, ſi geneſin illius ſpectes, inventa epicyclois. Cum vero logarithmi eſſent inventi & tanta utilitate in Matheſin practicam recepti; in uſum logarithmorum reperta eſt logarithmica, ad cujus imitationem deinceps excogitata logiſtica ſpiralis. Noſtrum erat lineas curvas veteribus celebratas non prætermittere ſilentio, qui lectorem noſtrorum Elementorum ad Matheſeos univerſæ cognitionem manuducere intendimus; præſer-

præſertim cum inventis recentioribus anſam dederint, quæ a Veteribus inventa fuerunt, quemadmodum jam hinc inde annotavimus. Logarithmica autem & cyclois uſum præclarum nactæ ſunt in problematis phyſico-mechanicis, prouti ſuo loco in Elementis Mechanicæ oſtendimus. Earundem itaque mentionem injicere debuimus. Habet quoque uſum prorſus eximium epicyclois in Mechanica practica, & aliis inventis recentioribus anſam dedit. Quamobrem nec hancce ſilentio præteriri fas erat. Quadratricem *Tſchirnhauſianam* & Lineam ſinuum, tangentium atque ſecantium non alio fine adjecimus, quam ut conſtaret, quomodo curvarum geneſes excogitari poſſint: quem in finem etiam adjecimus problemata ultima hujus capitis (*§. 579 & ſeqq. Anal.*). Ex duobus tamen ultimis (§. 581, 583 *Anal.*) ſimul diſcimus, quomodo curvæ ſuperiorum generum deſcribi poſſint ope curvarum generum inferiorum. Ecce igitur tibi rationem, cur haſce potiſſimum curvas in præſente capite conſideraverimus.

§. 210. Poſtquam oſtendimus, quomodo Algebra utamur in eruendis curvarum deſcriptionibus, proprietatibus, aliiſque ſymptomatis; ad earum uſum in conſtruendis problematis exponendum progredimur. Primum itaque docemus, quomodo problemata indeterminata conſtruantur. Atque eo fine capite ſexto agitur de locis geometricis. Doctrinam hanc invenere veteres Geometræ; ſed Recentiores ad eandem Algebram applicare cœperunt; ubi conſtabat interſectione duorum locorum conſtrui æquationes altiores. Problemata indeterminata, quemadmodum vidimus ſuperius cap. 2, ſect. 2, duas habent quantitates incognitas, quarum, una pro arbitrio aſſumta, determinatur altera; quemadmodum vidimus in curvis algebraicis aſſumta abſciſſa pro arbitrio determinari ſemiordinatam: id quod etiam obtinere, ſi recta quædam poſitione data referatur ad rectam aliam itidem poſitione datam, ex iis liquet, quæ in Geometria de lineis proportionalibus inveniendis demonſtrata ſunt. Ita in triangulo rectangulo ABC, habet PM ad AP rationem conſtantem ipſius BC ad AB; atque adeo ſumta AP pro arbitrio, per rectam AC determinatur PM. (Tab. II. *Fig. 16.*) Dum itaque problema indeterminatum conſtruimus, omnes reperimus rectas poſſibiles, quæ eandem datam relationem ad ſe invicem habent. Unde ſi ad rectam poſitione datam applicentur parallelæ, & quæritur in recta poſitione data punctum, quod ſit origo unius indeterminatæ, atque linea ſecans omnes iſtas parallelas, ut ad ipſas reſpondentes portiones in linea poſitione data habeant eandem relationem datam; problemati ſatisfactum. Hinc vero patet, cur linea iſta dicatur Lo-

cus;

cus; quia nempe continet omnes lineas rectas, quæ in problemate in locum indeterminatarum ſubſtitui poſſunt; ſeu quia in ea ſunt ſingula puncta, quibus terminantur rectæ, una indeterminatarum pro arbitrio aſſumta, determinandæ. Ex. gr. in triangulo rectangulo hypothenuſa AC eſt locus omnium rectarum proportionalium cruribus AB & BC: etenim continuatis rectis AB & AC in infinitum, intra crura hujus anguli continentur omnes iſtæ proportionales, quarum una ſumitur in AB, altera vero determinatur per rectam AC; & in recta AC ſunt omnia puncta M, quibus terminantur indeterminatæ ad AB normales, ut fiant aſſumtis AP in data ratione proportionales. Ratio eſt relatio ſimpliciſſima, quam exhibet recta ad rectam aliam relata. Relationes vero ceteræ conſtantes repræſentantur per lineas curvas; qualis eſt in circulo, ut quadratum ſemiordinatæ ſit æquale rectangulo ex ſegmentis diametri. Videmus adeo æquationes, quæ duas involvunt lineas incognitas, geometrice conſtrui poſſe; quatenus eædem exprimunt relationem conſtantem, quam habent ſingula lineæ curvæ puncta ad rectam poſitione datam, ſeu quatenus eædem ſunt æquationes ad curvam quandam lineam, quam definiunt. Atque ideo æquationes, quas ante diximus æquationes ad curvam, hic vocantur locales.

§. 211. Monuimus in anterioribus, curvam referri poſſe ad quamlibet rectam poſitione datam, ſive ea curvam ſecet in vertice, ſive in alio quocunque puncto, ſive eandem non ſecet, ſed tota extra eam cadat intervallo vel nullo, vel dato ab eadem diſtans, & ſive axi fuerit parallela, ſive ad eundem obliqua. Hinc determinantur omnes caſus poſſibiles æquationum localium: quæ quomodo reperiantur, ex iis patet, quæ de circulo paulo ante oſtendimus. Cum Slusius æquationum localium uſum in conſtruendis æquationibus cubicis & biquadraticis docuiſſet; Philippus de la Hire Algebram ad loca geometrica applicavit, & in omni caſu æquationes locales ad rectam, circulum, & ſectiones conicas inveſtigare docuit: quod idem fecit Ozanamus. Enimvero cum ſic plures prodirent æquationes particulares ad eandem lineam; Joannes Craigius æquationes generales inveſtigavit ad ſectiones conicas, quæ omnes particulares eminenter continent: cujus exemplum ſecutus Hospitalius. Nobis quoque placuit generalia invenire theoremata conſtruendi omnes æquationes locales ad rectam & ſectiones conicas; cum per ea conſtructiones problematum indeterminatorum, via vere analytica, erui poſſint. Rem penitius examinanti conſtabit, non aliis hic opus eſſe artificiis, quam quæ paulo ante inſinuavimus; cum de æquationi-

tionibus ad circulum ageremus. Theoremata generalia inveniuntur, ſi inveſtigentur theoremata in caſu maxime compoſito; in quo linea, ad quam refertur curva, ponitur eſſe ad axem obliqua, & origo abſciſſarum diſtare a vertice, vel centro curvæ, ſi quod habet, aliquo intervallo. Etenim ſi hic quædam lineæ conſtantes ſupponantur nullæ, in æquatione termini evaneſcunt, qui in eas ducuntur, ſicque prodit æquatio in caſu ſimpliciori. Hoc fieri debere obſervavimus ſuperius, cum in circulo origo abſciſſarum ſtatuere-
Tab. II. Fig. 25. tur in L intra verticem A & centrum C. Vidimus enim ſi ponatur AL=o, æquationem in eo caſu repertam $y^2 = ab-b^2 + ax-2bx-x^2$, degenerare in æquationem ad circulum $y^2=ax-x^2$, in caſu ſimpliciſſimo, quando origo abſciſſarum eſt in A. Enimvero non modo æquatio magis compoſita, hoc pacto, reducitur ad ſimpliciorem; verum etiam ſchema, quod exhibet conſtructionem illius æquationis, degenerat in ſchema, quod hujus repræſentat conſtructionem.
Tab. VII. Fig. 75. Algeb. Ex. gr. ſi fuerit LH=o, linea DH incidit in DL, adeoque pars ſchematis, quæ relinquitur, caſum iſtum repræſentat, in quo recta poſitione data DL, ad quam refertur curva AMB, eſt axi AS parallela. Quodſi porro fiat KD=o, relinquitur pars ſchematis, quæ repræſentat caſum, in quo abſciſſæ computantur in axe ultra verticem continuato KS, & origo earum ſtatuitur in aliqua a vertice diſtantia K. Denique ſi etiam ponatur AK=o, prodit ſchema caſum ordinarium exhibens, in quo abſciſſæ ſumuntur in axe AS, & origo abſciſſarum in vertice. Methodus adeo qua utimur, non modo æquationes locales omnes ad eandem curvam una æquatione includit, eodem artificio, quo æquationes omnes ad curvas algebraicas ad æquationem unicam generalem reduximus (§. 385 *Analyſ.*); ſit ita quod ibidem aliud præterea artificium adhibendum erat, quo hic non habemus opus; quia ibidem æquationes omnes una formula comprehendendæ, non erant ejuſdem gradus, quemadmodum in præſenti obtinet; ſed etiam unico ſchemate omnium æquationum localium conſtructiones comprehendit. Quænam hæc ſit prærogativa præ methodo communi, qua ſinguli caſus ſigillatim expenduntur; facillimo negotio animadvertet, qui, quæ de locis geometricis tradimus, cum iis conferre voluerit, quæ de iiſdem docet DE LA HIRE, vel OZANAMUS.

§. 212. Unum adhuc ſupereſt, quod de theorematis hiſce generalibus obſervandum, ne eorum applicatio turbet tyrones. In ſchemate noſtro ſupponimus, originem abſciſſarum removeri ultra verticem, ita ut abſciſſa linea quadam data excedat abſciſſam ordinariam. Enimvero vidimus ſupra, originem earundem Tab. II. Fig. 25.

etiam ſtatui poſſe ex parte altera, veluti in L, ita ut abſciſſa LP deficiat ab abſciſſa ordinaria linea quadam data AL. Similiter rectam axi parallelam, vel ad eum obliquam ponimus ultra eundem, ut augeat ſemiordinatam ordinariam PM recta quadam data; cum tamen etiam hæ lineæ ita duci poſſint ex parte oppoſita, ut ſemiordinata QM vel RM deficiat ab ordinaria PM, linea quadam data PQ, vel PR. Æquatio igitur localis generalis non videtur omnes æquationes particulares continere, nec ſchema illi reſpondens comprehendere omnia ſchemata, quæ harum conſtructionem exhibent. Dubium hoc ut tollatur, noſtrum eſt docere, qua ratione innotuerit, quomodo iidem quoque caſus in eo, ad quem computavimus æquationem, contineantur. Supra reperimus æquationem ad circulum, ſi origo abſciſſarum fuerit in L, $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$. Ponamus jam originem abſciſſarum eſſe in N, ut ſit $NA = b$, $NP = x$, ſitque $AB = a$, $PM = y$; erit $AP = x - b$, $PB = a + b - x$.

Ob $PM^2 = AP . PB$

prodibit

$$y^2 = ax - x^2 + 2bx - ab - b^2$$

Æquationem hanc a ſuperiori non differre videmus niſi ſignis & hanc diverſitatem hinc oriri obſervamus, quod ibi abſciſſa ordinaria AP ſit $x - b$, hic vero $b - x$. Quodſi ergo æquationes iſtæ redigantur ad nihilum, quemadmodum in hac doctrina fieri ſolet; habebimus in eo caſu, ubi abſciſſarum origo in N,

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - ax + ab &= 0 \\ - 2bx + b^2 & \end{aligned}$$

in caſu autem oppoſito, ubi origo abſciſſarum in L,

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - ax - ab &= 0 \\ + 2bx + b^2 & \end{aligned}$$

Quare ſi duas haberes formulas, valor ipſius b in caſu particulari dato ſemper eliceretur poſitivus, cum in priori coëfficiens negativus comparandus eſſet cum negativo $-2b$, in poſteriori coëfficiens poſitivus cum $+2b$. Quodſi vero æquationem, quæ cum formula poſteriori conferri debebat, cum priori componis, adeoque quantitatem poſitivam cum negativa, neceſſe eſt ut valor ipſius b prodeat negativus. Si $-b$ ſubſtituas in locum $+b$ in æquatione altera; pro $+2bx$ habebis $-2bx$, pro $-ab$ vero $+ab$; ducendo ſcilicet $-a$ in $-b$: aſt b^2 retinet ſignum ſuum, quia $-b$ in $-b$ efficit $+b^2$. Atque ſic æquatio poſterior degenerat in priorem; ut adeo prior in utroque caſu adhiberi poſſit; modo notes, quoties in caſu particulari lege comparationis valor ipſius b elicitur negativus, toties ſumendam eſſe rectam eidem reſpondentem ex parte oppoſita, ut ſit $AL = b$. Idem cum eodem modo obtineat quoad diſtantiam parallelæ axi ab eodem PQ; manifeſtum eſt, cur una formula ſatisfaciat in caſu utroque, modo obſervetur, quod de valore negativo in

in æquationis particularis cum generali comparatione prodeunte annotavimus. Idem adhuc clarius patet in parabola. Etenim ſi fuerit SA $= b$, SP $= x$, adeoque AP $= x - b$; erit ex natura Parabolæ, ſi paparameter fuerit a,

Tab.II. Fig. 22.

$$y^2 = ax - ab$$

ſeu $y^2 - ax + ab = 0$

Quodſi fuerint omnia ut ante, ſed AL $= b$, adeoque AP $= b + x$, erit

$$y^2 = ax + ab$$

ſeu $y^2 - ax - ab = 0$

Hic denuo patet, æquationem poſteriorem non differre a priori, niſi diverſitate ſignorum in iis terminis, quorum coëfficiens eſt b; in priori enim habemus $+ ab$, in poſteriori $- ab$. Quamobrem ubi in applicatione formulæ generalis, quæ ad caſum priorem ſpectat, confers terminum negativum æquationis ad caſum poſteriorem ſpectantis cum poſitivo, qui ex formula caſus prioris ſumitur; valor utique prodire debet negativus pro AL. Patet etiam hic, ſi in æquatione poſteriori pro $+ b$ ſubſtituas $- b$, docendo $- b$ in $- a$, prodire $+ ab$, adeoque æquationem poſteriorem degenerare in priorem; quemadmodum ex adverſo prior abit in poſteriorem, ſi in priori ſubſtituas $- b$ pro $+ b$. Quodſi enim ducas $+ a$ in $- b$, prodibit $- ab$, quemadmodum habet formula poſterior. Videmus adeo, quomodo innotuerit, eandem formulam ſubire poſſe vicem duarum, ſi valoris negativi quantitas ſumatur ex parte oppoſita. Immo videmus, perinde eſſe, ſive in formula generali abſciſſam & ſemiordinatam ſtatuas ordinariis AP & PM majorem, ſive minorem; ut adeo nulla ratio intrinſeca fuerit electionis, ſed tantummodo extrinſeca: quod ideo monemus, ne quis in Philoſophia hinc petat argumentum contra principium rationis ſufficientis in electionis caſu. Utimur eodem artificio, non ſine maxima utilitate, in Analyſi infinitorum ſeu calculo differentiali & integrali, quemadmodum ſuo loco videbimus; ubi ex eadem ratione valorem negativum ſumimus pro magnitudine ex parte oppoſita ſita. Abſit itaque ut tibi perſuadeas, hoc fieri ex natura quantitatum privativarum; & hinc colligas, quantitates privativas eſſe veras quantitates, ſeu in numero poſitivarum; cum ſatis conſtet eas non denotare niſi defectum quantitatis veræ, ſeu poſitivæ, per poſitivam, quæ deficit, æſtimabilem; quemadmodum pecunia, quæ debetur, non eſt parata pecunia, quam habes, etſi per paratam pecuniam æſtimetur, quæ ſolvenda, ut debitum tollatur. Nullæ revera ſunt quantitates negativæ, etſi utiliter in uſum calculi univerſalis fingantur. Cavendum omnino eſt, ne entia ficta Mathematicorum confundantur cum realibus in detrimentum ſcientiæ philoſophicæ.

§. 213. Hinc ſimul patet ratio,

cur

cur in caſu particulari demonſtraturi conſtructionem ex formula generali elicitam; eruendo ex hac æquationem ad conſtruendum propoſitam; non utamur valoribus negativis, qui per comparationem cum formula generali prodeunt, ſed iis ſubſtituamus poſitivos: id quod fieri non licebat, ſi per naturam quantitatum valor eſſet negativus. Valor negativus v. gr.
Tab. II. Fig. 25. rectæ AL nonniſi fictitius eſt; quatenus æquatio, unde elicitur, repræſentare fingitur caſum, quem non repræſentat; cum revera non exhibeat niſi eum, in quo origo abſciſſarum eſt in N; propterea quod, hac fictione, eadem formula ſufficere deprehenditur in utroque caſu, quam abſque ea nonniſi in uno adhibere liceret, nimirum quando origo abſciſſarum eſt in N. Extra hanc fictionem utique contradictorium eſt, quantitatem poſitivam eſſe æqualem privativæ; quemadmodum etiam in ipſa Analyſi contradictionem inde colligimus, atque ex ea porro, notioni impoſſibilis convenienter, (*§. 97 Ontol.*) impoſſibilitatem inferimus. Habemus exemplum in æquatione ad circulum $y^2 + x^2 - ax + 2bx - ab + b^2 = 0$.

Quodſi enim ponas

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 + a^2 - a^2 + 2ab - ab + b^2 = 0$$

$$y^2 = -ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(-ab - b^2)}$$

Ex eo itaque, quod valor ipſius y^2 prodit negativus, qui producit pro y radicem imaginariam; infertur, impoſſibile eſſe, ut abſciſſa fiat diametro æqualis; recte omnino, cum idem per ſe pateat, ubi ſupponis notum eſſe, quod æquatio ſit ad circulum, & origo abſciſſarum in L, cum abſciſſa major eſſe nequeat recta LB $= a - b$. Nimirum hic colligitur, hypotheſin $x = a$ eſſe abſurdam; quia hinc ſequitur, quantitatem poſitivam eſſe æqualem privativæ, aut radici imaginariæ; quod abſurdum eſſe ſupponitur.

§. 214. Ut uſus formularum generalium in conſtruendis æquationibus problematum indeterminatorum clarius eluceſceret, aliquot exemplis eundem illuſtrare lubuit (§. 593 *& ſeqq. Anal.*). Patet per ea, ope iſtarum formularum, nos via vere analytica deduci ad problematum indeterminatorum conſtructionem, ac conſtructiones ſemper obtineri concinnas, quales in Geometria deſiderantur; ut adeo non ſolius brevitatis gratia eaſdem prætulerimus methodo communi, qua uſi ſunt DE LA HIRE & OZANAMUS. Dedimus quoque exempla, (§. 597, 600 *Anal.*), quibus oſtenderemus, quomodo, ex conſtructione locorum, deriventur æquationes locales; ut appareat ad quamnam curvam ſit locus conſtructus. Quoniam vero id intendimus, ut, dum artificia Analyſeos inculcamus, ſimul doceamus veritates mathematicas cognitu utiles; ideo ſelegimus conſtructiones

curva-

curvarum, quas pro fornicibus commendant Architecti, ut conſtaret, eas eſſe ellipſes *Apollonianas*. Æquationem primam (§. 597 *Anal.*) $y^2 + \frac{d^2x^2}{a^2}$, $\frac{d^2x}{a} = 0$ eſſe ad ellipſin, conſtare poterat ex collatione cum formula generali pro ellipſi (§. 588 *Analyſ.*). Quodſi conſueto more hanc æquationem cum formula iſta compares, deprehendes *a* eſſe axem majorem, *d* vero minorem ellipſeos. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad 2n = 0$$

$$q = f$$

$$-\frac{2tp}{2m} = -\frac{d^2}{a} \qquad m^2 = p^2 = \tfrac{1}{2}a^2$$

$$\frac{2d^2p}{a^2} = \frac{d^2}{a} \qquad m = \tfrac{1}{2}a$$

$$\frac{2p}{a} = 1$$

$$p = \tfrac{1}{2}a$$

Habemus adeo

$$a^2 : d^2 = a : t$$

$$t = \frac{ad^2}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

Quoniam parameter *t* eſt tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Analyſ.*); cum *a* ſit axis major, erit *d* minor, & ob $p = \tfrac{1}{2}a$ abſciſſæ computantur a vertice.

Similiter æquationem alteram $y^2 + \frac{ddx^2}{a^2} - \frac{2ddx}{a} = 0$ eſſe ad ellipſin, ejus cum formula generali collatio prodit; & illius cum hac comparatione facta patet, quod *a* ſit axis dimidius major, *d* vero dimidius minor. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad \frac{2tp}{2m} = \frac{2dd}{a}$$

h. e. $$\frac{d^2p}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

$$p = a$$

$$m^2 = p^2 = a^2$$

$$m = a$$

$$a^2 : d^2 = 2a : t$$

$$t = \frac{2ad^2}{a^2} = \frac{2d^2}{a}$$

Quoniam *a* eſt dimidius axis major, & parameter *t* tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Anal*), ſeu quarta ad dimidium axem majorem, minorem dimidium, & minorem integram (§. 124 *Analyſ.*); ideo patet, *d* eſſe axem minorem dimidium, & ob

$p = a$ originem abſciſſarum eſſe in vertice ellipſeos.

§. 215. Utraque æquatio localis, etſi ex diverſis conſtructionibus eruatur, eadem eſt; niſi quod in poſteriori a & d denotent ſemiaxes, in priori autem integros axes conjugatos. Forſan non inconſultum erit hic docere, quomodo conſtructio utraque eruatur ex æquatione ordinaria ad ellipſin. Æquatio hæc eſt $y = bx - \frac{bx^2}{a}$, in qua b parametrum, a vero axem majorem denotat. Quoniam parameter eſt tertia proportionalis ad axem majorem a & minorem d (§. 423 *Anal.*); erit $b = d^2 : a$. Quodſi ergo in æquatione ordinaria hunc valorem in locum ipſius b ſurroges; habebis

$$y^2 = \frac{d^2 x}{a} - \frac{d^2 x^2}{a^2}$$
$$= \frac{d^2 ax - d^2 x^2}{a^2}$$

Quare

$$a^2 : d^2 = ax - x^2 : y^2$$
$$a : d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Patet adeo ſemiordinatam in ellipſi eſſe quartam proportionalem ad axem majorem, minorem & ſemiordinatam circuli ſuper axe majore deſcripti eidem cum ſemiordinata ellipſeos ab-
Tab.II. ſciſſæ reſpondentem. Quamobrem
*Fig.*26. cum pro a & d ſumi etiam poſſit $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}d$ (§. 124 *Anal.*); igitur patet, ſi ſuper axe majore deſcribatur ſemicirculus & in P erigatur perpendicularis PN, ductaque ex centro C radio CN in eum transferatur CR ſemiaxi minori æqualis, ac tandem ex R demittatur perpendicularis RM; fore punctum M in ellipſi: quæ eſt ipſa conſtructio SERLII ex æquatione ordinaria elicita. Cum enim ſit MR parallela ipſi PC; erit (§. 268 *Geom.*)

$$NC : RC = NP : PM$$
$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Poteramus itaque conſtructionem *Serlianam* ellipſeos jam ex æquatione ordinaria elicere in ſuperioribus, cum doctrinam de ellipſi traderemus. Etſi autem æquatio ex altera conſtructione elicita eadem ſit cum anteriore; ex ea tamen non minus deduci poterat conſtructio altera. Etenim Tab.II
ſit ellipſis ADB, cujus axis major *Fig.* 2[?]
AB, ſemiaxis minor EF. Deſcribatur, radio CD, ſemicirculus EDF, & erecta perpendiculari PM ducatur axi AB parallela MN, ex N vero demittatur perpendicularis NQ, quæ erit ipſi PM æqualis. Si ſit $AC = a$, $DC = d$, $AP = a$, erit æquatio ad ellipſin $y^2 = \frac{2addx - d^2 x^2}{a^2}$, adeoq;

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : y^2$$

Sit jam $EQ = z$, erit $QF = 2d - z$, adeoque $QN^2 = PM^2 = y^2 = 2dz - z^2$. Habemus itaque

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : 2dz - z^2$$

adeoque (§. 124 *Anal.*)

$$a^2 - 2ax + x^2 : a^2 = d^2 - 2dz + z^2 : d^2$$
$$a - x : a = d - z : d$$
$$x : a = z : d$$
$$x : z = a : d$$

hoc

hoc eſt, AP : EQ = AC : EC

Quare ſi ad ſemiaxem majorem, & minorem ellipſeos, atque abſciſſam AP pro arbitrio aſſumtam, quæratur quarta proportionalis; erit ea abſciſſa EQ, cui reſpondet ſemiordinata QN in circulo ſemiordinatæ ellipſeos PM æqualis.

Quodſi diſplicet reſolutio per analyſin rationum; analogiam, qua nititur conſtructio, per Algebram quoque reperire licet. Etenim

$$\frac{2ad^2x - d^2x^2}{a^2} = 2dz - z^2$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x}{a^2} = z^2 - 2dz$$

$$\frac{d^2x - 2ad^2x + a^2d^2}{a^2} = z^2 - 2dz + d^2$$

$$\frac{ad - dx}{a} = d - z$$

$$\frac{dx}{a} = z$$

Habemus itaque, ut ante:

$$a : d = x : z$$

Notanda hic ſunt artificia, quibus conſtructiones ex æquatione ordinaria eliciuntur. Nimirum in æquatione ordinaria ſubſtituimus valorem parametri, quam ex eadem elicuimus, ut eandem ingrediantur nonniſi lineæ in ipſa contentæ. Ita enim prodibat æquatio, cujus in analogiam reſolutione conſtructio prior erat manifeſta. Ex eadem æquatione in analogiam reſoluta prodit quoque altera; ſubſtituendo valorem quadrati ſemiordinatæ ellipſeos ex circulo circa axem minorem deſcripto. Equidem prævidere non licet, quid per ſubſtitutionem ſit proditurum; non tamen ideo ea negligenda eſt. Ubi enim veritatem quærimus; tentanda ſunt omnia, donec incidamus in theoremata & conſtructiones problematum. Principii ſubſtitutionis magna vis eſt in Analyſi: efficit enim æquationem dependentem a pluribus veritatibus, ut jam ex ea per reductionem eadem erui poſſint, quæ ex iiſdem more Veterum ratiocinando colliguntur.

§. 216. Enimvero ut intelligant, tyrones, idem artificium etiam in aliis curvis adhiberi poſſe, lubet hoc ipſum applicare ad hyperbolam. Pro hyperbola æquatio ordinaria eſt $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$. Eſt etiam hic, ſi axis conjugatus $= d$, parameter $b = \frac{d^2}{a}$. Quodſi ergo hunc valorem in æquatione ordinaria ſubſtituas, habebis Tab. III. Fig. 28.

$$y^2 = \frac{d^2x}{a} + \frac{d^2x^2}{a^2}$$

$$= \frac{d^2ax + d^2x}{a^2}$$

Quare $a^2 : d^2 = ax + x^2 : y^2$

$$a : d = \sqrt{(ax + x^2)} : y$$

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(ax + x^2)} : y$$

Quodſi

Quodſi ergo ex centro hyperbolæ C erigas $CD = \frac{1}{2}d$, & ſuper BP, abſciſſa AP pro lubitu aſſumta, deſcribas ſemicirculum ſecantem perpendicularem in A erectam in N, & PN $= \sqrt{(ax + x^2)}$ transferas ex B in L, tandemque in L erigas perpendicularem LI, occurrentem rectæ per B & D ductæ in I; erit LI ſemiordinata y abſciſſæ AP reſpondens. Quamobrem, ſi fiat recta PM ad BP perpendicularis = LI; erit punctum M in hyperbola. Cum in praxi non opus ſit ſemicirculum deſcribi, ſed ex medio BP, tantummodo interſecanda recta AN in N, & intervallum PN ex B in L transferendum; quodvis in hyperbola punctum M hoc modo facillime determinatur, ut conſtructio pro non ineleganti haberi poſſit. Notent igitur hic tyrones, quod ad artificia, quibus in ſolutionibus problematum utuntur Autores, animum attendere debeant, eadem ſtatim adhibituri ad alia, quantum ipſis datur. Nec inconſultum erit, ut Autores, qui de ſectionibus conicis commentati ſunt, evolvant, & ubi theoremata & problemata elegantia occurrunt, ea analytice inveſtiganda ſibi proponant. Ad hoc ſtudium ut eos incitaremus, iiſdemque viam, qua eundum, commonſtraremus, ea in medium proferre libuit, quæ de ellipſi & hyperbola dicta ſunt. Unicum adhuc addendum. In hyperbola æquilatera $a = d$, adeoque $y = \sqrt{(ax + x^2)}$, conſequenter PM = PN. Quamobrem punctum M in eadem nullo fere negotio determinatur, ſcilicet ſi ex medio BP, intervallo $\frac{1}{2}$ BP, interſecetur AN in N, & intervallo PN interſecetur PM in M; ut adeo non opus ſit, niſi in A erigi perpendicularem infinitam.

§. 217. Nos non progredimur ultra loca ſolida, in quibus acquieverunt Veteres: neque enim hæc doctrina ultra hoſce limites multum promota. NEWTONUS enumeravit lineas tertii ordinis, ſeu curvas ſecundi generis, quarum æquationes ad tres dimenſiones aſcendunt. Eam eſſe completam demonſtravit STIRLINGIUS, ſimulque oſtendit, quomodo, æquatione curvæ tertii ordinis data, inveniatur locus, hoc eſt, ſpecies curvarum dignoſcatur, ad quam eadem eſt. Enimvero hæc non ſunt ad captum tyronum, in quorum uſum conſcripſimus Elementa noſtra; neque adhuc ea ratione pertractata, ut eadem facilitate intelligantur, qua a nobis propoſita capiuntur. Neque etiam opus eſt, ut hac doctrina ſis inſtructus, ubi ea, quæ in ſequentibus tradimus, intelligere volueris; immo eadem ignorata non impeditur progreſſus in Analyſi recentiorum, qua Geometria ad naturam applicatur. Hoc non eo fine monemus, ut præclaris inventis laudem ſuam detrahamus; ſed ne tyrones remorentur progreſſum ad ulteriora; affectantes ſcientiam eorum, quorum ignorantia eidem

dem minime obſtat. Monitum igitur noſtrum exigit præſens inſtitutum. Ultra enumerationem linearum tertii ordinis, ſeu curvarum ſecundi generis, nemo adhuc progreſſus. Atque adeo doctrina de ſpeciebus curvarum algebraicarum tanto adhuc intervallo diſtat a perfectione ſua, quanto ab eadem diſtare Algebram monuimus. Abunde tyronibus ad altiora adſpirantibus ſufficiunt ea, quæ de locis geometricis tradidimus. Et ubi ad artificia, quibus in doctrina hac explananda utimur, animum attulerint attentum, ut eadem animo diſtincte comprehendant; iiſdem plurimum juvabuntur in altioribus, quæ deinceps ſequuntur. Hoc auxilio methodus comparationis æquationum particularium, in quibus coëfficientes indeterminatarum ſunt determinati, cum aſſumtitiis, in quibus coëfficientes iſti indeterminati ſunt, familiaris redditur. Ejus autem in Analyſi multus eſt uſus.

§. 218. Doctrinam de locis geometricis non ſolum propoſuimus in uſum conſtructionis problematum indeterminatorum, cujus ideo dedimus aliquot exempla; ſed & in uſum conſtructionis æquationum altiorum, præſertim cubicarum & biquadraticarum. Quamobrem capite ſeptimo docemus primum in genere, quomodo æquationes ſuperiores conſtruantur; & mox in ſpecie, quomodo conſtruantur æquationes cubicæ & biquadraticæ. Methodus autem, qua hic utimur, tota huc redit, ut conſtruantur duo loca, quorum interſectione determinatur radix æquationis, ſeu linea recta, quæ eidem reſpondet. Invenit eandem SLUSIUS. Etſi enim non deſint, qui eam jam CARTESIO perſpectam fuiſſe contendunt; certo tamen, quod affirmant, probare minime poſſunt; cum alia quoque via in regulam ſuam incidere potuerit, quam in Geometria pro conſtruendis æquationibus cubicis & biquadraticis, per parabolam & circulum, præſcribit. Quemadmodum vero inventa Veterum profuerunt Recentioribus ad invenienda ſua, quibus ad ulteriora progreſſuris uſui ſunt inventa anteriora; ita dubium non eſt, quin Veterum quoque inventa facem protulerint SLUSIO ad methodum ſuam conſtruendi æquationes cubicas & biquadraticas inveniendam. Etenim cum Veteres multum deſudarent in duabus lineis EF, GH, mediis continue proportionalibus inter duas datas AB, CD, inveniendis; MENECHMUS via vere analytica pervenit ad ſolutionem problematis tantopere celebrati, ope interſectionis duarum parabolarum. Tab. III. *Fig.* 29. Atque in hac ipſa conſtructione continetur idea ejus methodi, quam SLUSIUS primus reperit: id quod ut appareat, analyſis MENECHMI paulo diſertius explicanda. Quoniam GH tertia proportionalis ad AB & EF, itidemque CD tertia proportionalis ad EF & GH; habemus

$$\frac{AB:EF=EF:GH}{EF^2=AB.\,GH} \qquad \frac{EF:GH=GH:CD}{GH^2=CD.\,EF}$$

Patet itaque, quadratum primæ mediarum continue proportionalium eſſe æquale rectangulo ex data prima AB in quæſitam alteram, ſeu mediarum continuæ proportionalium ſecundam; quadratum vero ſecundæ mediarum continue proportionalium eſſe æquale rectangulo ex datarum altera in primam quæſitarum ſeu continue proportionalium. Quoniam in parabola quadratum ſemiordinatæ eſt æquale rectangulo ex parametro in abſciſſam; igitur patet ſi, parametro data una AB, deſcribatur parabola; ſecundam quæſitarum GH fore in numero abſciſſarum, & eidem reſpondentem ſemiordinatam fore primam quæſitarum EF: contra ſi, parametro data altera CD, deſcribatur parabola; ſecundam quæſitarum GH fore in numero ſemiordinatarum ejuſdem, & eidem reſpondentem abſciſſam fore primam quæſitarum. Quamobrem patet eandem rectam eſſe abſciſſam in parabola una & ſemiordinatam in altera, & quæ in una ſemiordinata eſt, eandem eſſe abſciſſam in altera. Obtinet hoc ſi duæ parabolæ, AMR & AMO, circa axes AD & AE, ad angulos rectos junctos, deſcribantur; in puncto enim interſectionis ſemiordinata PM parabolæ AMR æqualis eſt abſciſſæ AQ parabolæ alterius AMO, & viciſſim ſemiordinata QM parabolæ AMO æqualis eſt abſciſſæ AP parabolæ AMR. Patet itaque ſi rectæ datæ ſumantur pro parametris parabolarum AMR & AMO; rectas AP & PM fore duas medias continue proportionales inter duas iſtas rectas datas. Hic eſt modus inveniendi duas lineas medias continue proportionales inter duas datas. Quodſi AB $=a$, CD $=b$, EF $=x$, GH $=y$; erit

Tab.III. Fig. 30.

$$\frac{x^2=ay}{\dfrac{y^4}{b^2}=ay} \qquad \frac{y^2=bx}{\dfrac{y^2}{b}=x}$$ Tab.II Fig. 29.

$$\frac{y^4=ab^2y}{y^3=ab^2}$$

Unde liquet, æquationem cubicam $y^3-ab^2=0$ conſtrui per duo loca $x^2-ay=0$, & $y^2-bx=0$; quorum interſectione determinatur ſemiordinata PM, quæ radici æquationis $y^3-ab^2=0$ reſpondet. Conſtructio adeo MENECHMI inſinuat ideam methodi SLUSIANÆ.

§. 219. Inventum MENECHMI anſam quoque dare poterat inveniendæ regulæ *Carteſianæ*, qua æquationes cubicæ & biquadraticæ conſtruuntur. Nimirum cum ex illo conſtet, æquationem cubicam conſtrui per duas parabolas, quarum mutua interſectione determinatur radix; in Arte inveniendi autem tentaminibus multa relinquantur; facile animum ſubit cogitatio tentandi, num circulus

[illegible] ...que per verticem parabolæ ductus in puncto [illegible] verticem determinet radicem æquationis cubicæ. Tab. III. *Fig.* 31. Sit itaque centrum circuli, per verticem parabolæ A deſcripti, in C; ſi ex eo in axem parabolæ demittatur perpendicularis CD, evidens eſt per rectas AD & DC determinari & centrum C, & radium AC. Sit itaque PM $= y$, parameter $= a$, AD $= b$, DC $= c$. Demittatur ex C perpendicularis CR ad ſemiordinatam PM; erit RM $= y - c$, & ex natura Parabolæ AP $= \frac{y^2}{a}$ (§. 391 *Analyſ.*), adeoque DP $=$ CR $= \frac{y^2}{a} - b$. Quoniam AC^2 $=$ AD^2 $+$ DC^2 & CM^2 $=$ CR^2 $+$ RM^2 (§. 417 *Geom.*); erit AC^2 $= b^2 + c^2$ & CM^2 $= \frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} + b^2 + y^2 - 2cy + c^2$, conſequenter ob CM^2 - AC^2 $= 0$

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} - 2cy = 0$$
$$+ y^2$$

$$y^3 - 2aby - 2a^2 c = 0$$
$$+ a^2 y$$

Patet itaque, interſectione circuli per verticem parabolæ tranſeuntis & parabolæ, conſtrui poſſe æquationem cubicam, in qua ſecundus terminus deficit.

Ut jam determinetur valor ipſius b, ſeu rectæ AD, & valor ipſius c, ſeu rectæ DC; ſit æquatio alteri æquivalens

$$y^3 - py - q = 0$$

erit $- 2ab + a^2 = - p$

$$b - \tfrac{1}{2}a = \frac{p}{2a}$$

$$\text{AD} = b = \frac{p}{2a} + \tfrac{1}{2}a$$

Similiter $- 2a^2 c = - q$

$$\text{DC} = c = \frac{q}{2a^2}$$

Quodſi cum CARTESIO ſumas parametrum pro unitate, & fiat in axe AH $=$ ſemiparametro, erit

$$\text{HD} = \tfrac{1}{2}p$$
$$\text{DC} = \tfrac{1}{2}q$$

hoc eſt, recta HD eſt æqualis coëfficienti dimidio termini tertii, & DC coëfficienti dimidio quarti, ſecundo deficiente; quemadmodum habet regula CARTESII.

Non aliis hic utimur artificiis, quam quibus uſi ſumus in determinanda tangente ſectionum conicarum juxta methodum CARTESII (§. 410, 440, 491 *Analyſ.*). CARTESIO itaque conſtructio MENECHMI, qua utitur in inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas, anſam dare potuit inveniendi regulam conſtruendi æquationes cubicas, in quibus ſecundus terminus deficit; & artificia ipſi familiaria, quibus hic utitur, animum avertere potuerunt ab idea con-

 ſtructio-

ſtructionis per combinationem duorum locorum in conſtructione Menechmi contenta, ad quam eundem advertit Slusius; ut adeo certo aſſeverari non poſſit, methodum *Sluſianam* cognitam jam fuiſſe Cartesio, & eadem hunc perveniſſe ad regulam ſuam. Quicquid ſit, utile tamen eſt tyronibus perpendiſſe, quomodo inventum Menechmi analytice expenſum, & ideam conſtructionis æquationum ſuperiorum per combinationem duorum locorum, & anſam inveniendi regulam conſtruendi æquationes cubicas, in quibus ſecundus terminus deficit, ad biquadraticarum conſtructionem deinceps extenſam, præbere potuerit; ſiquidem ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Quoniam ex qualibet æquatione ſecundus terminus auferri poteſt (§. 343 *Analyſ.*) & hoc pacto æquationes cubicæ omnes reducuntur ad tres caſus (§. 345 *Analyſ.*); regula Cartesii, quæ ſecundum terminum deficere ſupponit, omnibus omnino æquationibus cubicis conſtruendis ſufficit; etſi haud difficile ſit eandem quoque extendere ad eas æquationes, quæ ſecundum terminum habent, quemadmodum operoſe oſtendit Bakerus; nos brevius docuimus (§. 622 *Anal.*). Cur vero methodum *Sluſianam* præferamus regulæ *Carteſianæ* a Bakero extenſæ, rationem reddimus in ſcholio probl. 245. (§. 608 *Analyſ.*).

§. 220. Notandum vero eſt, quod conſtructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum vere analyticas tradiderimus; ut adeo in iis induſtriam ſuam utiliter exerceant, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Tanta autem perſpicuitate doctrinam hanc expoſuimus, ut, qui in anterioribus induſtriam ſuam deſiderari non fuerunt paſſi, nihil prorſus difficultatis ſentiant. Inprimis autem hinc diſcere licet, quomodo tollatur omnis difficultas, quæ ex nimis longa rerum meditandarum ſerie naſcitur. Quamobrem huc animum advertant, quotquot meditationibus longis adſueſcere voluerint. Quod qui faciunt, hunc utique percipient fructum, ne longitudine meditationum defatigentur. Id tantummodo adhuc monemus tyrones, ut, ubi locus conſtruendus, formula generalis, cum qua particularis data conferenda, ex ſuperioribus exſcribatur, & eidem æquatio localis conſtruenda ſubſcribatur, ut termini comparandi ſibi invicem reſpondeant. Ex. gr. in problemate 245 (§. 607 *Anal.*) locus ad circulum eſt $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Formulæ igitur generali ea ita ſubſcribitur, quemadmodum hic factum eſſe vides:

$$\begin{array}{llllllll}
y^2 & -\dfrac{2rxy}{q} & +\dfrac{r^2x^2}{q^2} & -ny & +\dfrac{2nrx}{q} & +n^2 & = 0 \\
 & & +\dfrac{s^2x^2}{q^2} & & -\dfrac{2psx}{q} & -m^2 & \\
 & & & & & +p^2 & \\
y^2 & * & +x^2 & -cy & +bx & * & = 0 \\
 & & & & -ax & &
\end{array}$$

Loca

Loca vacua replentur ſtellula, ut appareat, quinam termini ſint nihilo æquales in caſu particulari dato. Hoc nimirum pacto ſtatim videmus, quinam coëfficientes ſint invicem comparandi, & quinam poni debeant nihilo æquales; ne ex confuſione oriatur error. Quamvis vero, prolixitatis evitandæ gratia, non omnia combinavimus loca, quorum æquationes ex æquatione cubica vel biquadratica elicuimus; qui tamen ingenium & induſtriam ſuam exercere voluerint, hoc non inutiliter facient. Ubi vero, comparatione æquationum particularium, cum formula generali facta, valores omnes linearum ad conſtructionem loci requiſitarum fuerunt determinati; oculi convertendi ſunt in ſchema formulæ generali reſpondens & delendæ lineæ, quarum valores reperti ſunt nihilo æquales: ita enim relinquitur ſchema æquationi particulari reſpondens. Quamobrem ſi lineis remanentibus adſcribas valores modo repertos; ſtatim videbis, quomodo locus ſit conſtruendus. Et ubi ſchemata duobus locis reſpondentia inter ſe confers; illico patebit, quomodo unum alteri ſit imponendum, ut lineæ, quæ utrobique eædem ſunt, ſibi mutuo congruant; conſequenter quomodo æquatio data ſit conſtruenda. Hac via ſi incedere volueris, non modo aberit moleſtia, quæ ex nimis diu continuanda meditatione ſuboritur; verum etiam conſtructione ad finem perducta voluptate perfundetur animus, quæ ſtudium Matheſeos continuo magis magiſque tibi commendabit, & ardorem in eodem progrediendi accendet. Inprimis etiam ſenſum evidentiæ acquires; ſtatim poſthac animadverſurus, ubi diſtincte perceptis quædam permiſcentur, quæ adhuc confuſe percipiuntur: id quod inprimis uſui eſt extra Matheſin, ubi confuſe perceptorum cum diſtincte perceptis commixtio magis nocet, quam in Matheſi; præſertim iis in caſibus, in quibus intellectus ab imaginatione avocandus totus, ut veritatem liquidam perſpicias. Hoc etiam obtinebis, ne nimia feſtinatione te præcipites; & ut inter multos ſtrepitus attentionem conſerves; eamque interrumpere poſſis, quotieſcunque volueris, certo ſemper tramite progreſſurus, quando viſum fuerit; quemadmodum viator recta via incedens ab eadem minime aberrat, nec iter jam emenſum repetere tenetur, ubi gradum ſiſtit, quotieſcunque libuerit. Neque verendum eſt, ut diuturna meditatione defatigetur animus & ſanitati corporis inſidiæ ſtruantur. Non opus eſt, ut in hiſce aſſerendis multum ſtudii collocemus, quamvis ad ſingula demonſtranda a priori principia ſuppeditet Pſychologia noſtra. Qui enim dictis obediens fuerit, in ſeipſo experietur, veritati conſentanea eſſe, quæ dicimus non loquentes niſi experta.

§. 221. Quoniam idem problema

multis modis conſtrui poteſt, cum v. gr. eidem æquationi cubicæ ſatisfaciat non modo cujuſvis loci ſolidi cum loco ad circulum, verum etiam cujuſvis loci ſolidi cum quovis loco ſolido combinatio; quæri omnino poterat, quænam curvæ ſint ceteris præferendæ. CARTESIUS æquationes cubicas & biquadraticas non conſtruit niſi per parabolam & circulum; etſi non ignoraverit, eaſdem quoque conſtrui poſſe per ceteras ſectiones conicas, atque circulum. Videtur utique hoc feciſſe, quod æquatio parabolæ & circuli ſit ſimplicior æquationibus ceterarum ſectionum conicarum. Cum enim vitium ἀγεωμετρησίας ipſi ſit, ſi æquatio conſtruatur per lineas ſuperioris cujuſdam generis, quæ conſtrui poteſt per lineas generis inferioris, veluti ſi æquatio cubica vel biquadratica conſtruatur per curvas ſecundi generis, cum conſtrui poſſint per curvas primi generis; ex ejuſdem omnino generis curvis eas præferre debuit, quæ per æquationes ſimpliciores definiuntur. Recte autem monuit NEWTONUS, in conſtructione problematum geometricorum non reſpiciendum eſſe ad æquationes curvarum, ſed potius ad earum deſcriptionem; ita ut hæ præferantur aliis, quæ ſunt facilioris deſcriptionis. Unde ad conſtruenda problemata ſolida adhibet conchoidem, etſi ea ſit tertii generis. Immo non improbat, ſi quis ad datum angulum in data ratione ſecandum utatur cycloide, quæ motu rotæ, vel circuli, ſuper recta facillime deſcribitur; etſi ea per nullam æquationem algebraicam definiri poſſit. Etſi autem æquationes cubicæ ac biquadraticæ omnes per circulum & parabolam conſtrui poſſint; non tamen ideo conſultum eſt, ut non aliis etiam ſectionibus conicis in iſtis æquationibus conſtruendis utamur. Etenim ubi problemata algebraice ſolvimus, haud raro incidimus in æquationes locales alterius ſectionis conicæ, quam parabolæ; ut adeo ſua veluti ſponte ſeſe offerat ad conſtructionem, cum parabola demum anxie quærenda eſſet; &, per aliam ſectionem conicam quam parabolam, haud raro multo concinnius conſtrui poteſt. Quædam adeo lineæ quibuſdam problematis videntur quaſi propriæ, ita ut deſtinentur eorundem conſtructioni; quia pariunt elegantem, & ſimpliciorem, ſi linearum rationem habeas, ex quibus datis quæſita determinanda; cum conſtructiones ceteræ evadant intricatiores, & ſchemata pariant confuſa, ſi omnes conſtructiones ſubſidiariæ eidem ſimul inferendæ, nec curva ſupponatur tanquam data, nec lineæ ex coëfficientibus terminorum reperiundæ tanquam jam repertæ.

§. 222. Apud Veteres celebrabantur problemata, de inveniendis lineis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, & de triſectione anguli. Cum enim per Geometriam

metriam elementarem facillime inveniatur media proportionalis inter duas datas, & angulus non minus facile biſecetur, per ſolas rectas & circulum, ſeu per Geometriam elementarem; Veteres primum horum problematum ſolutiones interſectione rectarum & circuli quoque tentarunt, ſed fruſtra. Unde ad conſtructiones per alias lineas curvas confugiendum tandem erat. Quamobrem noſtrum quoque erat, ut, conſtructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum illuſtraturi, horum inprimis problematum rationem haberemus. Diſtinxerunt vero ideo Veteres problemata in plana, ſolida, & linearia. Plana appellarunt, quæ per rectas & circulum conſtrui poſſunt, quia hæ lineæ ſupponuntur in plano deſcriptæ; ſolida, ad quorum conſtructiones adhibendæ ſunt ſectiones conicæ, quæ, cum per coni dati ſectionem prodeant, tanquam in ſolido datæ ſupponuntur. Cumque præter rectam, circulum, & ſectiones conicas, lineas alias in Geometriam recipere nollent; problemata plana & ſolida ſola geometrica appellarunt, quemadmodum etiam lineas iſtas ſolas geometricas dixerunt. Per alias vero lineas conſtruenda problemata, mechanica vocarunt; ipſaſque, quarum ope conſtruuntur, lineas mechanicas nuncuparunt. Aſt CARTESIUS, connubium Arithmeticæ cum Geometria introducens, cum videret ſectiones conicas per æquationes definiri poſſe algebraicas, & præter eas dari curvas innumeras alias, quæ per iſtiuſmodi æquationes definiuntur; haſce omnes illis æquiparavit & in Geometriam recipiendas eſſe intulit; in numerum mechanicarum rejectis, quæ æquationes iſtiuſmodi reſpuunt. Invento autem calculo differentiali; cum curvæ, CARTESIO mechanicæ dictæ, non minus per æquationes differentiales definiantur, quam ceteræ per ordinarias, & ad conſtructiones problematum utiliſſimorum adhibeantur, quemadmodum in Mechanicis videbimus; his quoque aditus in Geometriam factus. Unde multo amplior evaſit ſpeculationum geometricarum campus, qui a Veteribus intra nimis arctos limites coërcebatur. Sane inventa longe præclariſſima ex Matheſi exularent, ſi recentiores Geometræ veſtigiis, vel Veterum, vel CARTESII, inſiſtere voluiſſent.

§. 223. Non omnia problemata per rectam & circulum conſtrui poſſe, inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium inter duas datas, & triſectio anguli docuit; & ex æquationibus algebraicis, ad quas ducunt ſolutiones problematum, patet ratio. Quemadmodum enim æquationum quadraticarum conſtructio pendet ab invenienda una linea media proportionali inter duas alias quomodocunque datas; ita conſtructio cubicarum ſupponit duas medias continue propor-

tiona-

tionales, conſtructio biquadraticarum tres inveniendas & ita porro. In æquationibus puris hoc ipſum obvium eſt; in affectis non minus oſtendi poteſt. Sufficiat nobis in gratiam tyronum id oſtendiſſe in æquationibus puris. Æquatio quadratica pura eſt $x^2 = ab$. Patet hic eſſe

$$a : x = x : b$$

adeoque conſtructurus æquationem invenire debet mediam proportionalem inter a & b.

Æquatio cubica pura eſt

$$x^3 = a^2 b$$

---

adeoque $x^4 = a^2 bx$

$$a^2 : x^2 = x^2 : bx$$

Sit $bx = y^2$

erit $x : y = y : b$

& $a^2 : x^2 = x^2 : y^2$

$$a : x = x : y = y : b$$

Igitur $a. x. y. b$ ſunt continue proportionales. Æquationem ergo cubicam puram conſtructurus, invenire debet duas medias continue proportionales inter datas a & b, quarum prima x eſt radix æquationis cubicæ puræ.

Similiter æquatio biquadratica pura eſt

$$x^4 = a^3 b$$

Quare $a^3 : x^3 = x : b$

$$= x^3 : bx^2$$

Sit $bx^2 = y^3$

erit $a^3 : x^3 = x^3 : y^3$

$$a : x = x : y$$

& $x^2 : y^2 = y : b$

$$= y^2 : by$$

Sit $by = z^2$

erit $x^2 : y^2 = y^2 : z^2$

$$x : y = y^2 : z$$

& $y : z = z : b$

Habemus adeo

$$a : x = x : y = y : z = z : b$$

conſequenter $a. x. y. z. b$ ſunt continue proportionales; & æquationem biquadraticam puram conſtructurus, invenire debet tres medias continue proportionales inter duas datas a & b, quarum prima x eſt radix æquationis. Interſectio rectæ & circuli nonniſi unam exhibet lineam mediam continue proportionalem inter duas. Quamobrem ſi plures inveniendæ ſupponuntur, ſola rectæ ac circuli interſectione obtineri minime poſſunt. Hinc duarum inventio deduxit MENECHMUM ad interſectionem duarum parabolarum, quemadmodum vidimus ſupra (§. 218).

§. 224. Forſan autem non inutile erit, ſi hic exemplo aliquo oſtendamus, quomodo inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium ad æquationes cubicas affectas deducat; ne quæ de extremis quomodocunque datis diximus obſcura videantur, nec ſatis a tyronibus intelligantur. Sit igitur problema tale: *Data quatuor quantitatum continue proportionalium prima & differentia quarta a ſecunda; invenire ſingulas.* Reſolutio hæc erit.

Sit Quant. I $= a$ Quant. II $= x$

Differ. II & IV $= b$ III $= y$

erit IV $= x - b$

& per

& per conditionem problematis

$$a : x = x : y \qquad a : x = y : x - b$$

$$x^2 = ay \qquad xy = ax - ab$$

$$\frac{x^2}{a} = y \qquad y = \frac{ax - ab}{x}$$

adeoque

$$\frac{x^2}{a} = \frac{ax - ab}{x}$$

$$x^3 = ax^2 - a^2b$$

$$x^3 - ax^2 + a^2b = 0$$

Videmus itaque conſtructionem æquationis cubicæ affectæ dependere ab inventione duarum mediarum proportionalium inter duas extremas, quarum prima ſimpliciter datur, altera autem per differentiam a prima mediarum. Ad conſtructionem vero ſeſe offerunt æquatio ad parabolam $x^2 - ay = 0$, & æquatio ad hyperbolam intra aſymptotos $xy - ax + ab = 0$. Cum vero etiam ſit $x : y = y : x - b$ adeoque $y^2 = x^2 - bx$, conſequenter $y^2 - x^2 + bx = 0$; loco hyperbolæ intra aſymptotos offert etiam ſeſe hyperbola æquilatera.

Eodem modo ex ſequente problemate liquet, quomodo inventio unius mediæ proportionalis ducat ad æquationem quadraticam affectam. Scilicet, *data quantitatum continue proportionalium prima & differentia tertiæ a ſecunda, invenienda ſit ſecunda.* Sit itaque

Quantitas I $= a$ Quant. II $= x$
Differ. II. & III $= b$ erit III $= x - b$
adeoque per conditionem problematis

$$a : x = x : x - b$$

$$x^2 = ax - ab$$

$$x^2 - ax + ab = 0$$

Non ſine ratione addimus exemplum æquationis quadraticæ affectæ, propterea quod harum æquationem conſtructionum reduximus ad inventionem linearum reciprocarum (§. 265 *Anal.*); ne exiſtiment tyrones veritati conſentaneum non eſſe, quod eadem pendeat ab inventione mediæ proportionalis inter duas extremas quomodocunque datas. Poterant caſus omnes æquationum cubicarum per inventionem duarum, caſus vero omnes æquationum biquadraticarum per inventionem trium mediarum continue proportionalium illuſtrari; ſiquidem prolixioribus eſſe licuiſſet.

§. 225. Doctrina de numeris irrationalibus illuſtratur problemate 259 (§. 630 *Anal.*), in quo oſtendimus, quomodo numerus irrationalis quicunque per lineam exprimatur; ut intelligatur, cur Veteres quantitates irrationales non in numeris, ſed in continuo conſiderarent, unde oriuntur, adeoque eas ad Geometriam retulerint. Attentionem denique meretur uſus conſtructionis æquationum ad curvas datarum, per combinationem locorum; cum hoc pacto,

pacto, ope curvarum inferioris generis, conſtrui poſſint curvæ ſuperioris; quemadmodum, ope parabolæ & circuli, conſtruximus parabolam cubicam & circulum ſecundi generis. Etſi enim hæ conſtructiones ſint moleſtiores, quam ut in uſum recipiantur; ſufficit tamen quod per eaſdem in curva, quæ deſcripta ſupponitur, quodvis punctum datum ad examen revocari poſſit, num rite fuerit determinatum; & ſaltem ex poſſibilitate conſtructionis pateat curvæ poſſibilitas.

§. 226. Satis oſtendimus, quomodo in Elementis noſtris Analyſeos finitorum verſari debeat, qui artem hanc intimius perſpicere ſibique familiarem reddere voluerit; quamvis longe plura annotare poteramus, ſi ſingula accuratius perpendenda proponere viſum nobis fuiſſet, nec acquieſcere voluiſſemus in ſpeciminibus, quæ in aliis imitari poterit attentione ſufficiente uſus. Reſtat igitur ut doceamus, quomodo in Analyſi infinitorum ſit verſandum. Initio tyrones non ſcrupuloſiores eſſe debent in notione quantitatis infinite parvæ expendenda; modo notent eas non in ſe eſſe nihilum, ſed tantummodo reſpectu aliarum pro nihilo haberi: quo facit ſcholion def. 2 (§. 5 *Analyſ. infin.*). Quodſi enim difficultates quædam ſuperſunt, quæ aſſenſum remorantur; eædem in progreſſu evaneſcent: tollentur autem penitus, ubi ea perpenderis, quæ in Metaphyſicis de ente infinito Mathematicorum imaginario demonſtrantur (§. 796 *& ſeqq. Ontol.*) Dudum Mathematici ex differentiis quæſivere quadrata & cubos; quemadmodum docuimus in applicatione calculi literalis ad Arithmeticam (*§.* 81 *& ſeqq. Anal.*). Inventum hoc anſam dedit LEIBNITIO inveſtigandi methodum ex differentiis colligendi terminos ſeriei cujuſcunque continue creſcentis, vel decreſcentis; cum ignoraret, id jam in literas fuiſſe relatum a D. MOUTON, Canonico Lugdunenſi, ex obſervatione FRANCISCI REGINALDI, Lugdunenſis; quemadmodum conſtat ex epiſtola LEIBNITII ad OLDENBURGIUM ſcripta, quæ legitur in *Commercio epiſtolico* D. JOANNIS COLLINS *& aliorum de Analyſi promota*, juſſu Societatis Regiæ Britannicæ in lucem edito, p. 32 *& ſeqq.* Calculum adeo differentialem primum exercuit in numeris, ubi differentiæ ſunt finitæ, ſeu aſſignabiles. Cum deinde opus præclarum *de Quadratura circuli & ſectionibus conicis* GREGORII A S. VINCENTIO, ab HUGENIO ſibi commendatum, legeret, in quo differentiæ magnitudinum infinite parvæ conſiderantur, quarum ſummæ exhibent ipſas magnitudines; hæc obſervans in calculum differentialem incidit, de quo hic nobis ſermo eſt; methodo *Cavaleriana*, qua feliciſſime uſus GREGORIUS A S. VINCENTIO, ad calculum perducta. In hoc calculo

culo omnia pendent a differentiatione rectanguli xy. Quamobrem ad eam omnem attentionem afferre debent tyrones; ne in ceteris ſuperſit ulla difficultas. Etenim ſi ſupponas, quomodo differentiale rectanguli xy inveniatur; nullo negotio cetera erues per Algebram communem; quemadmodum oſtendimus tum in ipſo problemate primo *num.* II. & *ſeqq.* tum in problemate ſecundo atque tertio. Conſtat lineam generari motu continuo puncti ab uno termino ad alterum, qualis eſt motus liquidi fluentis; unde a NEWTONO appellatur *Fluxus*. Conſtat etiam ſuperficies iſtiuſmodi motu linearum; ſolida vero motu ſuperficierum gigni Quodſi ergo ad geneſin magnitudinum animum advertas; per ea, quæ ab EUCLIDE & ARCHIMEDE demonſtrata ſunt (§. 5 *Anal. infin.*), animadvertes, magnitudines creſcere vel decreſcere, per incrementa, vel decrementa inaſſignabilia, quæ ipſæ ſunt quantitates infinite parvæ, cum quibus hic nobis negotium eſt, a NEWTONO, ad geneſin magnitudinum reſpiciente, *Fluxiones* appellatæ; quemadmodum ipſas magnitudines, quæ hoc modo creſcunt vel decreſcunt, *Fluentes* vocat. Unde quantitatem differentiare, ſtylo *Newtoniano*, eſt invenire fluentis datæ fluxionem. Ut hæc rectius intel-
Tab. III. Fig. 32. ligantur; perpendant velim tyrones, ſi recta quædam AB, juxta ductum alterius rectæ AC, motu ſibi ſemper parallelo atque æquabili, moveatur deorſum, dum interea punctum quoddam, motu quomodocunque accelerato, in ipſa recta AB, a termino A verſus alterum B, progreditur; punctum deſcribet lineam curvam AM, recta vero ſpatium curvilineum APM. Quodſi ponamus rectam ex P pervenire in p, adeoque abſciſſam AP augeri incremento Pp; evidens eſt, eodem quo hoc accidit momento, ſemiordinatam PM augeri incremento mR, arcum AM incremento Mm, & ſpatium curvilineum APM incremento PpmM. Arcus adeo AM differt ab arcu Am, arculo Mm; ſemiordinata PM a ſemiordinata pm, particula mR; ſpatium curvilineum, ſive area APM, ab area Apm, particula PpmM; dum differentia abſciſſæ AP ab abſciſſa Ap eſt Pp. Unde, ſtylo *Leibnitiano*, ſi in tempuſculo infinite parvo incrementum Pp eſt inaſſignabile; hoc ipſum incrementum Pp dicitur differentiale abſciſſæ Ap, mR differentiale ſemiordinatæ PM, Mm, differentiale arcus AM, & tandem PpMm differentiale areæ APM: ſtylo autem *Newtoniano*, Pp abſciſſæ, mR ſemiordinatæ, Mm arcus, PpMm areæ, fluxio eſt. Atque adeo patet, cur calculus differentialis ſeu methodus fluxionum in Geometria ſublimiori tantæ ſit utilitatis: id quod ex ejus applicatione clarius eluceſcet. Incrementa abſciſſæ Pp generantur motu æquabili; adeoque æquali tempore, ſive tempuſculo, æqualia ſunt: aſt cum in

 cremen-

crementa ſemiordinatæ *m*R eodem tempuſculo generentur motu inæquabili, & incrementa lineæ curvæ ſive arcus M*m*, atque areæ P*pm*M, motu mixto ex æquabili & inæquabili, ſingula inæqualia eſſe debent. Unde liquet in hoc calculo magnitudinis unius incrementum ſumi ut æquale, dum reliqua inæqualia ſunt, quæ ſimul generantur. Non autem neceſſe eſt, ut abſciſſa ponatur creſcere per incrementa æqualia; ſed ſumi etiam poſſunt momentanea incrementa magnitudinis alterius tanquam æqualia, quo caſu abſciſſa creſcit per inæqualia incrementa. **Tab. III. Fig. 33.** Ponamus enim rectam AC æquabiliter moveri, motu ſibi ſemper parallelo, juxta ductum rectæ AB; dum interea punctum motu continuo accelerato in illa deſcendit; patet incrementa Q*q*, ſive R*m*, eodem tempuſculo æqualia eſſe debere; dum interea incrementa S*m*, ſive P*p*, inæqualia gignuntur. Hactenus dicta qui perpendit, is non modo animadvertet calculum differentialem niti methodo genetica, & rigorem acquirere ex demonſtratis ab EUCLIDE & ARCHIMEDE (§. 5 *Anal. infin.*); verum etiam, in applicatione hujus calculi ad Geometriam ſublimiorem, nihil deprehendet obſcuritatis.

§. 227. Ope calculi differentialis, tangentes curvarum facillime determinantur; hancque methodum, non modo ad omnes curvas algebraicas extendi patet ex formula generali, quam dedimus (§. 32 *Anal. infin.*), verum etiam eandem ad alias curvas, quæ mechanicæ non ſunt, applicari poſſe, exemplo ſpiralium, cycloidis, logarithmicæ & quadratricis DINOSTRATIS docuimus. Non opus hic eſt perplexis longiſque calculis; nec methodum hanc irrationales quantitates remorantur; ut adeo nihil in eadem deſiderari poſſit. Tota nititur ratione differentialium ſemiordinatæ ac abſciſſæ, quæ ſunt inter ſe in ratione ſemiordinatæ ad ſubtangentem; quemadmodum in reſolutione probl. 4 (§. 20 *Anal. infin.*) demonſtravimus. Quoniam enim quantitatibus proportionalibus infinite parvis ſubſtitui poſſunt aliæ finitæ; valor ſubtangentis, qua tangens determinatur, ex quantitatibus aſſignabilibus componitur. Artificio hoc uſus eſt BARROWIUS in ſua Tangentium methodo: quod ut appareat, exemplo parabolæ *Apollonianæ* perfacili docere lubet. Sit $QN = y$, $AQ = x$, $PT = t$. **Tab. III. Fig. 34.** Sit ſemiordinata alia PM, & ei reſpondens abſciſſa AP, differentia earundem ſemiordinatarum adeo exigua, quantum deſideratur, & differentia abſciſſarum MR exiguæ parvitatis. Sit $PQ = MR = e$, $NR = a$; erit $PM = y - a$, $AP = x - e$. Si parameter parabolæ fuerit p; habebimus

$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$

$$\&\quad y^2 = px$$

adeoque $-2ay + a^2 = -ep$

$$2ay = ep, \text{ ob } a^2 = 0$$

Eſt

Eſt vero $e : a = t : y$
& $e : a = 2y : p$

adeoque $t : y = 2y : p$

$t = 2y^2 : p$

Nemo non videt, ſi pro a ſubſtituas dy, & pro e ponas dx; prodire $2ydy = pdx$ & $t = \frac{ydy}{dx}$. Unde reſultat $t = \frac{2y^2}{p}$: Methodus itaque *Barrowiana* tangentium a præſenti, quam proponimus, non differt; & calculus, quo utitur BARROWIUS, non differt a calculo differentiali, niſi characteriſtica. Hæc ſane ratio eſt, cur JACOBUS BERNOULLI primum exiſtimaret calculum differentialem LEIBNITII non differre a *Barrowiano*; & Dn. DE TSCHIRNHAUSEN contenderet, calculum differentialem *Barrowiano* ortum ſuum debere; præſertim cum LEIBNITIUS, ubi eundem in Actis Eruditorum primum publicavit, non niſi ad methodum de maximis & minimis, quæ ſpecialis caſus eſt methodi tangentium, applicaret. Enimvero cum uſus calculi differentialis in problematis magis arduis ſolvendis conſpiceretur; aliter de eodem ſentire cœperunt Geometræ, ipſe etiam HUGENIUS, qui ſibi perſuadebat, aliis methodis detecta tantummodo aliter exprimi hoc calculo.

Tab. III. Fig. 37. §. 228. Methodus *Barrowiana* nititur artificiis CARTESII in determinanda tangente curvarum, & principiis Geometriæ indiviſibilium CAVALLERII, atque Algebræ ordinariæ. Etenim ſi curva AMNO ſecatur recta TO, erit NR. MR=PM: TP, quemadmodum demonſtravimus in reſolutione probl. 4. (§. 20). Quamobrem ſi ſit $NR = a$, $MR = e$, $PM = y$, $TP = t$; erit $a : e = y : t$, & ex. gr. ex natura parabolæ, cujus parameter p,

$$y^2 = px$$
$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$

$$-2ay + a^2 = 0 - ep$$

Quodſi ſemiordinatæ PM & QN continuo propius ad ſe invicem accedant, ut differentiæ ſemiordinatarum NR & abſciſſarum MR, ſive PQ, tandem degenerent in partes infinite parvas, ſeu momentanea incrementa; recta MN degenerat in arculum cognominem, TN degenerat in tangentem & TP in ſubtangentem. Tum vero ex principiis Geometriæ indiviſibilium $a^2 = 0$ reſpectu $2ay$, & ep; & $y - a$ atque y habentur pro æqualibus in contactu. Unde habemus:

$$-2ay = -ep$$
ſeu $2ay = ep$
& $a : e = (y : t)\ p : 2y$

quemadmodum ante (§. 227).

Ad methodum *Barrowianam* ſi applicatur vera characteriſtica infiniteſimarum, ſeu quantitatum infinite parvarum, ſine qua algorithmus infiniteſimalis non ſubſiſtit, qui eſt ipſe ſic dictus calculus differentialis; prodit

prodit methodus tangentium, quam hic applicamus. Ope autem hujus calculi, non modo expedita redditur, verùm etiam extenditur, ut ultimum ſuum complementum ab eodem accepiſſe dicenda ſit. Obiter hic annotamus, quando quæſtio eſt de inventore calculi differentialis, id potiſſimum quæri, quinam primus Algorithmum quantitatum infinite parvarum invenerit, & in ſolvendis problematis exercuerit; cum antea adhiberetur calculus literalis communis, & vi principiorum Geometriæ indiviſibilium, termini quidam expungerentur reſpectu ceterorum evaneſcentes. Similis quodammodo eſt hæc quæſtio alteri communi, qua quæritur, quinam ſit inventor veræ characteriſticæ numerorum & Algorithmi communis, quo hodie utimur in Arithmetica, tanta calculi commoditate & amplitudine. Habuere Veteres numerorum ſigna, ſed parum apta. Uſi iiſdem ſunt in Arithmetica practica. Non tamen ideo dici poteſt, quod habuerint veram numerorum characteriſticam; & Arithmeticam practicam talem, qualem nunc habemus; nec quiſquam hodie inventis notis numericis, quorum ſignificatus ex ipſa numerorum natura deductus, aliis quam hiſce ſignis uti vult: quemadmodum nec hodie inventa vera characteriſtica quantitatum infinite parvarum, qua calculus infiniteſimalis in Analyſin introductus, ut per modum Algorithmi exerceri poſſit, quiſquam calculum literalem communem adhibere mavult in ſolvendis problematis, quorum ſolutio a quantitatibus infinite parvis pendet. Equidem ex ore ipſius Dn. DE TSCHIRNHAUSEN hauſi, quod contenderet, ſe per Algebram communem eadem præſtare poſſe, quæ per calculum differentialem adeo feliciter eruuntur; nec calculum hunc eſſe veram methodum, ſed tantummodo veræ methodi compendium; qualia complura, immo, ut ipſe confidenter admodum loquebatur, infinita excogitari poſſint, hocque ſeſe oſtenſurum in ſecunda parte Medicinæ Mentis; nunquam tamen dictis fidem fecit, quin potius mortis vicinus Schedas ſuas Manuſcriptas Vulcano tradidit, ne publicum ſtatueret, quo ſucceſſu in vera, quam pollicebatur, methodo detegenda fuerit verſatus, & quouſque fuerit progreſſus. Conſtat autem ex iis, quæ dedit in Actis Eruditorum, quod nimia in ſe ipſum confidentia de iis, quæ animo verſabatur, locutus fuerit, quaſi a ſe jam eſſent inventa; etſi re penitius examinata impoſſibilia deprehenderentur. Oſtendi in Arithmetica, calculum numeroſum ita inſtitui poſſe, ut conſervetur univerſalitas, quemadmodum in literali, & hoc pacto inveniri per calculum numeroſum, quæ per literalem eruuntur. Oſtendi ſuperius, quomodo Algebra numeroſa ad ſolvenda problemata geometrice applicari poſſit, ut prodeant formulæ algebraicæ geometrice

metrice conſtruendæ (§. 194). Immo oſtendi, quomodo, retenta communi linearum deſignatione, regulæ Algebræ ad ſolutiones problematum geometricorum applicari potuerint (§. *cit.*). Ecquis vero dixerit, ſi quis hoc feciſſet, ante inventam Arithmeticam literalem, eum jam habuiſſe Algorithmum univerſalem & Algebram ſpecioſam? Immo ſi hanc methodum ad tractandas curvas adhibuiſſet; ecquis dixerit, eum habuiſſe methodum Cartesii tractandi curvas per æquationes algebraicas? Habuiſſet ſimilem quandam methodum, ſed non eandem; ut adeo in multis paria præſtare potuiſſet, aſt non eadem facilitate. Ars characteriſtica differt a methodo, &, pro illius diverſitate, hæc prorſus aliam induit formam; ita ut non modo facilius præſtentur, quæ fieri debent, verum etiam plura in poteſtate ſint, quam ſi alia characteriſtica adhiberetur. Patebunt hæc clarius, ubi Ars inveniendi ad formam artis fuerit redacta, quemadmodum Logica; & qui ad diverſitatem methodorum, prouti hæ per Artem characteriſticam modificantur, animum adverterit, prouti in hac commentatione inculcamus, eadem perſpiciet. Talia autem obſervaſſe non tantum proderit ei, qui Artem inveniendi ad formam artis reducere voluerit; ſed etiam ei, qui in Matheſi addiſcenda ad tertium cognitionis gradum adſpirat; ut methodos, quæ ipſi innotuerunt, limare, iiſdemque omnem ſuam amplitudinem tribuere poſſit, quam ſuſcipere valent; ne a caſu expectandum ſit, quod artis eſt, uſu facultatum huc requiſito non occaſione ſponte oblata, ſed ex ſcientia determinato; nec tentaminibus ſubjiciatur, quod certa lege regitur. Nihil hic aſſerimus, quod non obvium ſit ei, qui in Matheſi addiſcenda præſcripto a nobis modo fuerit verſatus. Multa hic annotare poteramus, ſiquidem prolixioribus eſſe liceret, nec a præſenti inſtituto digreſſio longior videretur aliena.

§. 229. Notandum vero eſt, formulas algebraicas, quæ pro ſubtangente prodeunt, geometrice eſſe conſtruendas, ſiquidem tangentem curvæ actu ducere volueris. Omittimus iſtas conſtructiones, brevitatis gratia; propterea quod in Analyſi finitorum ſatis perſpicue docuimus, quomodo iſtiuſmodi formulæ conſtruantur. Tyronibus tamen, quorum eſt exercere artem, eædem negligendæ non ſunt. Ex. gr. ſubtangens ellipſis eſt $\frac{ax-x^2}{\frac{1}{2}a-x}$ (§. 25 *Anal. infin.* Eſt itaque

$\frac{1}{2}a-x : a-x = x : PT$ Tab. III. Fig. 36.

h. e. PC : PB = AP : PT

Quodſi ergo fiat PQ = PC & PR = PB, ductæque rectæ AQ agatur parallela TR; erit

PQ : PR = AP : PT

h. e. PC : PB = AP : PT

adeo-

adeoque ſubtangens PT rite determinata, conſequenter TM tangens quæſita.

Quoniam ſubtangens pro omnibus ellipſibus in infinitum

$$\frac{(m+n)(ax-x^2)}{ma-mx-nx}=\frac{ax-x^2}{ma:(m+n)-x}$$

habemus:

$$\frac{ma}{m+n}-x:a-x=x:PT$$

Patet itaque non abſimili modo tangentem pro omnibus ellipſibus in infinitum determinari poſſe. Et quia pro circulo eadem ſubtangentis formula reperitur, quæ pro ellipſi *Apolloniana*; & pro infinitis circulis eadem formula, quæ pro ellipſibus infinitis; niſi quod iſthic $n=1$; eodem etiam modo tangens omnium circulorum in infinitum determinatur. Immo cum formula ſubtangentis hyperbolarum a formula ſubtangentis ellipſeos non differat niſi ſignis; tangens etiam hyperbolarum in infinitum non abſimili modo determinatur. Subtangens curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3-x^3=axy$, eſt

$$\frac{3y^3-axy}{3x^2+ay}=\frac{y^3-\frac{1}{3}axy}{x^2+\frac{1}{3}ay}.$$

Habemus itaque

$$x^2+\tfrac{1}{3}ay:y^2-\tfrac{1}{3}ax=y:PT$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}a}+y:\frac{y^2}{\frac{1}{3}a}-x=y:PT$$

Tab.III. Fig. 37. Quantitates $\frac{x^2}{\frac{1}{3}a}+y$ & $\frac{y^2}{\frac{1}{3}a}-x$ concinna admodum conſtructione reperiuntur hunc in modum. Fiat $CA=\frac{1}{3}a$; ſitque $AP=x$, $PM=y$. Erigatur in A perpendicularis AN ipſi PM æqualis, ſeu conſtruatur parallelogrammum rectangulum APMN. Ducta recta CN erigatur ad eandem perpendicularis NR. Erit $PR=\frac{y^2}{\frac{1}{3}a}-x$. Eſt enim

$$CA:AN=AN:AR$$

$$\tfrac{1}{3}a:y=y:\frac{y^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } PR=AR-AP=\frac{y^2}{\frac{1}{3}a}-x.$$

Fiat porro $AO=CA$, ductaque OP erigatur PS ad eandem perpendicularis occurrens ipſi NA ultra rectam CP continuatæ in S. Erit $NS=\frac{x^2}{\frac{1}{3}a}+y$. Eſt enim $AO:AP=AP:AS$

$$\tfrac{1}{3}a:x=x:\frac{x^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } NS=SA+AN=\frac{x^2}{\frac{1}{3}a}+y.$$

Quodſi curva ſupponatur data ſeu in plano deſcripta, datis jam NS & PR ſubtangens nullo negotio determinatur.

§. 230. Quoniam normalis ad tangentem perpendicularis; tangens quoque determinatur per normalem; conſequenter etiam per ſubnormalem, per quam normalis determinatur. Subinde ſubnormalis per conſtructionem faciliorem reperitur; adeoque præſtat tangentem determinare

minare per normalem, quam per ſubtangentem. Exemplum habemus in circulo, ubi radius ad tangentem perpendicularis; quemadmodum per præſentem quoque methodum calculo eruitur (§. 38 *Anal. infin.*); vi cujus ſubnormalis reperitur diſtantiæ ſemiordinatæ a centro æqualis; adeoque datur, data abſciſſa, cum ſubtangens eandem requirat conſtructionem, quam Ellipſis exigit (§. 229). Enimvero ſubinde etiam ſubnormalis poſtulat conſtructionem magis compoſitam quam ſubtangens; ſubinde utraque eadem ſimplicitate gaudet. Illius exemplum præbet ellipſis; hujus vero curva, ad quam eſt æquatio $y^3 - x^3 = axy$. Etenim in Ellipſi eſt (§. 40 *Anal. infin.*).

Tab. III. Fig. 38. $$ax - x^2 : y^2 = \tfrac{1}{2}a - x : PG$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PH$$

Fiat itaque AQ = PM = y, & in Q erigatur perpendicularis QN rectæ per A & M ductæ in N occurrens; erit QN $= \frac{y^2}{x}$.

Eſt enim

$$AP : PM = AQ : QN$$

$$x : y = y : \frac{y^2}{x}$$

Continuetur PM in O, donec PO = QN, & ex centro C ducatur recta RC ipſi OB parallela, erit PR ſubnormali æqualis. Eſt enim

$$PB : PO = PC : PR$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PR$$

Quare ſi fiat PH = PR, habebis ſubnormalem, eritque HM normalis quæſita. Hanc conſtructionem ſi cum ea conferre volueris, quam pro ſubtangente dedimus (§. 229); patebit eam eſſe magis compoſitam. Subnormalis curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$ reperitur

$$= \frac{x^2y + \frac{1}{3}ay^2}{y^2 - \frac{1}{3}ax}$$

Habemus itaque

$$y^2 - \tfrac{1}{3}ax : x^2 + \tfrac{1}{3}ay = y : PH$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y = y : PH$$

Analogia hæc ab altera, quam pro ſubtangente elicuimus (§. 229), non differt, niſi quod termini in ratione priori invertantur; conſequenter conſtructio eadem fere manet, nec ſimplicior eſt pro ſubnormali, quam pro ſubtangente.

§. 231. Methodus determinandi aſymptotos curvarum nititur principio reductionis. Aſymptoti enim conſiderantur inſtar tangentium in puncto a vertice infinito intervallo diſtante, ut abſciſſa eidem reſpondens ſit infinita; conſequenter axis a habeat ad eandem rationem inaſſignabilem; adeoque fiat reſpective nihilum. Hanc ſuppoſitionem a veritate non recedere, tyrones inde intelligunt, quod in hac hypotheſi eruantur eædem quantitates linearum, per quas aſymptoti determinantur, quas ſupra in Analyſi finitorum aliter demonſtravimus. Novarum enim me-

thodorum examina haberi debent, ſi applicentur ad jam nota. Ceterum attendant tyrones ad differentiam, quæ inter abſolute nihilum, ſeu nihilum verum, & inter reſpective nihilum, ſeu quod reſpectu quantitatis alterius pro nihilo habetur, intercedit. Etenim ſi qua quantitas per abſolute nihilum multiplicatur, nihilo æqualis eſt: ſed quæ ducitur in reſpective nihilum non evadit nihilo æqualis. Hinc (§.47 *Anal. infin.*) in valore $ax:(a+2x)$, recta a non quidem auget valorem rectæ $2x$, ut adeo ſit $a+2x=2x$; attamen non efficit ax nihilo æquale; ſed hoc factum ſpectatur tanquam quantitas a infinities ſumta, quia a quantitas finita, x infinita. Idem patet in æquatione $ay^2=bx(a+x)$, quæ, quia a reſpective nihilum, reducitur ad æquationem $ay^2=bx^2$. Unde ſimul liquet, ſi ſumatur $ay^2=abx+bx^2$, cur infinitum primi gradus abx habeatur pro nihilo, reſpectu infiniti ſecundi gradus ay^2 & bx^2; quippe quod infinitum primi gradus infinities ſuperat, quemadmodum infinitum primi gradus quantitatem finitam. Non nego, hæc in numerum fictionum referenda eſſe; ſunt tamen toleranter vera, ut cum JUNGIO loquamur, & in calculo, quemadmodum fictiones aliæ, utiliter adhibentur. Cavendum itaque, ne in præjudicium veritatis talia in Phyſicam inferantur principia, ex qua imaginaria exulare debent; quippe ubi in veras phænomenorum cauſas inquirimus.

§. 32. Attentionem quoque peculiarem meretur problema 7 (§. 49 *Anal. infin.*) in quo ſubtangens & ſubnormalis in conchoide determinatur. Curva hæc ex numero algebraicarum eſt: unde ſemiordinatæ ejus ſumi poſſunt ad axem AB normales. Habet vero eadem etiam polum C: unde pro ſemiordinatis quoque haberi poſſunt rectæ CM ex polo C ad punctum curvæ M ductæ. Quamobrem duplicem explicamus methodum determinandi ejus tangentem & normalem. Prima eadem eſt, qua utimur in curvis algebraicis ceteris; niſi quod valor ipſius dx non ex æquatione ad curvam, ſed aliis artificiis eruatur; ne formulæ pro ſubtangente & ſubnormali prodeant nimis perplexæ, conſtructionem minus concinnam parientes. Formula autem pro ſubnormali expeditior eſt, quam pro ſubtangente, adeoque in conſtructione præferenda. Cum enim ſit ſubnormalis $= t + \frac{z^2-az}{v} = t + \frac{(z-a)z}{v}$; erit Tab. I Analyſ. infin. Fig. 5

$$v:z=z-a:\frac{z^2-az}{v}$$

$$PB:MC=QC:\frac{z^2-az}{v}$$

cui ſi addatur $PC=t$; prodibit ſubnormalis. Formula ſubtangentis

$$\frac{v(z^2-t^2)}{z^2-az+tv} = \frac{z^2-t^2}{\frac{z^2-az}{v}+t}$$

reſol-

reſolvitur in hanc analogiam:

$$\frac{z^2 - az}{v} + t : z + t = z - t : PT$$

Atque adeo patet, ſi formula ſubtangentis conſtruenda, ante inveniendam eſſe ſubnormalem. Data autem ſubnormali, datur etiam tangens, ut adeo ulteriori conſtructione non habeamus opus. Altera methodus nititur hypotheſi ſemiordinatarum in puncto quodam concurrentium, quam ideo addere viſum eſt, ut idea ejus animo ingeneretur ad alia profutura.

§. 233. Notanda vero ſunt artificia, quibus ſubtangens determinatur in iis curvis, quarum ſemiordinatæ in puncto quodam coëunt. Nimirum quia, in curvis algebraicis, ſubtangens intercipitur inter tangentem & ſemiordinatam; in puncto communi concurſus excitatur perpendicularis, tangentem, cui occurrit, ſecans, quemadmodum videre eſt in methodo altera pro conchoide & in methodo pro ſpiralibus. In cycloide ſubtangens determinatur per interſectionem tangentis cycloidis & tangentis circuli genitoris; quia portio illa tangentis intercipitur inter ſemiordinatam & tangentem cycloidis, etſi ad illam non ſit perpendicularis; ut adeo hic a ſignificatu termini tantiſper recedatur, quem is in curvis algebraicis habet; quemadmodum etiam non retinetur ſignificatus prorſus idem ſemiordinatæ, ubi eædem in puncto quodam concurrunt. Nimirum definitiones terminorum inventæ ſunt pro curvis algebraicis; deinceps per analogiam quandam aptantur ad curvas alias termini, ut in iiſdem proprias ſibi nanciſcantur definitiones. Abſit itaque, ut tibi perſuadeas, ipſos Geometras alere ſignificatum terminorum vagum. Ita ſubtangentem cycloidis definire licet per portionem tangentis circuli, in puncto interſectionis circuli & ſemiordinatæ cycloidis, inter ſemiordinatam & tangentem cycloidis interceptam; & cum definitiones nominales ſint arbitrariæ, utique hoc facere licet. Nec ideo dicere licet, quod vocabulum *Subtangens* varios habeat ſignificatus. Subtangens enim cycloidis non eſt ſubtangens curvarum ſimpliciter ita dicta. In quadratrice DINOSTRATIS, abſciſſa ſumitur in circulo genitore, & portio radii quadratricem ſecantis pro ſemiordinata. Quoniam hic recta ad ſemiordinatam perpendicularis cum tangente in puncto contactus concurrit, quæ adeo extra ipſum eam non ſecat, ideo neceſſarium fuit, ut eo, quem explicavimus (§. 55 *Anal. infin.*) modo determinaretur. Ad hoc animum probe advertere debent tyrones, ne notione ſubtangentis confundantur, ubi ipſimet tangentes in curvis non algebraicis determinare voluerint.

§. 234. Methodus de maximis & minimis nititur principio reductionis: maximæ enim & minimæ applicatæ

reducuntur ad caſum tangentium. Et ſimiliter applicatio hujus methodi ad problemata particularia eodem principio nititur; quatenus quantitatum ſeries ad certum quendam terminum continuo creſcentium vel decreſcentium, deinceps rurſus decreſcentium vel creſcentium exponitur per ſemiordinatas curvæ cujuſdam algebraicæ, in qua ſemiordinatæ eandem conſtantem relationem habent ad abſciſſas, quæ convenit quantitatibus creſcentibus vel decreſcentibus. Ex. gr. Si linea recta ita ſecanda, ut rectangulum ex ſegmentis ſit maximum eorum, quæ hac ratione conſtrui poſſunt; conſtans relatio quantitatis continuo creſcentis uſque ad terminum maximum exprimitur per factum ſegmentorum in ſe invicem. Quamobrem ſi ſegmentum minus ſumas pro abſciſſa; problema hoc reducitur ad circulum, in quo maxima ſemiordinata determinanda.

§. 235. Ut ideam calculi ſummatorii, qui vulgo integralis dicitur, animo concipiant tyrones; repetendum eſt ex ſuperioribus, magnitudines creſcere per momentanea incre-
Tab. III. Fig. 32. menta. Nimirum ſi tempuſculo quodam abſciſſa augetur incremento P*p*, ſemiordinatæ accedit incrementum *m*R, arcui incrementum M*m* & areæ incrementum P*pm*M. Unde ſi abſciſſa AP$=x$, conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis ſucceſſivis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dx, ita ut ſumma omnium dx ſive $\int dx = x$; Similiter ſemiordinata PM$=y$ conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dy, ita ut ſumma omnium dy ſive $\int dy = y$; Arcus AM$=v$ conſtare concipitur ex infinitis iſtiuſmodi incrementis, quorum unumquodque dv, ita ut $\int dv = v$; & area APM conſtare concipitur ex innumeris iſtiuſmodi areolis, quarum unaquæque, quemadmodum oſtendimus, exprimitur per ydy, ita ut ſumma omnium iſtarum areolarum ſive $\int ydy$ ſit areæ æqualis. Calculo adeo ſummatorio quæritur ſumma omnium incrementorum momentaneorum, ut habeatur magnitudo, cujus incrementum indefinite datur. Quamobrem ſi valor incrementi exprimatur per relationem, quam habet ſemiordinata ad abſciſſam; per ſummationem reperitur valor ſemiordinatæ, arcus, & areæ curvæ datæ. Ex. gr. in parabola $dy = \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx$. Quare $\int \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx = a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$ eſt ſemiordinata parabolæ. Similiter in circulo $dy = \frac{1}{2}(a-2x)\, dx\, (ax-x^2)^{-1:2}$. Quare $\int \frac{1}{2}(a-2x)(ax-x^2)^{-1:2} dx = (ax-x^2)^{1:2} = \sqrt{(ax-x^2)}$ eſt ſemiordinata circuli. Et in hyperbola intra aſymptotos $dy = ax^{-2} dx$. Quare $ax^{-1} = \frac{a}{x}$ eſt ſemiordinata hyperbolæ intra aſymptotos. Patet adeo per calculum ſummatorium reſtitui quantitatem variabilem, cujus diffe-

ren-

rentiatione prodiit magnitudinis elementum, ſeu momentaneum in ejus geneſi incrementum. Unde Angli methodum fluxionum inverſam vocant, quia ex data fluxione reperitur fluens, quemadmodum per directam ex fluente fluxio. Regreſſus autem iſte non ubivis obvius eſt. Unde hodienum Mathematicorum ingenia exercet. Conſtabit autem ex problematis phyſico-mechanicis, qualia exempli loco in Mechanica dabimus, ſolutiones problematum ſæpe nos deducere ad æquationes differentiales, quarum integratione detegitur natura curvæ; vel, ubi hoc fieri nequit, ope æquationum differentialium curvæ conſtruuntur. Ope igitur hujus calculi multa in poteſtate ſunt, ad quæ alias non pateret aditus. Ceterum tyrones ad exemplum trianguli, quod primo loco (§. 101 *Anal. infin.*) exhibuimus, animum probe attendant; ut non modo idea methodi quadrandi curvas in eodem naſcatur, verum etiam dubium evaneſcat, quaſi ex neglectu trianguli characteriſtici oriri debeat in ſummatione error aſſignabilis: quod ubi fieret, impoſſibile erat, ut prodiret area trianguli tanta, quantam eſſe debere demonſtratur in Elementis Geometriæ. Præſtantia autem hujus calculi inde eluceſcit, quod paucis lineis non modo exhibeatur quadratura parabolæ *Apollonianæ*, ſed & omnium parabolarum, & curvarum ipſis agnatarum in infinitum, cum methodo *Archimedea* difficillime eruatur tantummodo prior.

§. 236. Cum nobis propoſuerimus exemplis potius docere regulas, quam earum multitudine obruere memoriam tyronum, præceptis omnibus in unum locum congeſtis, antequam ad exempla accedatur; quæ de quantitate in ſummatione adjicienda tenenda ſunt, exemplo quadraturæ ſegmenti parabolici inculcare lubuit (§. 107 *Anal. infin.*): ita enim ratio, cur adjicienda veniat, clarius percipitur, manifeſtior in caſu particulari, quam ſi generalis detur. Ratio nimirum generalis eſt, quod in differentiatione, cum differentiale quantitatum conſtantium ſit $=0$; quantitates conſtantes in compoſita variabilibus adjectæ evaneſcant; ita ut idem ſit differentiale quantitatum $x+a$ atque x, & quantitatum $x-a$ atque x. Eſt enim & $d(x+a)=dx$, & $d(x-a)=dx$ & differentiale ipſius $x=dx$. Unde in ſummatione, ſummæ adjiciendum, quod in differentiatione evanuit. Quomodo vero appareat, utrum aliqua quantitas conſtans ſit adjicienda, nec ne; & num ea, quæ adjicienda venit, ſignum habere debeat poſitivum, an privativum; in exemplo particulari multo clarius elucet, quam ſi idem generaliter doceri deberet. Vidimus in doctrina de locis geometricis, initium abſciſſæ non modo ſtatui poſſe in vertice A, ubi cum abſciſſa evaneſcit etiam ſemiordinata, Tab. II. Fig. 22.

 eva-

evaneſcit arcus, evaneſcit ſpatium curvilineum, abſciſſa, ſemiordinata, & arcu contentum; verum etiam in puncto L infra verticem, vel in puncto N ultra eundem. Per hoc ipſum vero non variatur elementum abſciſſæ Pp, quod in omni caſu idem eſt. Ne igitur in ſummatione obſcurum ſit, quod de quantitate adjicienda hic præcipitur; probe perpendant velim tyrones, quæ in ſcholio (§. 108 *Analyſ. infin.*) habentur. Inventores talia non animadverterunt, niſi ubi animum ad ſolutionem particularium applicarunt; neque enim methodi repertæ ſunt, niſi dum ſolutiones problematum tentatæ ad eaſdem deduxerunt inventores. Quamobrem qui Analyſi, tertii cognitionis gradus acquirendi gratia, operam navat, eadem via incedere debet, quam calcarunt Inventores; utut evitentur avia, in quæ haud raro inciderunt, cum in terris adhuc incognitis verſarentur, antequam in viam regiam pervenirent. Ea quoque de cauſa, non dedimus niſi particularium problematum ſolutiones; etſi facillimum fuiſſet generales huc tranſcribere. Neque enim exiſtimandum eſt, generales ſolutiones fuiſſe particularibus priores; ſed illæ potius ex his enatæ ſunt. Plerumque majoris artis eſt ſolvere problemata in caſu particulari, quam univerſaliter.

§. 237. Quadraturam parabolarum omnium, immo curvarum aliarum eiſdem agnatarum in infinitum, nullo negotio dari per calculum integralem patet (§. 103, 105 *Analyſ. infin.*). Curvæ autem ceteræ, quas deinceps quadramus, tum etiam ſegmenta parabolica, quæ quadrantur, reducuntur ad parabolas; ſive elementum per ſe non integrabile, juxta canones generales, reducatur ad integrabile, terminis finitis aut nonniſi uno conſtans; ſive reſolvatur in ſeriem infinitam, quæ terminos numero infinitos habet. Etenim in caſu priore, area curvæ reducitur ad areas tot parabolarum, quot ſunt termini; in caſu poſteriori autem ad areas parabolarum infinitarum; quemadmodum, in Geometria elementari, figurarum rectilinearum, & ipſius circuli areæ reducuntur ad areas triangulorum. Ex. gr. ubi ſegmentum parabolicum, cujus elementum eſt $dx\sqrt{(ab+ax)}$ quadrare jubemur, $dx\sqrt{(ab+ax)}$ reducimus ad $2v^2dv:a$. Quodſi dv ſumatur pro differentiali abſciſſæ & v pro abſciſſa, erit $\frac{2v^2}{a}=z$, adeoque $v^2=\frac{1}{2}az$. Unde liquet ſegmentum parabolicum quadrandum reduci ad parabolam externam, cujus parameter eſt $\frac{1}{2}a$, ſeu dimidio parametri parabolæ æqualis, cujus ſegmentum quadrandum. Similiter patet aream curvæ CARTESII (§. 111 *Analyſ. infin.*) eſſe differentiam arearum parabolæ externæ *Apollonianæ*, ad quam $x^2=bz$, & parabolæ externæ ſecundi generis, ad quam $x^3=b^2v$. Non abſimili modo patet, in elemen-

elemento hyperbolæ intra aſymtotos $dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx$ &c. in termino primo ſemiordinatam eſſe $= 1$, in ſecundo $= x$, in tertio, ſi $1 = a$, eſſe $x^2 = ay$, in quarto $x^3 = a^2y$, in quinto $x^4 = a^2y$ &c. conſequenter terminum primum eſſe elementum parallelogrammi rectanguli, ſecundum elementum trianguli æquicruri, tertium parabolæ externæ *Apollonianæ* ſeu primi generis, quartum elementum parabolæ externæ ſecundi generis, quintum elementum parabolæ externæ tertii generis & ita porro in infinitum. Quadratura igitur hyperbolæ reducitur ad quadraturam parallelogrammi rectanguli, trianguli æquicruri & infinitarum parabolarum. Inde eſt quod hyperbolæ & circuli quadraturam per infinitas parabolas demonſtraverit GUIDO GRANDUS. Equidem, data hyperbolæ area intra aſymptotos, datur etiam area interna inter axem & curvam interjacens; placuit tamen (§. 123 *Analyſ. infin.*) etiam oſtendere, quomodo area interna quadretur. Enimvero patet quadraturam areæ intra aſymptotos eſſe ſimpliciorem quadratura internæ, in qua $\sqrt{ax}$ ducenda eſt in ſeriem infinitam.

§. 238. Exemplo circuli docuimus (§. 124 *Analyſ. infin.*) quadraturam non uno modo abſolvi poſſe. Quadravimus enim circulum, ex dato ſinu verſo, ex dato ſinu complementi, & ex tangente. Notanda hic ſunt artificia, quibus progreſſus terminorum in infinitum redditur conſpicuus: id quod inprimis oſtendimus in quadratura *Newtoniana.* Artificia etſi eadem ſint, quibus jam in Analyſi infinitorum uſi ſumus; ſcilicet ut in numeris conſervetur univerſalitas calculi, & ut terminus ſequens efficiatur dependens ab antecedente; applicatio tamen eorundem non ſtatim cuivis ſuccurrit. Unde memini quoſdam ſeriem *Leibnitianam*, aut, ſi magis, *Gregorianam*, pro circulo prætuliſſe *Newtonianæ*, quæ tamen citius convergit, ſeu celerius appropinquat; quod illa conſtantem ſervet legem, in hac vero termini nulla certa lege progrediantur; etſi *Newtoniana* non modo manifeſtam legem admittat, qua termini in infinitum progrediuntur, verum etiam hoc habeat, ut terminus quilibet ſequens ex proxime antecedente inveniri poſſit. Id potius attentionem tyronum meretur, quod quadratura *Newtoniana* exhibeat quadraturam ſegmentorum circuli, *Leibnitiana* vero quadraturam ſectorum; atque adeo hæc inſinuet ideam quadrandi ſectores curvarum, quæ centrum habent, animo jam obſervata ARCHIMEDI, dum circuli aream ad aream trianguli reduxit; quemadmodum clariſſime docuit KEPLERUS in *Stereometria dolii Auſtriaci.* Notandum porro eſt, quod docuit LEIBNITIUS in *Actis Eruditorum* An. 1682, p. 45, cum termini $\frac{1}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}$, &c. itemque termini $\frac{1}{3}, \frac{1}{7},$

$\frac{1}{11},$

$\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{19}$, &c. progrediantur in progreſſione harmonica; aream circuli eſſe differentiam duarum ſerierum progreſſionis harmonicæ. Præterea, ſi binos quoſque terminos ad eandem denominationem reducas; quia $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$, $\frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{2}{99}$, $\frac{1}{13} - \frac{1}{15} = \frac{2}{195}$, $\frac{1}{17} - \frac{1}{19} = \frac{2}{323}$ &c. area circuli, quadrato diametri exiſtente 1, erit $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \frac{2}{195} + \frac{2}{323}$ &c. in infinitum. Jam ſi diameter circuli $= 1$, erit ſemidiameter $= \frac{1}{2}$, adeoque quadratum inſcriptum $= \frac{1}{2}$ (§. 21 *Trigon.*). Quoniam itaque quadratum circumſcriptum eſt inſcripti duplum, ſi quadratum inſcriptum fuerit $\frac{1}{4}$, erit circumſcriptum $\frac{1}{2}$, adeoque area circuli $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{39} + \frac{1}{195} + \frac{1}{323}$ &c. in infinitum (§. 181 *Arithm.*). Statim patet 3, 35, 99 eſſe numeros quadratos unitate mulctatos, nempe $4 - 1$, $36 - 1$, $100 - 1$; & inter quadratum 4 & 36 interjacere tres numeros quadratos 9, 16, 25; ſimiliterque inter 36 & 100 interjacere tres 49, 64, 81. Quodſi ſeriem pro circulo continues, & cum numeris in Tabula quadratorum numerorum compares; videbis eam conſtante hac lege progredi, ut denominator fractionis ſit quartus quiſque numerus excerptus ex ſerie numerorum quadratorum unitate mulctatorum, numeratore ſemper exiſtente unitate. Quando vero quadratum inſcriptum $\frac{1}{4}$, radius eſt $\sqrt{\frac{1}{8}}$ (§. 21 *Trigon.*), adeoque diameter $= 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{4}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Hæc ideo monemus, ut diſcant tyrones dari etiam artificia particularia legem progreſſionis terminorum in infinitum detegendi, præter generalia, de quibus diximus ante: quamvis iſtiuſmodi quoque artificiis jam uſi fuerimus in inveniendo generali theoremate pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analyſ. infin.*). Neque enim inutile eſt eadem artificia variis exemplis illuſtrari.

§. 239. Quemadmodum vero quadraturæ curvarum per ſeries infinitas reducuntur ad quadraturam infinitarum parabolarum; ita quoque curvarum aliarum quadratura ad quadraturam circuli atque hyperbolæ reduci ſolent: id quod non uno modo fieri ſolet. Exemplum habemus in ellipſi (§. 126 *Anal. infin.*), ubi ratio areæ ellipticæ ad aream circuli ſua veluti ſponte ſeſe offert. Exempla alia præbent cyclois, ciſſois, ſpiralis *Archimedea*. Non ſine ratione addidimus hanc reductionem, cum eadem utamur in altioribus; prouti ſuo loco conſtabit in Mechanicis, ubi problemata phyſico-mechanica ſolvuntur. Probe autem notandæ ſunt hæ reductiones iis, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, ut vim principii reductionis per omnem Artem inveniendi utiliſſimi rectius percipiant. Ceterum eodem inſtituto, (§. 147 *Anal. infin.*) rectificationem parabolæ reducimus ad quadraturam hyperbolæ: id quod ideo attentionem meretur, ut diſcamus ſubinde ſummationem

nem

nem ejuſdem elementi dependere, & a quadratura curvæ, & a rectificatione arcus cujuſdam. Habet enim hoc uſum non contemnendum in methodo tangentium inverſa, ubi æquationes differentiales conſtruere jubemur, ſuppoſita curvæ cujuſdam quadratura, vel rectificatione arcus. Exempla occurrunt in Mechanicis, ubi problemata phyſico-mechanica ſolvimus. Quodſi enim tempeſtive animum advertamus ad talia, quæ in progreſſu uſum præclarum habent; quæ alias difficilia videntur, facilia evadunt, nec perturbatur animus, quando applicantur ea, quorum idea nobis jam familiaris evaſit; præſertim cum haud raro inſolita, nondumque perſpecta videantur, quæ ex anterioribus nota eſſe poterant, ſi attentione ſufficiente in iiſdem uſi fuiſſemus.

§. 240. Rectificatio curvarum, perinde ac inventio ſectorum ellipticorum & hyperbolicorum, interdum requirit calculos admodum prolixos. Ne igitur prolixitate tyrones redderentur perplexi, & a ſolutione problematis deterrerentur; calculos integros admodum diſtincte explicatos exhibuimus. Conſulent autem ſibi tyrones, ſi initio generalem quandam ideam ſolutionis animo concipiant; veluti quod in rectificatione arcus elliptici (§. 172 *Anal. infin.*) primum quæratur valor ex æquatione ad curvam, deinde tam ex numeratore, quam denominatore, in valore iſto emergente, extrahatur radix per theorema *Newtonianum*, & tandem ſeries pro numeratore emergens dividatur per ſeriem, quæ emergit pro denominatore. Hoc pacto enim, in uſum ſolutionis problematis, problema unum reſolvitur quaſi in plura, quorum unumquodque ſigillatim ſolvi poteſt. Circa diviſionem attentionem meretur artificium, quo calculus a perplexitate liberatur, ut diſtincte ſingula ipſis oculis exhibeantur: quod non modo facit ad facilius evitandum errorem, qui in calculum perplexum facile irrepit, defectu attentionis; verum etiam omnem moleſtiam aufert, qua attentio turbatur. Diſtincta perceptio intellectus eſt: unde qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navant, non modo noſtro more ſingula diſtincte ſibi repræſentare, verum etiam ad diverſa artificia, quibus eo fine hinc inde utimur, animum ſollicite advertere tenentur. Ceterum ne quis aliorum libros evolvens, in quibus eorundem Problematum ſolutio occurrit, exiſtimet, paucis ibidem explicari, quæ a nobis tanta prolixitate expediuntur; monendum eſſe duco, autores pleroſque ſcribere peritis, non tyronibus, quorum utilitati nos velificamur; adeoque multa omittere, quæ a lectore ſupplenda ſunt, ſiquidem veritatem aſſequi voluerit. Unde non modo tyrones, verum etiam haud raro exercitatiores multum temporis fallunt,

fallunt, antequam multo labore ab altero dicta aſſequantur. Nobis vero, qui tempus rerum omnium pretioſiſſimum exiſtimamus, propoſitum eſt, ut ſine omni temporis diſpendio ſciendi cupidos ad ſcientiam perducamus; cumque aliorum facilitati omni modo ſtudere nos jubeat philoſophia noſtra, id quoque agendum eſſe arbitramur, ut in diſcendo omnem a diſcentibus moleſtiam arceamus.

§. 241. Inprimis autem in doctrina de rectificatione curvarum attentionem meretur methodus, qua, ex quantitate per ſeriem data, invenitur ſeries pro quantitate variabili, ex qua formantur ſeriei prioris termini; veluti dum ex arcu dato ſinus quæritur. Etenim arcus datur per ſeriem infinitam, cujus termini formantur ex ſinu, & ſinus quæritur in ſerie, cujus termini formantur ex arcu. Nititur ea methodo extrahendi radicem ex ſerie infinita, quam eum in finem explicavimus in Analyſi finitorum. Inventa eſt a NEWTONO; quemadmodum conſtat ex literis ad LEIBNITIUM datis, quæ leguntur apud WALLISIUM, volumine tertio Operum, diciturque Regreſſus ſerierum. Subinde tamen artis eſt applicare methodum extrahendi radicem ex æquatione infinita in regreſſu ſerierum. Exempli loco eſt problema 56, (§. 163 *Anal. infin.*), quo ex dato arcu invenitur ſinus verſus. Solutio igitur problematis iſtius attentionem meretur, ut artificium, quo hic utimur, in aliis caſibus ſimilibus adhiberi poſſit. Neque enim ſufficit, ut intelligantur, quæ docentur, ſi quis ad tertium cognitionis gradum adſpirat; ſed artificia quoque analytica addiſcenda in uſum futurum, cum regulas doceamus per exempla. Ad hactenus dicta qui animum attendit, in ceteris ſeſe ſatis attentum atque acutum præbebit, ut plura moneri non ſit opus. Immo ſi quis ea attentione in diſcenda Matheſi uti voluerit, quam tantopere inculcamus; acumen ſingulare acquiret, quo facile, nullo quaſi negotio, diſcernet artificia in ſolutionibus problematum adhibita, eorundemque a ſe invicem dependentiam animadvertet: id quod utile erit iis, qui, ſtudio Matheſeos ac in ſpecie Algebræ, in Arte inveniendi generali proficere ſtudent ad recte philoſophandum neceſſaria.

§. 242. Circuli rectificatio etiam deduci poteſt ex quadratura circuli. Quoniam enim area circuli prodit ducta peripheria in quartam diametri partem (§. 429 *Geom.*), peripheria prodit, ſi ſeriem, quæ exprimit aream circuli, dividas per $\frac{1}{4}$. Inde eſt, quod, ſi diameter fuerit 1, pro quadrante eadem prodeat ſeries $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ &c. (§. 158 *Anal. infin.*), quam pro circuli area repereramus, quadrato diametri exiſtente 1. Etenim ſi ſeriem per $\frac{1}{4}$ dividere volueris, Numeratores terminorum ducendi ſunt in 4, (§. 243 *Arithm.*).

Notandum adhuc eſt, ex formulis indefinitis erui poſſe adhuc alias formulas pro circulo integro, vel ejus peripheria integra, ſi valor ipſius x non explicetur per diametrum 1, ſed per ſinum, ſinum verſum, coſinum, vel tangentem alicujus arcus: quo in caſu ſæpius prodit ſeries magis convergens, cum priori modo inventa minus convergeret & contra. Ex. gr. Si tangens fuerit x, pro arcu prodit $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c.
Tab.III. Fig. 39. Ponamus arcum x eſſe 30°. Si fuerit radius $CA = CB = 1$, erit ſinus $BI = \frac{1}{2}$ (§. 15 *Trigon.*), conſequenter ob $IC^2 = BC^2 - BI^2$ (§. 417 *Geom.*) $IC^2 = \frac{3}{4}$. Quamobrem cum ſit

$IC : IB = CA : AD$ (§. 26 *Trigon.*)
& $IC^2 : IB^2 = CA^2 : AD^2$ (§. 124 *Anal.*)
erit $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 1 : AD^2$
ſive $3 : 1 = 1 : AD^2$ (§. *cit.*)
Unde reperitur $AD = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Quodſi hunc valorem pro x ſubſtituas, cum ſit

$$x^2 = \tfrac{1}{3} \qquad \tfrac{1}{3}x^2 = \tfrac{1}{9}$$
$$x^4 = \tfrac{1}{9} \qquad \tfrac{1}{5}x^4 = \tfrac{1}{45}$$
$$x^6 = \tfrac{1}{27} \qquad \tfrac{1}{7}x^6 = \tfrac{1}{189}$$
$$x^8 = \tfrac{1}{81} \qquad \tfrac{1}{9}x^8 = \tfrac{1}{729}$$
$$x^{10} = \tfrac{1}{243} \qquad \tfrac{1}{11}x^{10} = \tfrac{1}{2673};$$

ſeries $x\,(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{11}x^{10}$ &c.) degenerat in ſequentem

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} - \tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{2673} \text{ \&c.}\right)$$

quæ exprimit arcum 30 graduum. Si vero diameter fuerit 1, eadem exprimit arcum 60 graduum. Quamobrem ſi ſeriem hanc ducas in 6, hoc eſt, ſi $\sqrt{\frac{1}{3}}$ multiplices per 6, cum ſit $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; pro area circuli habebis

$$2\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} - \tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{2673} \text{ \&c.}\right)$$

Quodſi porro binos quoſque terminos reducere volueris ad eandem denominationem, erit

$$-\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} = \frac{-45+9}{405} = -\frac{36}{405} = -\frac{12}{135}$$

$$-\tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} = \frac{-729+189}{189 \cdot 729}$$
$$= \frac{-81+21}{21 \cdot 729}$$
$$= -\frac{60}{21 \cdot 729}$$
$$= -\frac{20}{7 \cdot 729}$$
$$= -\frac{20}{5103}$$

Si adhuc addas terminum ſeriei ſequentem $+\frac{1}{9477}$; eodem modo reperies

$$-\tfrac{1}{2673} + \tfrac{1}{9477} = -\tfrac{28}{104247}.$$

Unde ſeries pro circulo reſultat $2\sqrt{3}\,(1 - \frac{12}{135} - \frac{20}{5103} - \frac{28}{104247}$ &c.

Quodſi eandem ſeriem dividas per 4, & factorem $2\sqrt{3}$ per 4 multiplices; habebis pro circulo

$8\sqrt{3}\,(\frac{1}{4} - \frac{3}{135} - \frac{5}{5103} - \frac{7}{104247}$ &c.
ſeu $\sqrt{192}\,(\frac{1}{4} - \frac{3}{135} - \frac{5}{5103} - \frac{7}{104247}$ &c.)

Eſt vero $135 = 15 \cdot 9$
$5103 = 63 \cdot 81$
$= 63 \cdot 9^2$
$104247 = 143 \cdot 729$
$= 143 \cdot 9^3$

Quamobrem ſeries pro circulo

$$\sqrt{192}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{15\cdot 9} - \frac{5}{63\cdot 9^2} - \frac{7}{143\cdot 9^3}\ \&c.\right)$$

Unde patet lex progreſſionis in infinitum. Etenim numeratores progrediuntur ſecundum numeros impares; denominatores componuntur ex binis factoribus, quorum unus ſumitur ex progreſſione geometrica, cujus terminus primus 9, & exponens rationis eidem æqualis; alter vero per ſaltum excerpitur ex ſerie numerorum quadratorum unitate mulctatorum, quorum radices ſunt 4. 8. 12. &c. hoc eſt, progrediuntur in progreſſione arithmetica, cujus terminus primus eſt 4 & differentia terminorum eidem æqualis.

Niſi formulam abbreviare voluiſſemus reductione binorum terminorum diverſis ſignis præditorum ad eandem denominationem; lex progreſſionis in infinitum manifeſtari quoque poterat in formula

$$2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673}\ \&c.\right)$$

reſolvendo denominatores in ſuos factores. Cum enim ſit

$$45 = 5\cdot 9$$
$$189 = 7\cdot 27$$
$$729 = 9\cdot 81$$
$$2673 = 11.24$$

erit pro circulo ſeries, ſi diameter $=1$

$$\sqrt{12}\left(\frac{1}{1.1} - \frac{5}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 9} - \frac{1}{7\cdot 27} + \frac{1}{9\cdot 81} - \frac{1}{11\cdot 243} - \&c.\right)$$

Una hic ſeries factorum progreditur ſecundum numeros impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. altera vero in progreſſione geometrica, cujus exponens rationis 3, nimirum 1. 3. 9. 27. 81. 143.

§. 243. Patet hinc non temere eſſe judicandum, utrum ſeries aliqua citius appropinquet altera, nec ne, & num conſtante quadam lege progrediatur. Neque enim eadem formula indefinita in omni caſu particulari æque appropinquat, & lex progreſſionis ſæpius latet, atque in caſu particulari non eadem eſt, quæ in univerſali. Liquet etiam ad detegendam legem progreſſionis facere Arithmeticam, ſeu numerorum ſcientiam, quæ ſubinde etiam compendia ſummationis quotlibet terminorum ſeriei ſubminiſtrat; ut adeo inutile exiſtimare minime debeat ſtudium, quod in ſpeciebus numerorum certa lege progredientibus & in iis ſummandis collocatur; ſit ita quod hodie Geometria magis excolatur Arithmetica, immo Geometriæ ad Mechanicam applicatæ magis habeatur ratio, quam puræ. Apparet etiam uſui formularum minime obſtare, quod irrationalitati obnoxiæ ſint; & in caſu particulari formulam ab irrationalitate liberam eidem implicari poſſe citra ullum incommodum, immo uſum ejus per hoc fieri poſſe expeditiorem. Hæc probe notanda ſunt, ne judicium de formulis diverſis præcipitemus, quando de unius

unius præ altera prærogativa agitur. Etſi itaque jam in ſuperioribus (§. 238) de tranſmutatione ſeriei *Leibnitianæ*, ſeu *Gregorianæ*, pro circulo in alias quædam monuerimus; non tamen piguit plura in eam rem dicere (§. 241), tum ut intelligatur, ex eadem formula, per tranſmutationem communi Arithmetica nixam, varias deduci poſſe alias, tum ut conſtet, hoc non inutiliter fieri, ubi eædem ad praxin ſunt transferendæ; tum ut excitaremus attentionem eorum, & juvaremus eorundem acumen, qui de ſeriebus infinitis ad uſum aptandis forſan commentari decreverint. Neque enim inutilem operam ſumeret, ſi quis hoc argumentum pro dignitate tractaret; ne inanes viderentur ſpeculationes, quæ certum ſui pollicentur uſum. Nec eſt quod excipias talia peritis nullum facere negotium. Nam quibus ſeſe commendat uſus, ii non ſemper, immo rariſſime adeo periti ſunt, ut talia per ſe aſſequantur.

§. 244. Ut hæc rectius intelligantur; lubet exemplo quodam docere, quomodo per ſeries infinitas inveniantur approximationes in numeris quantalibet exactitudine, prouti plures vel pauciores terminos ſummare libuerit. Reſolvuntur autem termini ſinguli in fractiones decimales per diviſionem; quemadmodum fecimus in extractione radicum ex æquationibus per approximationem (§. 363 *Anal. finit.*). Ne autem in numero cyphrarum quoto præfigendis aberres; tenendum eſt, tot præfigendas eſſe cyphras, quot numeratori cyphræ adjiciendæ, ut prima diviſio ſuccedat. Ex. gr. ſi fractio fuerit $\frac{1}{6}$, diviſio non ſuccedit niſi unitati adjecta cyphra. Quoto igitur præfigitur cyphra una, ut conſtet deficere integra, ſeu locum integrorum eſſe vacuum, & fractionem incipere a partibus decimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{40}$, diviſio inchoari nequit, niſi numeratori 1 adjectis duabus cyphris. Unde liquet quoto præfigendas eſſe duas cyphras: id quod indicio eſt, fractionem decimalem incipere a partibus centeſimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{112}$, diviſio non poteſt inchoari, niſi tribus cyphris numeratori 1 adjectis: quoto igitur præfiguntur tres ciphræ, & fractio decimalis incipit a milleſimis. Similiter ſi fractio fuerit $\frac{5}{1152}$; quoto denuo adjiciendæ ſunt cyphræ tres & fractio incipit itidem a milleſimis. In caſu tamen particulari dantur compendia ſingulos terminos per diviſionem in fractiones decimales reſolvendi, quando ſcilicet alii ex aliis jam inventis inveniri poſſunt. Quamobrem ſumamus ſeriem pro circulo

$$\sqrt{192}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{15\cdot 9}-\frac{5}{63\cdot 9^{2}}-\frac{7}{143\cdot 9^{3}}\ \&c.\right)$$

quam ex *Leibnitiana* deduximus (§. 242). Patet ex 192 extrahendam

eſſe radicem in fractionibus decimalibus (§. 274 *Arithm.*), continuata operatione ad tot loca, quot viſum fuerit. Quodſi hanc dividas per 4, habebis $\frac{1}{4}\sqrt{192}$, conſequenter numerum, a quo ſumma terminorum ſigno negativo affectorum ſubtrahenda venit. Dividatur jam eadem radix per 9, 9^2 ſive 81, 9^3 ſive 729, &c. ut habeatur $\frac{1}{9}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^3}\sqrt{192}$, &c. aut, quod perinde eſt, quotus anterior ſemper per 9, pro obtinendo proxime ſequente. Porro numerus $=\frac{1}{9}\sqrt{192}$ multiplicetur per 3, & factum dividatur per 15, ita prodibit numerus reſpondens $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$. Similiter numerus $=\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$ multiplicetur per 5 & factum dividatur per 63, ut prodeat numerus $=\frac{5}{63.9^2}\sqrt{192}$; atque ita porro. Quodſi enim terminos hoſce, in unam ſummam collectos, ſubtrahas a numero $=\frac{1}{4}\sqrt{192}$, relinquetur numerus peripheriæ circuli reſpondens, poſita diametro 1. Cum ſit $\sqrt{192} = 13.856406460551018348219$; erit $\frac{1}{4}\sqrt{192} = 3.464101615137754587055$ & porro, $\sqrt{192}$ per R deſignata & $\frac{1}{9}$ R per A, $\frac{1}{9^2}$ R per B, $\frac{1}{9^3}$ R per C, $\frac{1}{9^4}$ R per D & ita porro, ſive $\frac{1}{9}$ R $=$ A, $\frac{1}{9}$ A $=$ B, $\frac{1}{9}$ B $=$ C, $\frac{1}{9}$ C $=$ D & ita porro,

1.539600717839002038691	=	A
171066746426555782076	=	B
1900741626961730911 9	=	C
2111935141068589902	=	D
234659460118732211	=	E
26073273346525801	=	F
2897030371836200	=	G
321892263537355	=	H
35765807059706	=	I
3973978562189	=	K
441553173576	=	L
49061463730	=	M
5451273748	=	N
605697083	=	O
67299676	=	P
7477741	=	Q
830860	=	R
92318	=	S
10257	=	T
1139	=	V
126	=	X
14	=	Y

Quodſi jam ſit $a = \frac{3}{15}$, $b = \frac{5}{63}$, $c = \frac{7}{143}$, $d = \frac{9}{255}$, $e = \frac{11}{399}$ &c. continuata ſerie juxta legem progreſſionis, ut porro inveniantur valores f, g, h, &c. ſitque A. $a = \frac{3}{15 \cdot 9} \sqrt{192}$, B. $b = \frac{5}{63 \cdot 9^2} \sqrt{192}$, C. $c = \frac{7}{143 \cdot 9^3} \sqrt{192}$ &c. prodibit

307920143568700407738	=	A.	*a*
13576725906869506514	=	B.	*b*
930432964247001145	=	C.	*c*
74538887331832584	=	D.	*d*
6469308424325950	=	E.	*e*
589482701747539	=	F.	*f*
55498666127130	=	G.	*g*
5349138299252	=	H.	*h*
524749292768	=	I.	*i*
52191088058	=	K.	*k*
5248435654	=	L.	*l*
532582107	=	M.	*m*
54452235	=	N.	*n*
5602939	=	O.	*o*
579685	=	P.	*p*
60260	=	Q.	*q*
6290	=	R.	*r*
659	=	S.	*s*
69	=	T.	*t*
7	=	V.	*v*
9	=	X.	*x*
	+	Y.	*y*
322508961547961348592		Summa,	
3.464101615137754587055			
3.141592653589793238463		Periph. Circ.	

Series hæc cum numeris Ludolphi prorſus conſentit: notæ enim ultimæ non habetur ratio, quia accurata non eſt, ſaltem dubia, propterea quod ignoratur, qualis ſit proditurus, ſi calculus produceretur. Equidem calculus hic videtur admodum prolixus; quod ſi tamen quis eundem conferre voluerit cum calculo Ludolphi in Libro *de circulo* & *adſcriptis*, facile intelligit, quanto *Ludolphinus* ſit operoſior & moleſtior. Immo ſi quis ſeriem *Leibnitianam* in fractiones decimales reſolvere vellet, multo prolixiore calculo haberet opus, antequam peripheriam circuli ad tot loca produceret.

§. 245. Quamvis autem ex allato exemplo abunde perſpiciatur, quomodo ſeriebus infinitis ſit utendum; non inconſultum tamen exiſtimamus alterum adhuc addere exemplum. Si ſinus arcus ſit y, ſinus totus ſeu radius circuli 1; erit arcus

=y

$= y + \frac{1.1}{2.3} Ay^2 + \frac{3.3}{4.5} By^2 + \frac{5.5}{6.7} Cy^2 + \frac{7.7}{8.9} Dy^2 + \frac{9.9}{10.11} Ey^2$ &c. in infinitum. Sit y ſinus arcus 30°; erit is $= \frac{1}{2}$; adeoque ſeries degenerat in ſequentem $\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3.4} A + \frac{3.3}{4.5.4} B + \frac{5.5}{6.7.4} C + \frac{7.7}{8.9.4} D + \frac{9.9}{10.11.4} E$ &c. in infinitum; conſequenter ſi diameter fuerit 1, eadem ſeries exprimit arcum 60°. Quodſi ergo terminum primum ducas in 6, & qui hinc prodit 3, in $\frac{1.1}{2.3.4}$ coëfficientem ſecundi, ut habeas $\frac{1}{8}$, obtinebitur ſeries pro circulo $3 + \frac{1}{8} + \frac{3.3}{4.5.4} B + \frac{5.5}{6.7.4} C + \frac{7.7}{8.9.4} D + \frac{9.9}{10.11.4} E$ &c. Neque enim hic opus eſt, ut termini ſinguli multiplicentur per 6; quia ſequentem ſemper ingreditur proxime præcedens; adeoque primus, qui eſt ſextuplus primi in anteriore ſerie, terminos omnes ſequentes. Non igitur alia re opus eſt, quam ut $\frac{1}{8}$ reſolvas in fractionem decimalem 1250000000000000, ut habeas terminum ſecundum; hunc porro ducas in $\frac{3.3}{4.5.4}$ ſive $\frac{9}{80}$, hoc eſt, multiplices per 9 & dividas per 80, ut obtineas tertium 140625000000000; tertium vero ducas in $\frac{5.5}{6.7.4}$, ſeu multiplices per 25, & dividas per 168; ut prodeat quartus 2092633928571428; & ita porro. Quodſi enim terminos omnes addas, aggregatum erit peripheria circuli, cum numeris *Ludolphinis* conſentiens. Sane ſi quatuor ſaltem terminos addis, poſita diametro 10000, prout hic factum eſſe vides,

$$\begin{aligned} 3.\ 0000 &= A \\ 1250 &= B \\ 140 &= C \\ 20 &= D \\ \hline \text{Summa } 3.\ 1410 & \end{aligned}$$

habebimus pro peripheria 3141; cum nota ultima non ſit accurata. Reperitur adeo ratio diametri ad peripheriam ut 1000 ad 3141 cum *Ludolphinis* numeris conſentiens. Niſi adeo fractiones decimales ad multa loca extendere volueris, ſed in paucis numeris acquieſcas, quemadmodum fecere Archimedes, Ptolomæus, alii; exiguo tantum calculo opus eſt. Similiter brevi calculo iidem numeri inveniri poterant ex ſerie præcedente. Cum enim ſit $\frac{1}{4}\sqrt{192} = 3.46410$ &

$$\begin{aligned} 1.\ 53960 &= \tfrac{1}{9}R = A \\ 17106 &= \tfrac{1}{9}A = B \\ 1900 &= \tfrac{1}{9}B = C \\ 211 &= \tfrac{1}{9}C = D \end{aligned}$$

reperietur ut ante (§. 244)

30792 = A. *a*
1357 = B. *b*
93 = C. *c*
7 = D. *d*

32249 Summa
346410 = $\frac{1}{4}\sqrt{192}$

314161 Peripheria circuli, in qua quatuor numeri 3141, ut ante, cum *Ludolphinis* conſentiunt.

§. 246. Quod ſi reſolutio ſerierum infinitarum hic data probe perpendatur; nullus dubito fore ut, in ſeriebus ad uſum aptandis, nihil poſthac ſuperſit difficultatis. Inprimis autem hinc perſpicitur, quantum interſit, ut lex progreſſionis in infinitum ſit manifeſta; ne multo labore demum inveſtigandi ſint termini, quibus habemus opus, & ut termini ſequentes inveniantur ex antecedentibus; ſive id fiat per dependentiam eorundem a ſe invicem in formula generali, quemadmodum in exemplo altero (*§.* 245), ſive id ſingulari quadam ratione contingat in caſu particulari, quemadmodum in exemplo primo (*§.* 244). Intelligimus etiam quanta, in tractandis altioribus, attentione opus ſit ad maxime vulgaria, ne ea eidem ſeſe ſubducant, & per ambages incedamus, ubi brevior ducit ad ſcopum via. Ex. gr. notiſſimum eſt ex communi Algorithmo fractorum, ſi $\frac{1}{9}$ dividas per 9, quotum eſſe $\frac{1}{9^2}$; ſi $\frac{1}{9^2}$ porro dividas per 9, quotum eſſe $\frac{1}{9^3}$ & ſic porro in infinitum. Enimvero, ſi in exemplo primo huc animum minime advertas, & $\sqrt{192}$ ſive 13. 85640646055101834821 9 dividere velis per 9, per 9^2 ſive 81, per 9^3 ſive 279 & ita porro, operoſo calculo invenies numeros A, B, C, D &c. qui, continua diviſione antecedentis per 9, multo facilius eruuntur. Immo ſi quis una diviſione terminum quemcunque reſolvere vellet, v. gr. ſecundum $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$ ſive $\frac{3}{135}\sqrt{192}$, multiplicando ſcilicet 13. 85640 &c. per 3, & factum dividendo per 135; in ambages multo longiores incideret; adhuc longiores futuras, ſi terminus quilibet reduceretur ad pure irrationalem & ex eo extraheretur radix, veluti ſi fieret $\frac{3}{135}\sqrt{192} = \sqrt{\frac{1728}{18225}}$ atque inde extraheretur radix. Non exiſtimandum eſt, talia inutiliter moneri: niſi enim ad ea animum reflectamus, ubi obvia ſunt, attentioni noſtræ ſeſe ſubducent, ubi magis latent. Illuſtria dare poteramus exempla, niſi noſtrum foret ab invidioſis abſtinere, quæ nulla neceſſitas imperat. Ad vitandam itaque ἀβλεψίαν ſedato opus eſt animo; ne appetitus influat in determinationem operationum intellectus, in qua nullæ ipſius ſunt partes. Diſtinctæ notiones nullibi

nullibi negligendæ ſunt, ubi earum participes fieri poſſumus; præſertim ſi quis philoſophari conſtituit, & ad vitæ perfectionem tanquam ad ſcopum tendit. Diximus inſuper, quam difficile ſit de prærogativa formulæ unius præ altera ſtatuere, niſi utriuſque reſolutione obſervatis omnibus, quæ obſervari poſſunt, facta. Sane ſi formula poſteriore utaris pro circulo, & terminos reſolutos ſibi invicem legitime ſubordines, & idem facias cum priori; videbitur poſterior priori longe anteponenda. Enimvero ſi totam operationem in caſu priori conferas cum tota in altero; præſertim ubi diviſionem per novenarium tranſmutes in ſubſtractionem (§. 116 *Arithm.*); longe aliter ſenties. Nolo addere plura, ne videar in levioribus commendandis nimius; præſertim iis, qui, cum in calculis conſeneſcere decreverint, nec ſtudii Matheſeos utilitatem extra Matheſin quærant, illorum fructum proſpicere nequeant.

§. 247. In capite de cubatione ſolidorum & complanatione ſuperficierum tantummodo notandum eſt, quomodo elementa ſolidorum & ſuperficierum eorundem inveniantur; & quomodo per calculum ſummatorium, eruta ſoliditate vel ſuperficie corporis rotundi, inveſtigentur per calculum literalem theoremata praxi inſervientia. Inprimis hic attentionem meretur, quomodo ſolidum unum transformetur in aliud ipſi æquale. Ea cum facilia ſint, pauca tantummodo ſpeciminis loco exhibuimus, cum unuſquiſque per ſe plura addere poſſit.

§. 248. Methodus tangentium inverſa maximæ utilitatis eſt in ſublimioribus, atque ideo maximam quoque meretur attentionem. Ejus ſaltem primas lineas duximus; ut naſcatur methodi hujus idea in animis tyronum; ne hæſitent in problematis, quæ in Mechanica traduntur. Duo autem hic præ ceteris notanda ſunt; primum quomodo conſtructio æquationum reducatur ad quadraturam curvarum ſimpliciorum & earundem rectificationem, ut appareat, quomodo ſolvantur problemata, ſuppoſita quadratura curvæ vel rectificatione arcus; deinde quomodo ex æquatione differentiali ad logarithmicam deducatur modus differentiandi quantitates, quas logarithmi ingrediuntur (§. 243 *Anal. infin.*). Hujus enim uſus inſignis eſt in inveniendis logarithmis, tam numerorum vulgarium, quam ſinuum, atque tangentium; quemadmodum capite ſexto docetur. Eodem quoque artificio nititur calculus exponentialis, quem integra ſectione tertia expoſuimus, & conſtructio curvarum exponentialium, ope logarithmicæ, atque quantitatum, quas logarithmi ingrediuntur; cujus exempla dedimus capite altero hujus ſectionis. Hinc vero elucet inſignis lineæ logarithmicæ utilitas, quam nemo prævidere poterat, iis probe notanda, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Ratio-

nem jam dedimus in ſuperioribus (§. 176).

§. 249. Artificia, quibus utimur in inveſtigando modo differentiandi differentialia (§. 297 *Analyſ. infin.*), eadem ſunt, quæ ante adhibuimus ad inveſtigandas regulas differentiandi quantitates finitas, & quæ jam nobis innotuere in calculo literali, ubi algorithmum fractorum ex algorithmo integrorum, & algorithmum irrationalium ex algorithmo rationalium deduximus; ut adeo hinc appareat, quomodo quæ vulgaria videntur, haud raro proſint ad altiora; & quam utile ſit ad artificia, quibus utimur in facilioribus, animum attendere, ne impervia nobis videantur magis ardua. Cum Methodus determinandi puncta flexus contrarii curvarum non minus utilis ſit, ad ductum curvarum repræſentandum, quarum præter æquationem nihil novimus, quam methodus de maximis & minimis, & methodus determinandi puncta, in quibus curva rectam poſitione datam ſecat, quam in ſuperioribus illuſtravimus; illa vero a calculo differentiali pendeat; eandem quoque exemplis nonnullis illuſtrare lubuit. Etſi enim curva integra nondum conſtrui poſſit; ope tamen punctorum, quæ per eas methodos determinantur, ductum ejus imaginari licet. Exempla occurrent in Mechanica.

§. 250. In doctrina de evolutione curvarum, quam capite tertio proponimus, notatu maxime dignum eſt, quod cyclois ſua evolutione ſeipſam deſcribat (§. 350 *Analyſ. infin.*), cum hoc faciat ad perfectionem motus penduli, quo horologia automata ad maximam perfectionem perducuntur, quemadmodum in Mechanicis demonſtratur. Sane ea ipſa permovit HUGENIUM, ut de evolutione curvarum cogitaret, ſicuti ex egregio Mathematici ſummi *Tractatu de horologio oſcillatorio* intelligitur. Notandum præterea, quod inſerviat rectificationi curvarum, & ipſam curvedinem curvæ diſcernat; ut arcus circuli oſculatoris pro arcu curvæ alterius in praxi ſubſtitui poſſit (§. 331 *Anal. infin.*). Applicatio calculi differentialis in hoc argumento nihil habet, quod non ſit ex anterioribus manifeſtum. Hoc tamen adhuc attentionem meretur, quod determinatio radii oſculi, ſeu evolutæ, interdum faciat ad theoremata ſelecta eruenda, quemadmodum exemplo logarithmicæ docemus (§. 332 *Anal. infin.*

§. 251. Arithmetica infinitorum, invento calculo differentiali & ſummatorio, non amplius eum habet uſum quem habere poterat, ſi is nondum fuiſſet inventus. Eam tamen prætermittendam eſſe non duximus; ne quod ſit inventum, celebre inter recentiores Mathematicos nomen adeptum, quod a nobis non illuſtretur. Etſi autem pauca tantummodo de ea tradidiſſe videamur, plura

tamen

tamen dedimus, quam in prolixo opere Iſmaelis Bullialdi continentur. Eam illuſtrare voluerat Joannes Christophorus Sturmius in *Matheſi enucleata*; ſed cum eſſet artificiorum recentiorum ignarus, quod ſibi propoſuerat non perfecit. Quæ de termino ultimo ſeriei continuatæ evaneſcente notanda ſunt, ſatis perſpicue expoſuimus (§. 345 *Analyſ. infin.*), ut plura eam in rem annotari minime ſit opus. Ratio, cur uſum Arithmeticæ infinitorum extendi quaſi in infinitum licuerit ultra terminos, intra quos a Bullialdo coërcetur, in ſummatione potentiarum & numerorum pyramidalium conſiſtit, quam in Analyſi finitorum univerſali quadam ratione abſolvimus (§. 200 *& ſeqq.* & §. 216). In Arithmetica enim infinitorum ſemiordinatæ curvarum ſpectantur tanquam in certa numerorum ſerie progredientium, veluti potentiarum dati cujuſdam gradus in curvis parabolici generis (§. 349, 350 *Anal. infin.*). Unde analyſi ad analyſin Veterum propius accedente, quadraturæ curvarum quadrabilium deducuntur in Arithmetica infinitorum. Atque hoc artificium heuriſticum notari meretur.

CAPUT V.

De Studio Mechanicæ.

§. 252. Mechanica a Veteribus inventa fuit in uſum machinarum: Veteres enim laudabili exemplo in theoria ſemper reſpiciebant ad uſum in praxin; quippe cum in omni theoriæ genere intendenda ſit praxis, quemadmodum in Philoſophia ſedulo inculcamus. Primas ejus lineas duxit Archimedes in libris de æquiponderantibus, nec ultra eos terminos progreſſi ſunt Mathematici uſque ad Galilæum. Quoniam machinæ omnes ex paucis quibuſdam machinis ſimplicibus componuntur, quas potentias mechanicas appellare ſolent, nos machinas ſimplices diximus; in Mechanica non conſiderarunt niſi machinas ſimplices, vectem, axem in peritrochio, trochleam, cochleam, planum inclinatum & cuneum, quarum theoriam ampliſſimam, ſed nimis diffuſam dedit Varignonius in opere poſthumo. Conſiderarunt autem machinas haſce ſimplices in ſtatu æquilibrii, in quo nonniſi adeſt conatus ad motum, quam vim mortuam vocat Leibnitius; propterea quod ſublato æquilibrio, dum potentia motrix augetur, naſcitur motus diverſæ celeritatis, pro diverſo illius incremento, ſeu exceſſu potentiæ mo-

motricis ſupra pondus movendum. Inde eſt quod, in agitandis machinis, non modo potentiæ motrices conferantur cum pondere movendo; verum etiam ipſæmet ad pondus ipſis æquale, & reſiſtentiæ in motu machinarum ſuperandæ ad pondus æquivalens reducuntur; quatenus potentiæ cuilibet motrici, quoad effectum, ſubſtitui poteſt aliquod pondus, vi gravitatis, qua ad deſcenſum urgetur in machinam agens, ſeu eandem animans; & reſiſtentiis ſuperandis ſubſtituere licet pondus eandem potentiam motricem requirens, ſi elevari debet. Atque hæc probe notanda ſunt tyronibus, ut & mentem Veterum plenius aſſequantur, & in applicatione theoriæ machinarum ſimplicium ad praxin, hoc eſt, ad machinas compoſitas explicandas nihil ſentiant difficultatis. Patet hinc, quod LEIBNITIUS aſſeruit, Veteres nonniſi vis mortuæ notionem habuiſſe. GALILÆUS in *Dialogis de motu* ulterius primum progreſſus, & motum gravium deſcendentium, & projectorum explicare cœpit, non infeliciter: cum vero in finem præmiſit theoriam motus æquabilis. Attingit etiam nonnulla de motu pendulorum, ſed quaſi obiter. Accuratius vero, & data opera, in eundem inquiſivit HUGENIUS in Tractatu *de Horologio oſcillatorio*, & theoriam inprimis centri oſcillationis ſuperaddidit. Occaſione motus pendulorum idem incidit in vim centrifugam, quam in circulo ad examen revocavit, adjectis in fine Tractatus de horologio oſcillatorio theorematis de vi centrifuga, quorum demonſtrationes demum publici juris factæ ſunt in poſthumis. Inde NEWTONUS vires centrales, tam centripetas, quam centrifugas conſiderare cœpit etiam in curvis aliis, præſertim centripetis, & ad explicandum motum Planetarum theoriam tranſtulit, in *Principiis Philoſophiæ naturalis mathematicis*. CARTESIUS, in *Principiis Philoſophiæ*, leges motus ex percuſſione explicare aggrediebatur, ſed non ſatis feliciter, cum ad veritatem liquidam pertingere non potuerit. Poſtea vero WALLISIO, CHRISTOPHORO WREN & HUGENIO negotium felicius ceſſit; quorum ille leges motus corporum non elaſticorum, hi vero corporum elaſticorum bene explicarunt. Quoniam autem motus corporum diminuuntur propter reſiſtentiam medii, in quo moventur; in eandem quoque inquirere cœpit WALLISIUS; deinde vero hoc argumentum ulterius proſecutus eſt NEWTONUS in Principiis modo laudatis. Denique, cum calculus differentialis eſſet inventus, & a Geometris præclaris, quos inter eminent BERNOULLII fratres, ad ſolutionem problematum phyſico-mechanicorum transferretur; deſcenſus & aſcenſus corporum in lineis curvis expendi cœpit. Atque ſic tandem latiſſimus

evaſit

evaſit Mechanicæ campus, qui arctis nimium limitibus a Veteribus includebatur. Nos igitur Elementa Mechanicæ daturi, quæ ſatisfacerent, non minus inventorum antiquorum, quam recentiorum rationem habuimus. Hæc probe notanda ſunt, ut idea quædam Mechanicæ animo concipiatur, definitio rectius intelligatur, nec quiſquam miretur, ubi viderit, in Elementis noſtris Mechanicæ longe alia pertractari, quam quæ vulgo in libellis hujus nominis reperiuntur.

§. 253. Qui ſolam praxin mechanicam curæ cordique habent, ii, prætermiſſis ceteris omnibus, ad caput decimum quintum ſtatim digrediantur: in eo enim & ſequentibus continentur, quæ ad machinarum intellectum faciunt. Quoniam nobis theoriam cum praxi ſemper conjungere propoſuimus, potentiarum quoque motricium ad machinas applicationem, & machinarum uſitatiorum conſtructionem explicare voluimus: quæ duo vulgo in libellis mechanicis negliguntur. A potentiarum motricium ad machinas applicatione pendet ſtructura externa machinarum, quæ abſque illa intelligi nequit; quemadmodum ſtructura interna non intelligitur abſque notitia machinarum ſimplicium. Libellatio vulgo in Geometria practica docetur: ſed cum nos Geometriam practicam a theoretica non ſeparaverimus; libellationis vero indiſpenſabilis uſus ſit in conſtruendis molendinis, quæ aquarum vi agitantur; eandem quoque hic explicare viſum fuit, ubi de applicatione potentiarum ad machinas agitur. Quoniam tamen ad machinas applicantur, quæ de æquilibrio ſolidorum c. 3, quod de centro gravitatis agit, demonſtrantur in prima ejus parte, & quæ c. 4, de quiete & lapſu corporum gravium docentur; expenſis definitionibus machinarum ſimplicium, addendæ ſunt definitiones ac propoſitiones horum capitum, eo modo, qui ad primum cognitionis gradum acquirendum ſufficit. Ubi vero animo ſatis comprehenderis, quæ ad machinas, tam ſimplices, quam compoſitas ſpectant; non inutile fuerit, ſi ceterorum quoque theorematum notitiam quandam tibi compares ex anterioribus, prætermiſſis tantummodo problematis, quæ analytice ſolvuntur per calculum; ne ignores principia, quæ in praxi accuratiori uſui ſunt.

§. 254. Qui praxin mechanicam demonſtratam expetit, ad ſecundum cognitionis gradum adſpirans; eum addere debere demonſtrationes per ſe patet. Non tamen ideo neceſſe eſt, ut omnis theoriæ campum emetiatur; ſed ſufficiunt ea, quæ ad intellectum machinarum faciunt. Quænam vero ea ſint, facta demonſtrationum cap. 15, contentarum analyſis, eo quidem modo, quam in Logica (§. 922,) ſatis diſtincte explicavimus, & exemplis illuſtravimus, docet.

docet. Quodſi quis praxin ante hauſerit, quam ad theoriam accedat, quemadmodum modo (§. 253) inculcavimus; ei haud difficile fuerit ea, quæ ſibi uſui ſunt, diſcernere a ceteris, quæ inſuper habere poteſt. Nec nocet, ſi vel maxime quædam addiſcat, quorum in machinis uſum nullum perſpicit: neque enim ſolum fieri poteſt, ut in poſterum uſus quidam ſeſe offerat, quæ prævideri haud quaquam poterat; verum etiam omnis theoriæ tractatio certiſſimam ſpondet in firmandis ratiociniis mechanicis utilitatem, & menti acumen quoddam conciliat, ut perſpicacius videamus aliis, in iis quæ ad machinas ſpectant. Acumen vero mechanicum, & prompta de machinis ratiocinatio, non nullius cenſeri debet momenti.

§. 255. Qui denique ad tertium cognitionis gradum aditum ſibi parare geſtit, is nihil eorum prætermittere debet, quæ in Elementis noſtris Mechanicæ continentur; ſed omnia potius accurata induſtria perſequi tenetur; quemadmodum in ſuperioribus in genere præcepimus. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat, intendit habitum ex iis, quæ cognovit, inveniendi alia ſibi adhuc incognita. Opus igitur habet principiis, quibus in ratiocinando utatur; opus habet artificiis heuriſticis, quæ data occaſione imitetur. Quæ a nobis demonſtrantur, vel analytice eruuntur, ſunt principia, per quæ aditus patet ad ulteriora. Reſolutiones analyticæ problematum, quas damus, continent artificia heuriſtica a lectore attento annotanda, vi perſpicaciæ quam inculcavimus, cum de ſtudio Algebræ ageremus. Atque ea ratio eſt, cur problemata phyſico-mechanica in caſu particulari ſolverimus, in quo ſoluta a primis inventoribus; etſi ſubinde quoque docuerimus, quomodo problemata particularia ad univerſalitatem reducantur. Plus enim artis plerumque deprehenditur in ſolutionibus particularibus, quam in univerſalibus; multoque difficilius fuit primis inventoribus dare ſolutiones particulares, quam deinceps aliis, qui iiſdem omnem univerſalitatem conciliare voluerunt. Quamobrem qui non ad pompam ſcripſimus, (levitate quadam animi in ambitionem adducti, quæ cum condonanda ſit homini in lineis & calculis ætatem omnem conſumenti, ob egregia in ſcientiam merita, in Philoſopho tamen ferenda non eſt, qui non minus appetitum, quam intellectum, ſeu facultatem cognoſcitivam perficere tenetur;) ſed utilitatem diſcentis unice reſpicimus, ad quam tanquam ad metam contendimus; eundem quoque a via regia deducere non debuimus, quam calcarunt, qui ad inacceſſa aditum pararunt; ut appareat, quomodo quæ impervia videntur, humano ingenio pervia reddantur. In inprimis cognitu utiliſſimum, ſi non neceſſarium, dicendum

iis

iis qui Artem inveniendi extra Matheſin exercere ſibi propoſitum habent. Poſtquam enim abunde convicti ſumus, quam neceſſarium ſit, ſtudio Matheſeos etiam ſublimioris, perficere intellectum, ut extra ejus pomœria inoffenſo pede progrediaris; hanc quoque utilitatem, vulgo non ſatis animadverſam, etſi a multis commendatam, in conſcribendis Elementis noſtris intendimus, operamque dedimus, ne vana ſpe lactaremus lectoris animum.

§. 256. Enimvero non opus eſt, ut ad particularia deſcendamus: neque enim alia re opus eſt, quam ut ea, quæ ſuperius de ſtudio Matheſeos in genere, & de ſtudio præſertim Algebræ in ſpecie, præcipimus, ad lectionem Mechanicæ transferantur. Quamvis enim hinc inde nonnulla ſcitu non inutilia annotari poterant; tantam tamen prolixitatem non fert præſens inſtitutum; & qui per ſuperiora ad ea, quæ ſunt methodi, ſufficientem attentionem, cum acumine, ubivis afferre didicit, perſpicillis propriis uſus animadvertet, quæ eum ſubterfugere non debent, nec manuductione alterius indiget, qui firmo pede incedere valet. De duobus tamen artificiis, quibus utimur in Mechanicis, prorſus ſilere nefas eſt; propterea quod in Matheſi pura iiſdem locus non eſt, in Philoſophia tamen naturali, & in ipſa quoque morali, maximam utilitatem habent. Ut facilius intelligantur, quæ dicenda ſunt; ſumamus caſum particularem. Gravia moventur in rerum natura per medium reſiſtens, veluti per aërem, aut aquam. Enimvero in Mechanicis conſideramus primo motum gravium in medio non reſiſtente; qualis nempe foret, ſi nihil adeſſet, quod motum ejus quomodocunque impediret; ſeu quatenus a ſola gravitate tanquam cauſa dependet. Ubi enim conſtat, qualis ſit per ſe, nec difficile eſt poſtea quoque definire, quid per reſiſtentiam medii detrahatur; ut intelligatur, qualis ſit in medio reſiſtente. Similiter in æquilibrio ſolidorum, pondera primum conſideramus tanquam lineis gravitatis expertibus applicata; ut quale in ſe ſit pateat. Deinde vero idem applicamus ad pondera ex gravibus ſuſpenſa, veluti longurione aut haſta quadam ferrea. Eodem prorſus modo, in Philoſophia morali, appetitus ſenſitivus conſideratur in ſe, independenter a rationali; deinde vero etiam, quatenus ab eodem dependet, & vice verſa. Similiter appetitus ſpectatur ut dependens a ſolo ſenſu, deinde vero ut ſimul dependens ab imaginatione. Qui concurſum plurium facultatum ad eandem actionem non diſtincte expendunt, ut ſigillatim inquirant, quid ab unaquaque proficiſcatur; nunquam ad veritatem liquidam pertingunt; ſed ſumma imis miſcent; aut cœcutientes hæſitant, quid ſtatuere debeant; & veritatem, vel nullam agno-

agnoſcunt, vel eam rationi humanæ imperviam temere pronunciant. Deinde probe quoque notandum venit artificium, quo problemata phyſico-mechanica reducuntur ad Geometriam puram, ut per eandem ſolutio in poteſtatem redigatur: id quod inprimis locum habet in tranſitu Geometriæ ad Phyſicam; ut tractare naturam mathematice liceat. Utile eſt hoc artificium in omni cognitione mathematica, qualis etiam locum habet in Pſychologia, & in variis Philoſophiæ practicæ capitibus; etſi hactenus de ea non cogitarint Mathematici; quippe principiorum philoſophicorum ignari, nec Philoſophi, qui ſubtilitates mathematicas a ſe alienas exiſtimarunt. Erit autem tempus, quo, Philoſophia noſtro more magis exculta, cognitionem mathematicam ultra eos, intra quos hactenus coarctatur, terminos etiam ad talia provehent, in quibus quod locum habeat, hactenus vix ſibi perſuadere patiuntur. Quæ hic ſpeciminis loco in medium afferuntur, excitare debent attentionem lectoris ad ea artificia, quibus methodus amplificatur, & quæ pauci in Matheſi imitantur in caſu ſimili; extra eandem vero ut adhibeat nemo cogitat.

§. 257. In reſolutione problematum phyſico-mechanicorum, id quoque conſiderandum eſt, utrum ſolvantur in hypotheſi naturæ, an vero in aliena. Illud obtinet, ſi quod ſumitur in rerum natura, revera ita ſeſe habet; hoc autem, ſi minus. Exempli loco eſto acceleratio gravium. Motum gravium continuo accelerari, experientia conſtat; nec minus liquet, naturæ conveniens eſſe, ut certa lege acceleretur. Quodſi, in ſolutionibus problematum de motu gravium, lex accelerationis ſumatur, qualis obtinet in rerum natura; eadem in hypotheſi naturæ ſolvuntur. Si vero alia ſumatur, quam quæ in rerum natura obtinet; eadem ſolvi dicimus in hypotheſi aliena. Geometræ perinde eſt, in quacunque hypotheſi problema ſolvat, modo hypotheſis non ſit impoſſibilis, libera nimirum a contradictione. Enimvero in Phyſica non ſunt uſui niſi ſolutiones, quæ hypotheſi naturæ nituntur. Hinc qui nonniſi Geometram agit, problema ſolvit in omni hypotheſi poſſibili; Phyſico relinquens ut hypotheſin naturæ definiat, & ad eandem ſolutionem generalem applicet, vel ex pluribus particularibus eam ſeligat, quæ inſtituto ſuo convenit. Quod ſi dicas, ſolutiones in hypotheſi aliena nullius eſſe utilitatis; lubens concedo, ſi non de alia utilitate ſermo fuerit, quam quæ in Phyſica locum habet; nego autem, ſi de utilitate ſimpliciter ſermo fuerit. Neque enim deſtituitur ſuo in Matheſi pura uſu; qualis eſt incrementum Artis analyticæ magni omnino faciendum. Non igitur contemnenda ſunt magna Geometrarum molimina, quæ per ſe ad cognitionem naturæ

mathe-

mathematicam nil conferunt. Sufficit enim detegi methodos, per quas ea in poteſtate noſtra conſtituitur, quam primum hypotheſes naturæ innotuerunt. Quid quod ſolutiones problematum, in alienis hypotheſibus factæ, conducant ad illas inveſtigandas; quatenus ad experimenta ducunt, de quibus alias non cogitare daretur. Quoniam principia Philoſophiæ naturalis mathematica cognitioni naturæ mathematicæ inſervire debent; rigoroſe loquendo talia non ſunt, niſi quæ hypotheſibus naturæ nituntur. Et ſi certam deſideres cognitionem, hypotheſes naturæ evinci debent, ne de earum veritate ullum ſuperſit dubium. Quoniam tamen indirecte ad cognitionem naturæ mathematicam proſunt, quæ ex alienis quoque hypotheſibus ducuntur, quemadmodum modo annotavimus; & in Phyſicam quoque admittuntur hypotheſes philoſophicæ, etſi nondum certæ, probabilitate tamen non deſtitutæ, quatenus ad veritatem liquidam inveniendam viam ſternunt (§. 127 *Diſc. prælim.*); ſit ita, quod non ingredi debeant, tanquam principia, demonſtrationem propoſitionum, quæ in Phyſicam tanquam dogmata admittuntur (§. 128 *Diſc. prælim.*); imprudens reprehenderit, quod principia Philoſophiæ naturalis mathematica dicantur, quæ ex hypotheſibus alienis, & ex aliis, quas naturæ hypotheſes eſſe nondum certo conſtant, deducuntur. Ecquis propterea invideret titulum *Principiorum Philoſophiæ naturalis mathematicorum* celebratiſſimo operi Viri ſummi Isaaci Newtoni; quo magno ſuo merito tantam nominis celebritatem conſecutus? Cauti tamen ac circumſpecti eſſe debemus; ne quæ, ob uſum quem indirecte habent, principia Philoſophiæ naturalis mathematica tolerando ſenſu dicuntur, pro principiis proprie ac rigoroſe dictis habeantur: hoc enim cederet in detrimentum ſcientiæ philoſophicæ. Nemo igitur Philoſophus probaverit, ſi qui hypotheſes *Newtonianas*, eas præſertim, quibus nonniſi in Matheſi locus conceditur, pro principiis Philoſophiæ naturalis ſumunt, & neſcio quam Philoſophiam *Newtonianam* exſculpunt; non modo Phyſicam cum Philoſophia, hoc eſt, cum genere ſpeciem, verum etiam cognitionem mathematicam cum philoſophica confundentes. Etſi in Virorum magnorum meritis extollendis liberales ſimus; non tamen eorum laudes in præjudicium veritatis producimus: id quod ne quidem in adulatore ferendum. Valet hic quam maxime tritiſſimum illud; Amicus Socrates, amicus Plato, amicus Ariſtoteles, ſed magis amica veritas. Ceterum notandum eſt, inter hypotheſes alienas & hypotheſes naturæ, dari genus quoddam earum intermedium, quæ non invita experientia, ob commoditatem praxeos, in locum

hypotheſium naturæ aſſumi poſſunt, immo debent; ne præter neceſſitatem difficultatibus praxin immergas, quam ſimplicem ac expeditam eſſe oportet; & quas adeo convenienter admodum *Vicarias* dixeris. Exemplum habemus in motu gravium. Cum gravia vi gravitatis ferantur ad centrum terræ, in motu projectorum directiones ſunt convergentes, utpote in centro Terræ concurrentes. Hypotheſis adeo directionum convergentium, naturæ hypotheſis eſt. Hoc tamen non obſtante, recte cum GALILÆO in ejus locum ſurrogatur hypotheſis directionum parallelarum; propterea quod in iis diſtantiis, in quibus experimenta ſumere licet, lineæ convergentes pro parallelis citra errorem aſſignabilem, in praxi inde metuendum, haberi poſſunt. Referendæ ſunt hypotheſes iſtæ vicariæ ad ea, quæ ſunt toleranter vera; & quorum plurima in Matheſi occurrunt exempla, ex ea in Philoſophiam minime inferenda.

§. 258. Quoniam in rerum natura nulla niſi motu contingit mutatio: Mechanica vero motus ſcientia eſt; ad quam etiam recte refertur ſtatus æquilibrii, quo ſublato, oritur motus; dubium ſupereſſe poteſt nullum, quod Mechanicæ principia in explicandis naturæ phænomenis uſum habeant. Quamobrem qui in uſum Phyſicæ Mechanicam addiſcit; definitiones ac theoremata de motu, & æquilibrio ſolidorum, cognita atque perſpecta ſibi reddere debet. Quodſi demonſtrationes difficiliores videantur, quam ut eas capere poſſit; vel ſi tantum temporis impendere nolit, quantum iis percipiendis ſufficit; ſatis erit, ſi hiſtoricam ſaltem cognitionem ſibi acquiſiverit, in eo cognitionis gradu acquieſcens, quem ſupra primum diximus. Quando enim principia mechanica in Phyſica applicantur, non attenta demonſtratione, ſumuntur tanquam vera; adeoque quoad applicationem perinde eſt, ſive demonſtrationem animo comprehenderis, ſive eam non attigeris. Abſit autem, ut quis ſibi perſuadeat, nos Philoſophum a demonſtrationibus mathematicis arcere velle; quas non modo neceſſarias agnoſcimus, ne ſine convictione tanquam verum ſumas, quod ad reddendam rationem phænomenorum naturæ applicas, conſequenter ut certa tibi ſit rerum naturalium cognitio; verum etiam quia habitus demonſtrandi, omni modo perficiendus, ad recte philoſophandum in Phyſica conducit; immo nec in eadem demonſtrationibus geometricis ſemper ſuperſedere licet, etſi cognitionem mathematicam a philoſophica ſeparaveris. Ceterum non inutile eſt præcipua theoremata mechanica, in eorum gratiam qui demonſtrationes capere, vel non poſſunt, vel nolunt, experimentis comprobari; ut veritatem a poſteriori agnoſcant, quam a priori agnoſcere minime valent: id quod in Phyſica

tanto magis ſatisfacit, quanto plura in eadem aſſumenda ſunt, nonniſi experientiæ fide. Proſunt autem experimenta mechanica etiam Mathematicis, ut conſtet de rationis cum experientia conſenſu, tantoque magis exploratum ſit, quod ratiocinando veritatem fuerint aſſecuti. Eadem commendanda ſunt iis, qui ſolam praxin Mechanicæ curant, ne in reddendis rationibus ſumere teneantur, ſola autoritate aliena confiſi, quæ nullo modo vera perſpiciunt.

§. 259. Qui ad Matheſin ſublimiorem adſpirant, iis imprimis commendanda ſunt, quæ in capite primo, uſque ad decimum quartum incluſive, leguntur. Etenim iis familiaria eſſe debent theoremata de motu, quemadmodum theoremata de ratione quantitatum, & theoremata Geometriæ elementaris familiaria experiri debet, qui in Matheſi inoffenſo pede progredi voluerit. Dedimus præterea problematum phyſico-mechanicorum ſolutiones, quæ Analyſeos applicationem inſinuant, qualis in Matheſi ſublimiori requiritur; ut adeo artem doceamus per exempla, quemadmodum in Algebra fecimus. Quemadmodum adeo, cum de ſtudio Algebræ ageremus, docuimus quomodo annotanda ſint artificia in futurum uſum, & hinc inde memoriæ infigenda theoremata, quæ analytice eruuntur; ita utrumque etiam quoad problemata in Mechanica ſoluta notandum. Prolixum nimis foret, ſi eadem induſtria, qua in explicando Algebræ ſtudio uſi ſumus, hic quoque ſingula perluſtrare vellemus. Quamobrem hoc propriæ lectoris ad ſuperiora ſatis attenti meditationi relinquimus.

§. 260. Denique demonſtrationes ſyntheticas analyticis miſcuimus; cum ad utrumque genus præparare voluerimus lectorem noſtrum. In demonſtrationibus autem ſyntheticis accuratam ſervavimus formam, quam vi regularum logicarum habere debent: id quod facile experietur, qui eaſdem eodem modo reſolvere voluerit, quo ſupra geometricas reſolvere docuimus. Propoſuimus quoque demonſtrationes completas, ne quid divinandum lectori relinquatur; quemadmodum faciunt qui peritis ſcribunt; ac ideo citamus, quæcunque ex Arithmetica & Geometria elementari ſumuntur; ne a ſtudio Mechanicæ arceantur, qui Matheſin puram nondum adeo familiarem experiuntur, ut per ſe aſſequantur, quæ ex anterioribus ſupponuntur. Ac idem obſervamus in problematum analytica reſolutione; ne quid deſit, quod ad facilitandum eorum intellectum conducere poſſit. Neque enim hoc pacto ſolum conſequimur, ut lector noſtrorum Elementorum, abſque multo laboris ac temporis diſpendio, addiſcat quæ diſcenda ſunt; verum etiam ut meditationibus conſummatis adſueſcat, quibus in Philoſophia, & ſuperioribus, quæ dicuntur, Facultatibus opus habet.

CAPUT VI.

De Studio Hydroſtaticæ, Aërometriæ & Hydraulicæ.

§.261. HYdroſtatica tota cognitu utilis iis, qui praxi Mechanicæ ſtudent. Sufficit autem iisdem primus cognitionis gradus. Enimvero ne ſenſus theorematum videatur obſcurus, ſingula exemplis numericis illuſtranda. Ex. gr. Theorema 14, §. 55, hujus tenoris eſt: *Corpus ſpecifice gravius, in fluido leviori, eam ponderis ſui partem amittit, quantum eſt pondus fluidi ſub eodem volumine.* Ponatur itaque corpus ſpecifice gravius, quod aquæ immergitur, eſſe cubum, cujus latus unius pedis. Cum juxta MORLANDUM (§. 65) pes cubicus aquæ ſit 70 librarum, cum 2 unciis; quodlibet corpus, aqua ſpecifice gravius, amittet pondus 70 librarum & 2 unciarum. Quodſi ergo totum pondus fuerit 100 librarum; intra aquam ſuſpenſum non erit niſi 29 librarum, 14 unciarum. Siquidem veritatem principiorum hydroſtaticorum a poſteriori cognoſcere volueris; facillime ſingula experimentis comprobari poſſunt, qualia deſcripſi Tomo primo Experimentorum idiomate patrio evulgatorum. Theoremata, quæ capite primo de corporum gravitate & levitate ſpecifica leguntur, ſolis exemplis numericis illuſtrari ſufficit. Ex. gr. Theorema 1, §. 17, tale eſt: *Si duo corpora eandem denſitatem habuerint; maſſæ ſunt ut volumina.* Sumamus adeo duos dari globos plumbeos, quorum unus 5, alter 9 librarum. Quoniam maſſæ, ſeu quantitates materiæ, æſtimantur pondere, quemadmodum in vulgus notum eſt; erunt etiam volumina, ſeu magnitudines horum globorum, ut 5 ad 9; nempe ſi magnitudo minoris diviſa concipiatur in partes quinque æquales, iſtiuſmodi partium 9 erit magnitudo majoris. Quodſi ergo magnitudo unius conſtiterit in menſura abſoluta, veluti ſi detur in digitis cubicis Rhenanis; per regulam trium invenietur in eadem menſura alteræ. Iſtiuſmodi exempla ſimul oſtendunt theorematum uſum, quem facere poſſunt, qui praxi operam dant. Erunt autem tanto utiliora, & tanto certiorem ſpondent uſum in praxi, ſi fuerint vera, numeris per experimenta definitis.

§. 262. Multum quoque uſum habet Hydroſtatica in Philoſophia naturali; cum multorum phænomenorum inde reddatur ratio. Quamobrem ſi quis Mathematum imperitus ad Phyſicam accedit, principiorum tamen hydroſtaticorum ignarus eſſe

eſſe non debet. Conſultum igitur eſt, ut primum ſaltem cognitionis gradum acquirat, eadem obſervans, quæ modo præcepimus (§. 258). Inprimis autem qui Phyſicæ operam navare decrevit, principia hydroſtatica, experimentorum fide, tanquam vera amplecti, ſibique familiaria reddere debet. Experimenta huc facientia dabimus ſuo loco, quando ordo in Philoſophia nos ad experimenta phyſica deſcribenda, & principia quæ in ſcientia naturali uſui ſunt, inde ſtabilienda deducet. Quinam vero ſit horum principiorum in Philoſophia naturali uſus, ſuo patebit loco, ubi eandem eadem methodo trademus, qua hactenus in Metaphyſica uſi ſumus, & nunc in Philoſophia practica utimur. Quodſi quis in omni Matheſi fuerit prorſus peregrinus ac hoſpes, hiſtoricam tamen propoſitionum hydroſtaticarum cognitionem acquirere valet, obſervans ea quæ de primo cognitionis gradu ſupra, capite primo docuimus, & breviter præcedente paragrapho annotavimus; modo ſibi terminos quoſdam perſpectos reddat: id quod facile fieri poterit, ſi indicis auxilio evolvat definitiones, quibus explicantur; veluti quid ſibi velit ratio compoſita, quid directa, quid reciproca, qui termini in Arithmetica explicantur. Sane etiam Mathematum imperitus terminis tamen mathematicis uti debet, quoties aliis verbis mentem ſuam commode exprimere non licet, ſeu quoties loquendum de iis quæ ad objectum Mathematicorum ſpectant; quemadmodum Phyſicus terminis Medicorum utitur, ſi de rebus ad Medicinam pertinentibus ipſi dicendum. Qui enim de re quadam loqui vult, noſſe quoque debet nomen ejus.

§. 263. Equidem demonſtrationes hydroſtaticæ nihil prorſus habent difficultatis; præſertim ſi quis in anterioribus, multo difficilioribus, jam fuerit verſatus; negandum tamen non eſt, quod, cum ſubſidio figurarum deſtituamur, quæ imaginationem juvant, termini generales, quibus hic utimur, eas reddant captu difficiliores, quemadmodum ipſas propoſitiones intellectu. Conſultum igitur eſt, ut demonſtratio applicetur ad caſum particularem, quemadmodum fecimus in theoremate 14, *§.* 55, ubi pro corpore ſpecifice graviori ſumſimus cubum pollicarem plumbeum, pro fluido leviori aquam; adeoque pro volumine cubum pollicarem ſeu digitum cubicum. Hoc pacto enim idea imaginationi ſuggeritur, qualem in Geometria ſiſtit figura. Immo ſi ita viſum fuerit, ſchema quoque delineari poteſt, quod cubum intra aquam in vaſe vitreo ſuſpenſum repræſentat. Neque vero verendum eſt, demonſtrationibus hoc pacto detrahi ſuam univerſalitatem, & probato caſu particulari, argumentando a particulari ad univerſale, colligi veritatem theorematis univer-

ſaliter

ſaliter enunciati. Etſi enim idea, ad quam dirigitur demonſtratio, repræſentet caſum maxime particularem; cum tamen in demonſtrando non ſumamus niſi univerſalia, quæ inſunt, ut eodem ſucceſſu particulare quodcunque aliud in illius locum ſurrogari poſſit; quod ex univerſalibus concluditur utique univerſale eſt. Sane in Geometria quoque, figura ad quam refertur demonſtratio, ſingulare quid eſt, cujus idea particulare refert, v. gr. triangulum, cujus anguli ſunt datæ magnitudinis, & latera in data quadam ratione. Enimvero cum non ex particulari, ſed univerſali, quod ideæ ineſt, procedat demonſtratio; univerſalitati non officit, quod, dum intellectus concipit univerſale, in imaginatione hæret idea quædam ſingularis, quæ caſum quendam particularem repræſentat, quoad ea quæ ipſius vi facile diſtinguuntur, nudo reflexionis actu accedente. Quamdiu in ratiocinando nonniſi vocabulis utimur, univerſalia ab imaginibus ſeparare non licet; quippe quæ non intelliguntur, niſi quatenus univerſalia in ſingularibus, ſeu imaginibus, intuemur. Hæc ſatis aperta ſunt iis, qui in Pſychologia noſtra fuerunt verſati. Ceterum eodem artificio utendum eſt in Phyſica, ſiquidem demonſtrationes facilitare volueris, quales hactenus dare neglexerunt Phyſici. Etſi enim hoc intenderit HONORATUS FABRY, qui in præfatione methodum ſibi optime perſpectam, immo tritam affirmat; ſi tamen in iis, quæ mathematica non ſunt, prætenſas demonſtrationes examines; quantum diffideant a genuina earum forma, ſuperiorum gnarus facile deprehendet. Eidem quoque artificio locus eſt in ipſa Philoſophia practica, ſi caſum theorematis, vel problematis, exemplo quodam, ſive vero, ſive ficto, explices, quod imaginem quandam imaginationi præſentem ſiſtit; & ad idem demonſtrationem referas, quemadmodum in Geometria ad figuras; quatenus nempe in imagine, quæ exemplum repræſentat, attentionem non dirigis niſi ad univerſalia, quæ hypotheſis theorematis vel reſolutio problematis continet. Immo in ipſis Metaphyſicis idem imitari licet; quidni debemus? quamdiu deſideratur Characteriſtica generalis, vi cujus notiones abſtractæ qualitatum ab imaginibus ſeparantur, & calculus qualitatum a calculo magnitudinum utique diverſus, quem literalem vulgo vocamus, ut characterum combinationes in locum ratiociniorum ſuccedant. In hiſce enim continetur Algebra philoſophica, cujus aliam prorſus ideam ſibi finxit ROBERTUS HOOKE in Poſthumis, & quam ſpecioſam generalem appellavit LEIBNITIUS. Sed de hac dixi, quæ ſufficiunt, ut intelligantur termini, in Pſychologia empirica.

§. 264. Elementa Aërometriæ eo fine conſcripſimus, ut ſpecimine quodam

dam non admodum difficili doceremus, quomodo Matheſis ad experimenta applicetur; & ideam quandam cognitionis mathematicæ in Scientia naturali animo legentium inſinuaremus; ſimulque uſum Algebræ in Phyſica, exemplis non nimis difficilibus, demonſtraremus. Cum poſtea Elementa Matheſeos univerſæ ederemus, Aërometriam in numerum diſciplinarum mathematicarum referre nulli dubitavimus; præſertim quia principiis ejus opus habemus in Hydraulica, quæ dudum inter diſciplinas mathematicas locum obtinuit. Eodem nimirum jure, quo Hydroſtatica, & Mechanica, immo etiam Optica, pro partibus Matheſeos habentur; Aërometria quoque pars ejuſdem habetur. Quamobrem facile patet, hanc Matheſeos partem inprimis commendandam eſſe iis, qui Scientiæ naturali operam navare decreverunt; maxime ubi in cognitione philoſophica ſubſiſtere non voluerint, ſed ad mathematicam aſcendendi animum habuerint. Supponit autem Hydroſtaticam, cujus principia ad aërem, tanquam fluidum grave, applicantur. Quamobrem illi ſtudere ante debes, quam ad Aërometriam accedas. Supponuntur etiam pauca ex Mechanica, quemadmodum ex citationibus videre eſt. Etſi autem Aërometria potiſſimum ad cognitionem naturæ mathematicam manuducit tyrones; in genere tamen docet, quomodo Phyſica methodo demonſtrativa tractari debeat; quatenus in ea etiam continentur, quæ abſque principiis mathematicis demonſtrantur. Diſcimus præterea ex ea, quamvis in reliqua Philoſophia cognitio philoſophica a mathematica ſeparari poſſit, in Phyſica tamen, niſi certitudini deeſſe velis, fieri non poſſe, quin ſubinde nonnulla ex principiis mathematicis demonſtrentur.

§. 265. Quibus ſola praxis ſatisfacit, illis inſervient problemata de antliæ pneumaticæ, barometrorum, thermometrorum, & hygroſcopiorum conſtructionibus, una cum ſcholiis, quibus horum inſtrumentorum uſus dilucidatur. Non tamen negligenda ſunt theoremata & corollaria, quibus tum fabrica, tum uſus iſtorum inſtrumentorum perfectius intelligitur. Definitiones quoque expendendas eſſe per ſe patet. Cum in Elementis Matheſeos Germanicis ea potiſſimum tradiderimus, quæ ad praxin faciunt, etſi oculatam, non omiſſis ſcilicet demonſtrationibus; ex Aërometriæ quoque Elementis ea excerpſimus, quæ praxin propius reſpiciunt, & ad theoriam uberiorem præparant lectorem ex Latinis deinceps hauriendam.

§. 266. Inprimis autem Aërometria inſervire poteſt illis, qui ad tertium cognitionis gradum contendunt. Si enim animum ad ea attendunt, quæ ſunt methodi; ideam quandam exemplarem applicationis Matheſeos puræ, Algebræ præſertim, ad experi-

perimenta & obſervationes inde haurient; ut in cognitione rerum naturalium certo tramite progrediantur. Multo enim clarius etiam tyrones hinc perſpiciunt utilitatem cognitionis mathematicæ, tum ad certitudinem in Scientia naturali conſequendam, tum ad praxin accuratiſſime exercendam, quam ex ſublimibus iſtis problematis Phyſico-mechanicis, qualia in Mechanica complura explicavimus. Quamobrem cum pauca ſint, quæ ex mechanicis in Hydroſtatica & Aërometria ſumuntur, demonſtrandi principia, non inconſultum erit, ſi qui ex Mechanica tantummodo principium de æquilibrio ſolidorum perſpexerunt, ſepoſitis ceteris, ad Hydroſtaticam & Aërometriam ſtatim ſe conferant. Quodſi enim, in hiſce diſciplinis intellectu non adeo difficilibus, applicationem Matheſeos puræ, & Algebræ inprimis, ad Naturæ cognitionem didicerint; minus difficultatis experientur in ſublimioribus, quæ in Mechanica traduntur. Non eſt quod objicias, Elementa Matheſeos cum ſint in tyronum gratiam conſcripta, ut ſcientiam inde hauriant, in iis quoque faciliora difficilioribus fuiſſe præmittenda; adeoque Elementa Hydroſtaticæ & Aërometriæ Elementis Mechanicæ fuiſſe anteponenda. Etenim methodus ſtudendi non per omnia conſentit cum methodo tradendi diſciplinas, & eas ſibi mutuo ſubordinandi, atque in ſingulis veritati unicuique locum ſuum aſſignandi. Nimirum qui in ſcientiis operam navat a facilioribus incipit, & inde continuo ad difficiliora progreditur; quam legem præſcribit methodus ſtudendi. Aſt diſciplinæ integræ, & in iis veritates ſingulæ eo ordine collocandæ, ut ſequentia ex antecedentibus intelligi & demonſtrari poſſint. Non autem ſemper contingit ut diſciplina, quæ continet intellectu faciliora, non dependeat ab alia, in qua occurrunt multo difficiliora. Unde methodo ſtudendi convenit, ut difficilia initio ſeponantur, & ad faciliora properetur. Immo hac de cauſa, in gratiam primorum tyronum, conſcribuntur compendia; in quibus nonniſi facillima & ſcitu maxime neceſſaria continentur; ut animum imbuant principiis, & ad profundiora haurienda præparent. Memini me olim cum diſciplinis operam navarem, iis quæ captu difficilia videbantur non immoratum fuiſſe, ſed ad ſequentia progreſſum, ſi vel maxime eorum veritas ab iſtis penderet: quando enim poſtea, ſequentibus intellectis, ea denuo expendebam, ſine ulla mora obvium erat, quod antea impervium videbatur. Nec ignoro rationes, cur hoc contigerit, quippe quas Pſychologia ſuppeditat, quas tamen hic commemorari parum refert. Abſit itaque, ut, ubi quædam a te percipi non poſſe tibi videtur, de viribus tuis deſperans, efficiaris ſtudii deſertor.

Nocet non minus deſperatio, quam nimia de viribus ſuis confidentia; nec ardor ſciendi, qui accendere debet cupiditatem diſcendi, producendus in nocumentum.

§. 267. Hydraulica olim machinarum hydraulicarum & fontium ſalientium conſtructione tota abſolvebatur, atque adeo non erat niſi pars Matheſeos practicæ. Enimvero, poſtquam theoria Mechanicæ ad omnem motum ſolidorum fuit extenſa; in Hydraulica quoque in motum fluidorum inquirere cœperunt Geometræ. Unde hæc Matheſeos pars longe aliam induit formam; qua etiam ſeſe commendat Theoriſtis, quibus nauſeam movet praxis; ne quid commune habere videantur cum hominibus, quibus natura manus loco ingenii dediſſe cenſetur. Nos & theoriam, & praxin æſtimamus; quamvis non eodem, ſed ſuo unamquamque pretio, ut utrique ſuus habeatur honor. Quamobrem in Hydraulica quoque praxin cum theoria copulavimus, nec hanc illa dehoneſtari opinamur. Etſi enim Mathematicus, Geometra præſertim profundus, qui arduis meditationibus ſufficit, longo intervallo poſt ſe relinquat machinarum fabrum, & hic perperam pro Mathematico habeatur; non tamen ideo praxis contemnenda; quin potius Geometra profundis ſuis meditationibus hunc fructum deberi agnoſcere debet, ut illa perficiatur. Ex Hydraulica facillime perſpicere licet, quod auxilio Geometrarum indigeant, qui praxi operam navant. Exempli loco eſto determinatio ſitus alarum molendini vi venti agitandi (*§.* 216 *& ſeqq. Hydraul.*). Quodſi non deeſſent, qui inventa Geometrarum profunda ad praxin communem aptarent, illud adhuc magis pateret. Dolendum vero, quod nemo ea de re cogitare velit.

§. 268. Qui ſoli praxin operam navant, iis ſufficit, ut diſtincta notione conſtructionem machinarum hydraulicarum & fontium ſalientium animo concipiant. Non tamen inconſultum eſt, ut theoremata quoque, ſive ſynthetice demonſtrata, ſive analytice inveſtigata, percurrant; viſuri num in iis quid contineatur, quod praxin juvet. Idem quoque facere tenentur, ubi praxin deſiderant oculatam, hoc eſt, rationem quandam eorum perſpicere volunt, quæ faciunt; ne ſubinde cœcutientes in praxi aberrent. Exemplum illuſtre habemus in ſiphonibus, quos aquis per montium vertices in oppoſitam planitiem deducendis ſufficere exiſtimarunt, qui cauſam aſcenſus in crure breviori ignorarunt (§. 68 *Hydraul.*). Iſtiuſmodi exemplis convincendi ſunt, qui theoriam omnem contemnunt, quantum ſibi noceant, ſi ne hiſtoricam quidem ejus notitiam ſibi comparare velint. Quamobrem in genere ſuademus, ne illi, quos praxis juvat, theoriam Matheſeos

prorſus negligant, ſed primum cognitionis gradum ſuum eſſe credant. Ipſo nimirum uſu experientur, quænam hinc utilitas in eos ſit redundatura.

§. 269. Theoria non modo Hydraulicæ, verum etiam praxis multa continet, quæ uſui eſſe poſſunt in Phyſica. Quamobrem ſi quis, vel maxime ſe minus aptum ſentiat ad demonſtrationes & reſolutiones analyticas capiendas, qui Scientiæ naturali incumbere decrevit; ei tamen maxime commendanda eſt hiſtorica ſaltem Hydraulicæ cognitio. Enimvero quia in Scientia quoque naturali methodo demonſtrativa utendum, ſi certitudinis metam attingere velis, quantum datur; conſultius omnino eſt, ut demonſtrationes quoque expendat. Et qui Matheſin ad Phyſicam applicare voluerit; ei huic inſtituto non minus inſervire poterit Hydraulica, quam Aërometria; ut, quæ paulo ante de hac dicta ſunt, ad hanc quoque applicanda veniant.

§. 270. Hydraulica autem, ſive theoriam, ſive praxin ſpectes, attentionem eorum meretur, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Ubivis enim annotare licet artificia heuriſtica, quibus feliciſſime uſi ſunt, aut uti ſaltem potuerunt inventores veritatum tam theoreticarum, quam practicarum. Cum de Algebræ ſtudio ageremus, ad nauſeam forſan inculcavimus, qua attentione artificia iſta ſint detegenda, ut in caſu ſimili poſthac iiſdem utaris. Quamobrem nolumus hic ad particularia deſcendere; ſed nobis ſufficit monito generali excitaſſe attentionem, quam afferre debent, qui Artem inveniendi curæ cordique habent. Ne tamen quis exiſtimet, laudari artificia, quæ in Hydraulica non reperiuntur, ſingularia; exempli loco ad unum provocare licet; nimirum quo ad menſuram reducuntur, quæ menſuram reſpuere videntur. Obtinet hoc in doctrina de curſu fluminum; ubi, cum aqua omnis per totam ſectionem non eadem celeritate fluit, aquæ per eandem fluenti tribuitur celeritas quædam media, qua ſi per totam ſectionem flueret, eodem tempore tantundem per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur; & quomodo media iſta celeritas inveniri poſſit docetur. Ceterum ex ſuperioribus abunde conſtat, nos ubique in ſtudio Matheſeos urgere diſtinctam eorum cognitionem, quæ actu reflexo intellectus detegenda præcipimus; cum id maxime conducat ad recte philoſophandum: quem finem intendimus, dum in ſtudio Matheſeos, intellectus perficiendi cauſa, verſamur.

CAPUT

CAPUT VII.

De Studio Opticæ, Perſpectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ.

§. 271. IN Optica ſtrictiori ſenſu ſumta pauca occurrunt, quæ ad praxin faciunt. Præter ea enim, quæ de camera obſcura (§. 79 *Opt.*) & de quadrato geometrico ejuſque uſu (§. 172 *& ſeqq. Opt*) & teſſelatis imaginibus conſtruendis (§. 312 *Opt.*) docentur, nonniſi problemata nonnulla de magnitudine viſa *cap.* 5. & theoremata nonnulla de lumine Solis per foramen anguſtum radiante *cap.* 6., praxin directe reſpiciunt. Palmaria praxis Opticæ directæ in Perſpectiva continetur. Quoniam tamen indirecte omnia, quæ de viſu demonſtrantur, uſui eſſe poſſunt, qui praxi catoptrica & dioptrica delectantur, & quos exercitia Perſpectivæ juvant; non male ſibi conſulunt, qui, ſi non omnium, præcipuorum tamen theorematum opticorum cognitionem hiſtoricam acquirere ſtudent.

§. 272. Qui ad Phyſicam animum appellunt, iis ſtudium Opticæ maximopere commendandum. Non tamen ſufficit nuda ejus cognitio hiſtorica, quam iis commendavimus, qui praxi ſtudent (§. 271); ſed requiritur ſcientifica, quæ non ſine accurata demonſtrationum evolutione acquiritur. Viſus phænomenon naturæ eſt; ad objectum adeo Phyſicæ, rerum naturalium ſcientiam, referendum. Nec minus lumen, umbra, & colores ad idem ſpectant, quæ hic tanquam viſibilia conſiderantur. Etſi enim, in Matheſi, potiſſimum ratio habeatur cognitionis mathematicæ; ut tamen hæc in poteſtate ſit, multa declarantur, quæ explicare Phyſici eſt; quemadmodum & modum viſionis Phyſicus explicare debet. Quodſi ergo, in Optica, ea animi attentione utaris, quam hactenus in ceteris diſciplinis mathematicis commendavimus; ex hac Matheſeos parte diſcere licebit, quomodo res naturales ſint explicandæ, ut certam earum cognitionem acquiras. Dum vero Geometria elementaris applicatur ad phænomena viſus accurate determinanda; Optica prima & facillima cognitionis mathematicæ rerum naturalium exempla exhibet: Quamobrem ſi quis nullam adhuc hujus cognitionis habeat ideam, is omnium facillime ex Optica eandem hauriet. Unde ſuademus, ut, quamprimum principiis Arithmeticæ, Geometriæ elementaris, ac Trigonometriæ planæ imbutum habet animum, ad lectionem Opticæ accedat, intellectu multo faciliorem, quam Mechanica, Hy-

droſtatica, Aërometria, & Hydraulica, ac præterea jucunditate ſua animum lectoris in ſe trahentem. Accedit quod ex Optica etiam innoteſcant fallaciæ viſus, a quibus ſibi cavere debet Naturæ ſcrutator, ab obſervationibus inquiſitionem omnem exordiens.

§. 273. Cum Perſpectiva ſit praxis Opticæ directæ, qua docetur delineatio objecti cujuslibet in tabula, quale, ad datam diſtantiam, & in data altitudine oculi, ſuper tabula tranſparente inter ipſum & objectum ad horizontem perpendiculariter erecta, apparet (§. 1 *Perſpect.*), qui ſolam praxin curant, ſchemata juxta ea, quæ in ſingulis problematis præcipiuntur, delineare, & deinceps in aliis figuris delineandis imitari debent. Quodſi quis in Architectura fuerit verſatus, exempla quoque inde petere poteſt, ac debet. Exercitia hæc facilitabis, ſi Anonymi Galli *Perſpectivam practicam*, cujus ſupra in recenſione Autorum c. 8, §. 23 mentionem injecimus, in ſubſidium adhibeas, & deinde exempla ex ANDREÆ PUTEI *Architectura Pictorum & Sculptorum* (§. 24 *cap. cit.*) petas. Satisfacient ubivis regulæ, quas dedimus. Hic labor continuandus, donec habitum conſequaris. Nemo autem non videt, Artem pictoriam cum praxi Perſpectivæ eſſe conjungendam. Hæc enim ad illam perficiendam unice tendit. Qui vero nonniſi ſcientiam expetunt, iis ſufficit demonſtrationes praxium percepiſſe, quas in uſum potiſſimum Philoſophorum addidimus; quorum cum ſit rationem reddere eorum quæ ſunt atque fiunt, rationem quoque perſpicere debent delineationum objecti cujuſcunque juxta regulas Perſpectivæ factarum. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, iis notandum eſt artificium, quo tota Perſpectiva in poteſtatem Geometræ redacta (§. 2 *Perſpect.*), & praxin mechanicam eodem fundamento nixam, quam problemate primo expoſuimus, conferant cum regulis geometricis, quæ in ſequentibus problematis exponuntur; ut applicatione Geometriæ praxis perficiatur, & certa ſcientia eorum acquiratur, quæ nonniſi confuſe percipiuntur. Eodem fine conducunt, quæ de anamorphoſibus capite ultimo proponuntur.

§. 274. Catoptrica phænomena viſionis reflexæ demonſtrat, quæ fit ope ſpeculorum. Specula communiſſima ſunt plana, quorum ideo uſus ceteris præfertur, quia objectum ea forma & magnitudine ſpectandum exhibent, quale & quantum eſt; ut adeo teipſum videre ac contemplari poſſis. Viſio reflexa variat pro diverſitate ſuperficiei reflectentis: unde alia ſunt ſpeculorum planorum, alia concavorum, alia convexorum, alia ex hiſce compoſitorum phænomena. Cumque figuræ concavæ ac convexæ in infinitum varient, phænomena quoque in infinitum variare

debent,

debent. Artifices hactenus parare nequeunt niſi ſpecula plana, convexa ſphærica, cylindrica, & conica, concava ſphærica, & cylindrica; priſmatica enim & pyramidalia ex planis componuntur. Quamobrem contenti ſumus horum ſpeculorum phænomena demonſtraſſe, quæ ante experientia innotuiſſe, quam via demonſtrationis in eadem inquiſiverint Mathematici, facile largior. Fuere tamen artifices, qui ſpecula parabolica conficere conati ſunt. Unde horum quoque mentionem quandam injicere voluimus. Etſi autem ſpecula plana ſint quotidiani uſus, ex eorum tamen combinatione, pro diverſo ad ſe invicem ſitu, inexpectata prorſus prodeunt phænomena; quæ non modo delectant, ſed ignaros quoque in admirationem rapiunt, non ſine delectationis incremento. Inſerviunt etiam variis technaſmatis ſpecula cetera; quæ, etſi ad delectandum fuerint excogitata, ſeriis tamen inſerviunt meditationibus Philoſophi, quippe naturam imitantis, quæ ſerio agere ſolet, etiam dum pueri ludunt. Quamobrem nec piguit technaſmata iſta variis ſpeciminibus illuſtrare. Et quoniam in omni Matheſi praxin cum theoria conjunximus, idem quoque fecimus in Catoptrica. Qua de cauſa, non modo explicavimus technaſmata, quæ ex theoria Catoptricæ demonſtrantur, & adeo a priori deducuntur; verum etiam modum ſpecula conficiendi: neque enim ſolum dedecet Mathematicum ignorare, qua arte prodeant ſpecula, quorum phænomena demonſtrat, etſi in demonſtrationibus ſumere poſſit ac debeat ſpeculorum figuram; verum etiam hoc poſſe utile eſt, ubi theoremata a ſe demonſtrata per experientiam ad examen revocare voluerit. Quoniam nimirum in demonſtrationibus ſuis ſupponit in rigore geometrico figuras ſpeculorum; ſi de conſenſu demonſtrationum & experimentorum judicium exactum ferre voluerit, noſſe utique debet, ad quam perfectionem ars perducta fuerit, & num ea perfectionem ulteriorem recipere queat. In Matheſi mixta plurimum tribuimus connubio experientiæ ac rationis; quo conſenſus experimentorum & demonſtrationum innoteſcit, & quod tantopere commendamus per univerſam Scientiam naturalem. Nihil adeo prætermittendum erat, quod eo ducere poterat.

§. 275. Qui adeo ſolam praxin amant, illis ſatisfacient problemata, prætermiſſis demonſtrationibus. Non tamen prætermittere debent theoremata, cum hiſtorica eorundem cognitio æquipolleat recenſioni phænomenorum: ſi qua enim ſunt, quæ nonniſi in uſum demonſtrandorum aliorum afferuntur, ea facile a ceteris diſtinguent. Nimirum conſultum eſt, ut theoremata experimentis ſubjiciant; ne omni prorſus certitudine deſtituatur cognitio: tumque

pate-

patebit, quænam ſint ea, quorum cognitio ſcitu neceſſaria ac utilis, etiam iis quos ſola praxis juvat. Quid quod in numero quoque theorematum ſint haud pauca, quibus in praxi locus eſt, aut quæ ad praxes transferri poſſunt. Exempli loco eſſe poteſt theorema 11, §. 71, vi cujus §. 73, exhibetur globus deſcendens in plano inclinato tanquam aſcendens in verticali. Catoptrica praxi abundat, atque hoc nomine ſeſe commendat omnibus, quotquot eandem amant, iis præſertim qui quærunt, quod delectat.

§. 276. Inter ſpecula inprimis ſeſe commendant ſphærica concava; non ſolum propter phænomenorum prorſus ſingularium raritatem; verum etiam quod ſint cauſtica, ſeu uſtoria, & lumini intendendo inſerviant. Specula cauſtica præſertim majora uſum habent in experimentis phyſicis, qualia deſcribuntur in ſchol. 4, probl. 22, §. 221, immo phænomena omnia viſionis reflexæ argumentum phyſicum ſunt, quorum adeo rationes Phyſicus reddere tenetur, etiamſi geometricas inſuper habeat demonſtrationes. Phyſicus phænomena ſumit tanquam a poſteriori cognita, & eorum rationem reddit. Mathematicus illa demonſtrat, ex ſuppoſita ſpeculi figura; vi legis reflexionis, ea deducens a priori, tanquam incognita ex cognitis. Atque adeo diverſo prorſus modo ſuo funguntur munere: quod dum uterque facit, manifeſta eſt differentia, quæ inter cognitionem philoſophicam & mathematicam, hac in parte, intercedit. Ut autem certius conſtet Phyſico, quid ſumere liceat, theoremata & technaſmata catoptrica eum docent. Quemadmodum autem Optica patefacit fallacias viſus circa viſionem directam, quas utiliter cognoſcit Phyſicus, immo Philoſophus in aliis quoque Philoſophiæ partibus; ita Catoptrica revelat fallacias viſus circa viſionem reflexam, non minore utilitate agnoſcendas. Atque adeo patet, quomodo in ſtudio Catoptricæ verſari debeat Philoſophus, qui ab omni cognitione mathematica alienum habet animum: quem etſi non probemus, tolerandum tamen cenſemus, pro diverſitate ingenii humani; quantum abſque detrimento ſcientiæ fieri poteſt. Ceterum quæ de cognitione mathematica quoad viſionem directam modo annotavimus (§. 272); ea etiam de eadem quoad reflexam notanda veniunt.

§. 277. E re eſſe videtur, ut præjudicio occurramus, quo nonnulli ſibi mirifice placent, & cui alii applaudunt, quaſi ſingulare quoddam acumen proderet. Diximus paulo ante (§. 274), nos facile largiri, quod phænomena ſpeculorum innotuerint a poſteriori, antequam de iis a priori demonſtrandis cogitarent Mathematici. Non adeo dubito fore haud paucos, qui contendent demonſtrationes mathematicas ſuperfluas

fluas eſſe; immo qui hinc inferent inventa, quæ in Matheſi mixta celebrantur, deberi artificibus; a quibus poſtquam inventa fuerant, ea demum demonſtrare conati ſunt Mathematici, inventionis tamen gloria inter alios eruditos eminere geſtientes. Memini hoc argumento arrogantiam Mathematicorum redarguere voluiſſe CLERICUM, cum HERMANNI Phoronomiam recenſeret. Qua de cauſa deſiderabat, ut Geometra præclarus ſignificaret, quantum Scientia naturalis, & Ars facta ſit locupletior, poſtquam abſtruſas iſtas theorias orbi literato in opere ſuo propinaſſet. Artifices enim pro inventoribus habebat; Mathematicos vero demonſtratores pronunciabat; qui nonniſi in artificum inventis ingenii ſui vires exerceant. Non unum eſt, quod hic repono. Phænomena, ipſi etiam vulgo cognita, ſumit Phyſicus & eorum rationem reddit: non tamen ideo inanis cenſetur ejus opera; propterea quod illa ante innotuerint quam de rationibus eorundem reddendis cogitavit Phyſicus. Eccur ergo inanem operam ſumere, aut nihil præclari facere dicendus eſt Mathematicus, qui longe ulterius progreſſus, phænomena non ſumit, ſed ex iis, quæ ſumi debent, via demonſtrationis a priori deducit; ut certa ſit etiam ejus cognitio, qui exiſtentiam phænomeni nondum ſupponit? Notandum præterea eſt, phænomena haud raro a poſteriori non ſatis determinate cognoſci, quæ tamen accuratiſſime determinantur a Mathematico in ſuis theorematis. Accedit porro, quod Mathematicus non omnia phænomena jam ante norit, quam ea demonſtrat; ſed multa potius adhuc ignorata in apricum producat. Denique inventa, quæ haud raro caſui debentur, imperfectiora ad majorem perfectionem perducit; aut, ſiquidem ulteriorem perfectionem non admittunt, ut idem certo conſtet demonſtrat. Quid, quod hinc inde a priori quoque deducat technaſmata, quæ tentando nondum fuerunt detecta, aut prorſus non potuiſſent detegi? Abſit autem ut tibi perſuadeas ea, quæ caſu plerumque aut tentando reperta fuerunt, perficere minoris eſſe, quam illa reperire. Non ſemper valet illud pervulgatum: Inventis facile eſt addere. Inventa nondum æſtimare didicit, qui ea aliunde quam ex uſu facultatum, cui debentur, æſtimat. HUGENIUS, qui horologia ſingulari pendulorum applicatione perfecit, longo intervallo poſt ſe relinquit primum eorundem inventorem; & demonſtrationes, quas de tubo optico dedit in *Dioptrica*, multo majorem laudem pariunt, quam fortuita imperfecti inventio. Ut inventa, quæ caſui accepta referenda ſunt, vel tentaminibus laborioſis, perficiantur, inventis haud raro opus eſt, non ſine ſummo acumine & maxima ingenii vi eruendis. Plurimum adeo falluntur, inventionis

gloriam non deberi niſi iis, qui primi in quidpiam inciderunt. Sed hæc evidentiora erunt, ubi Ars inveniendi eodem habitu fuerit inveſtita, quo Logicam indutam dudum in ſcenam produximus; ut ex arte æſtimare detur artificem; non vero, quemadmodum nunc plerumque fieri ſolet, ex eo, quod inventum ejus ſit utile, vel quod ſit inexpectatum, vel quod aliis fuerit inacceſſum, vel quod in admirationem rapiat ignaros & ita porro.

§. 278. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, reperient in Catoptrica, ſive theoriam ſpectes, ſive praxin, quæ Artem inveniendi illuſtrant & amplificant; ubi in artificia inquirere voluerint, quibus aditus paratur ad ea, quæ inacceſſa videbantur. Neque eum, qui in Phyſica feliciter progredi voluerit, ubi non minus applicatione Matheſeos puræ ad phænomena naturæ, quam connubio experientiæ ac rationis opus eſt, pigebit eo modo perluſtraſſe Catoptricam, quem ad tertium cognitionis gradum acquirendum ſupra præſcripſimus, & cum de ſtudio Algebræ ageremus exemplis illuſtravimus. Quoniam vero nobis quoque propoſitum eſt uſum Algebræ in Matheſi mixta oſtendere; placuit ſub finem adjicere Catoptricam analyticam, ſeu modum inveſtigandi theoremata catoptrica per Analyſin. Subſtitimus autem in iis ſpeculis, quorum antea phænomena demonſtravimus, more Veterum; tum ne tyrones univerſalitate ipſis inutili perplexi reddantur, tum quia ſolutiones particulares occaſionem dedere univerſalibus in omni curvarum genere. Diſcentium enim, quibus ſcribimus, ratio habenda fuit.

§. 279. Erunt forſan, qui, cum viderint, Algebræ beneficio, nullo fere negotio patere, quæ more Veterum non ſine multo apparatu demonſtrantur; demonſtrationes ſyntheticas inutiles exiſtimabunt, immo prorſus damnabunt. Recolenda animo hic ſunt, quæ ſupra (§. 100 *& ſeqq.*) monuimus, cum de ſtudio Matheſeos intellectus perficiendi cauſa ageremus; quem inter uſus præcipuos referimus ſtudio mathematico tribuendos, & qui multo latius patet quam uſus reliquus omnis. Quamobrem qui hac intentione ad ſtudium Matheſeos animum appellunt, iis omnino maximopere commendandum, ne demonſtrationes ſyntheticas negligant, etiam in Catoptrica, & demonſtrationes catoptricas eadem induſtria reſolvant; ut pateat earum forma in Logica præſcripta, qua demonſtrationes Geometriæ elementaris reſolvi præcepimus; ut non modo idea exemplaris demonſtrationis conſummatæ, quam in Logica vocamus, reddatur illuſtrior, magiſque indies confirmetur, verum etiam ut habitus juxta eam operandi in omni ſcientiarum genere perficiatur. Pudeat enim Philoſophos, ſeculo tam illuſtri, quo ſcien-

tiæ mathematicæ ad tantum faſtigium evectæ, diutius in ancipiti hærere, & , dum Mathematici plena luce fruuntur, in tenebris palpitare.

§. 280. Dioptrica praxi multa abundat. Agit enim de viſione refracta, cujus multus uſus eſt in ſpectandis objectis remotis & vicinis exiguæ molis; quorum illa, ob diſtantiam, hæc vero, ob pravitatem, oculis ſeſe ſubducunt. Hinc, in hac parte Matheſeos mixtæ, præcipue agitur de tubo optico, & microſcopio. Tubi non minus optici, quam microſcopia, componuntur ex vitris lenticularibus arte parandis. Atque adeo ad praxin dioptricam ſpectat quoque ars poliendi vitra, quam adeo integro capite accuratiſſime explicavimus. Quoniam tubus opticus maximam utilitatem affert in obſervationibus aſtronomicis, ita ut ſine ejus auxilio Aſtronomia nondum ad eum perfectionis gradum fuiſſet perducta, ad quem eam hodie evectam cernimus; accurata lentium fabrica ipſis quoque Mathematicis curæ cordique eſſe debuit. Quamobrem non mirandum, Mathematicos etiam ſummos, veluti HUGENIUM, vitris poliendis operam dediſſe, nec eos piguiſſe praxin manuariam exercere, etſi in theoria augenda & amplificanda inter paucos eminerent. Ad praxin dioptricam ſpectant quoque perſpicilla, quæ quomodo Myopes & Presbytas juvent in videndis iis ad quæ oculorum acies non pertingit, in vulgus notum eſt. Dantur denique alia technaſmata dioptrica, & catoptrico-dioptrica, qualia nonnulla deſcripſimus, & plura apud alios, veluti TRABERUM & ZAHNIUM, deſcribuntur: quæ etſi nonnullis magis ludicra quam utilia videantur, & ad delectandum magis quam ad augendam ſcientiam compoſita; minime tamen contemnenda ſunt. Uſum enim præbent in experimentando haud raro prorſus inſignem. Exempli loco, provocare licet ad priſma trigonum; quod quantum adjumenti attulerit ad naturam luminis & colorum indagandam, ex præclaro opere Viri ſummi ISAACI NEWTONI clariſſime conſpicitur. Inprimis etiam attentionem merentur, quæ (§. 476, 477 *Dioptr.*) de laterna magica in microſcopium convertenda, & ad foramen cameræ obſcuræ lumine ſolari directo illuſtratum applicanda annotavi; in Experimentis autem idiomate patrio deſcriptis fuſius expoſui. Novi enim Virum quendam illuſtrem iſtiuſmodi microſcopium paraſſe, & inſignes prorſus ejus effectus, quos ego prædixeram, obſervaſſe. Qui adeo praxi operam navant, non modo ea, quæ de poliendis vitris, de conſtruendis teleſcopiis, microſcopiis, aliiſque technaſmatis larga manu traduntur, probe perpendere tenetur; ſed ut oculata ſit praxis, theoremata quoque de refractione luminis in lentibus opticis, præſertim de focis earundem, ſibi familiaria reddere de-

bent, etſi demonſtrationes inſuper habeant. Clariſſime omnium ex Dioptrica perſpicitur, quam neceſſaria ſit theoria ad praxin; niſi hæc multa imperfectione laborare debeat, nec in eadem committendi errores, qui evitari poterant. Huc igitur velim animum advertant, qui theoriam comtemnere ſolent. Velim etiam ut ad hæc animum attendant, quorum eſt theoriam ad praxin aptare; ut ad hiſtoricam ejus cognitionem pateat aditus Artis cultoribus ad praxin eandem applicaturis. Optandum enim foret, ut quis omnes theorias, quantumvis profundas, perluſtraret, & quæ in Arte uſui eſſe poſſunt excerpta, ſine demonſtratione, in uſum Artis cultorum, exponeret; experimentis confirmanda, ubi id abſque multo apparatu ac ſumtu facile fieri poteſt. Quoniam tamen Geometræ in ſolvendis problematis phyſico-mathematicis quædam ſumunt, quæ, quod non invita natura ſumantur, non demonſtrant; atque adeo idem ipſis ſubinde accidit quod GALILÆO circa reſiſtentiam ſolidorum, ut ex aſſumtis recte quidem colligant, quæ inde ſequuntur, hæc tamen ab experimento diſſentiant, quod illa naturæ rerum minime conveniant; ideo conſultum foret, ut in Phyſica veriori ſatis verſatus in hypotheſes Geometrarum accurate inquireret, ea, quæ certa ſunt, ab incertis aut prorſus falſis ſeparaturus; ne, dum praxin theoria perficiendi animus eſt, ea inculcentur, quæ eidem magis obſunt, quam proſunt; & artificum perſpicaciorum judicio, cum theoriam fallere videant, hæc tandem magis in contemtum adducatur, quam ut eidem aliquod pretium ſtatuatur. Etſi enim a particulari ad univerſale non valeat argumentatio, & præcipitantiæ in judicando tribuendum ſit, ſi quis ea utatur; hæc ipſa tamen præcipitantia tanto excuſatior eſt in artifice, qui quoad theoriam aliorum dictis habere debet fidem; conſequenter judicium ſuum determinare nequit, niſi per notiones communes probabilitatis extrinſecæ.

§. 281. In Dioptrica explicatur viſio refracta, ac inprimis oſtenditur, quomodo refractio fiat in vitris politis. Quamobrem primo omnium loco inquirendum eſt in legem refractionis: quæ quomodo per experimenta eruatur, primo loco docendum duximus. Equidem hodie, poſtquam uſus teleſcopiorum & microſcopiorum invaluit, potiſſimum ratio habetur refractionis in vitro factæ; addidimus tamen etiam, quomodo ſeſe habeat in aqua & aëre, propterea quod in Phyſica major eſt utilitas legis refractionis in aqua & aëre, quam in vitro factæ. Quamvis vero etiam oſtenderimus, quomodo lex refractionis in genere per calculum analyticum eruatur; experimentis tamen ſuperſedere minime poſſumus, cum ratio ſinus anguli inclinationis ad ſinum anguli refracti, quæ per calculum con-

ſtans

ſtans, eruitur, non eadem deprehendatur in omni diaphano. Qui ergo ad ſecundum gradum cognitionis adſpirant, ea, quæ de refractione in genere capite primo docentur, probe expendere debent, quoniam hinc pendet certitudo ceterorum omnium, quæ in Dioptrica demonſtrantur. Quod demonſtrationes dioptricas attinet, non uno modo eaſdem contexere licet. Etenim, ſuppoſita lege refractionis, per calculum trigonometricum erui poteſt, quomodo fiat refractio in vitro cujuslibet figuræ, veluti in vitris utrinque planis, plano convexis, plano concavis, utrinque convexis, utrinque concavis & concavo - convexis ſive meniſcis. Idem reperiri poteſt per calculum algebraicum. Poteſt denique etiam geometrice demonſtrari, quod tanquam jam inventum ſupponitur, per legem refractionis, vi principiorum geometricorum, more Veterum. Ut igitur diverſos hoſce demonſtrandi modos lectorem noſtrum doceremus, nunc ad calculum trigonometricum, nunc ad algebraicum, nunc vero ad demonſtrationes geometricas Veteribus uſitatas recurrimus. In vitris politis, ex quibus tubi & microſcopia componuntur, & quæ ad alia technaſmata adhibentur, duplex occurrit refractio; altera, quæ fit in ingreſſu luminis ex aëre in vitrum; altera vero, quæ contingit in egreſſu ejuſdem ex vitro in aërem; atque adeo refractio luminis in vitris politis compoſita eſt. Ut tamen ea facilius intelligatur, primo loco docemus, quomodo refractio ſimplex fiat in ſuperficiebus tam planis, quam ſphæricis, cum cavis, tum convexis. Quodſi enim hæc principia fuerint cognita atque perſpecta; haud difficile eſt per ea demonſtrare refractionem duplicem, qualis in vitris politis occurrit. Enimvero quoniam nos principia dioptrica etiam uſui eſſe volumus in explicandis aliis Naturæ phænomenis; theoremata generaliter demonſtramus, ut ad quodlibet diaphanum applicari poſſint, modo ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum refracti in eodem diaphano per experientiam fuerit definita. Quia tamen in Dioptrica potiſſimum uſui eſt refractio in vitro facta, & in Phyſica frequentiora ſunt phænomena refractionis in aqua factæ; in corollariis, theoremata de refractione in vitro & aqua facta exhibemus. Non diffiteor, theoriam dioptricam eſſe ſatis diffuſam, ſi reſpicias uſum, quem habent vitra polita in tubis opticis atque microſcopiis, & aliis nonnullis technaſmatis; ſed quibus ſcientia, quæ ſola certitudinem parit, curæ cordique eſt, illis non videretur nimis ampla, etiamſi praxis inde pendens multis adhuc arctioribus limitibus conſtringeretur. Quod vero ſubinde calculo algebraico uſi fuerimus in demoſtrandis theorematis dioptricis, non alio fine factum eſt, quam ut demonſtra-

tiones redderemus faciliores & theoriam contraheremus. Neque vero opus eſt ad demonſtrationes algebraicas intelligendas, ut quis in ſtudio Algebræ multum diuque fuerit verſatus. Sufficit, ſi prima ſaltem rudimenta non ignoraverit, ut adeo nemo jure conqueri poſſit, quaſi hoc nomine Dioptrica multis facta ſit inacceſſa. Vix enim hodie ferendum eſt, ut, qui Matheſin addiſcere voluerit, Algebram prorſus intactam relinquat: quæ potius commendanda venit iis, qui theoriæ non multum temporis impendere poſſunt, eam tamen ignorare nolunt. Non exigua voluptate animum ſciendi cupidum demulcent demonſtrationes dioptricæ; ut adeo theoria nemini videri poſſit moleſta, niſi ab omni ſciendi cupidine prorſus immuni. Notandum vero in Dioptrica non modo quæri, quomodo lumen refringatur in tranſitu per diaphana diverſæ denſitatis; verum etiam quomodo beneficio radii ſic refracti videatur viſibile: quod poſterius inprimis noſſe debemus, ubi phænomena tubi optici ac microſcopiorum aliaque viſionis refractæ demonſtrare voluerimus. Quamobrem in theoria quoque demonſtratur, quomodo appareat viſibile per radios refractos viſum. Unde lentium dioptricarum duplex eſt uſus, alter, dum lumine per ea tranſmiſſo utimur, alter vero, dum per eas viſibilia reſpicimus. Qui adeo utrumque uſum certo cognoſcere ſtudet, is etiam omnem theoriam cognitam atque perſpectam habere debet: neque enim theoriam dioptricam extendimus ultra uſum, quem in praxi habet.

§. 282. Refractio luminis & viſio refracta phænomena naturalia ſunt, quorum adeo rationes reddere tenetur Phyſicus. Ex Dioptrica phænomena particularia multo accuratius addiſci poſſunt, quam per obſervationes abſque theoriæ dioptricæ ſubſidio innoteſcunt. Et ſi experimenta capere volueris ad phænomena utraque venanda; theoria Dioptricæ eadem dirigit, ut accurate cognoſcantur. Quoniam in Phyſica phænomenorum rationes proximas ex aliis phænomenis reddimus; eo nomine Dioptrica ad ſcientiam naturalem plurimum affert adjumenti. Multa dantur naturæ phænomena, quæ a refractione luminis pendent. Eminent inter ea Meteora, quæ dicuntur, emphatica; quæ abſque principiis Dioptricæ explicari nequeunt. Atque ea ratio eſt, cur ſubinde Mathematici de meteoris emphaticis, veluti de Iride, halonibus, parrheliis & paraſelenis, in Dioptrica agant. Immo Dioptricæ theoria, ſi a teleſcopiis & aliis technaſmatibus dioptricis receſſeris, ad cognitionem naturæ mathematicam ſpectat. Quamobrem quæ paulo ante de eadem, quoad Opticam (§. 272) & Catoptricam (§. 276) monuimus; eadem quoque de Dioptrica tenenda ſunt. Quamobrem

obrem qui ad Naturæ cognitionem mathematicam adſpirant, iis quoque commendamus, ut omnem Dioptricæ theoriam attenta mente perluſtrent. Quodſi enim in Optica, Catoptrica & Dioptrica didicerint, quomodo Geometria & Algebra ad Naturæ phænomena ſint applicanda, & quomodo cognitio mathematica differat a philoſophica, quidque ad perfectionem philoſophicæ conferat mathematica; ad altiora progredientes tanto minus difficultatis experientur. Extra omnem controverſiam eſt, prima cognitionis mathematicæ in Philoſophia naturali ſpecimina fuiſſe Optica, niſi forſan Aſtronomiam ipſis priorem agnoſcere volueris; quamvis noſtris demum temporibus, præſertim quod Dioptricam attinet, diſciplinæ opticæ magis fuerint excultæ, cum jam ſubliniora cognitionis Naturæ mathematicæ exempla proſtarent. Quodſi ergo a diſciplinis opticis exordiaris, ubi cognitionis hujus ideam animo complecti volueris, deinceps magis amplificandam per ea, quæ in diſciplinis mechanicis Tomo ſecundo Elementorum occurrunt: naturalem omnino dicendus es ſequi ordinem, quem tenuerunt primi inventores. Neque adeo dubitandum eſt, quin hoc pacto, a facilioribus ad difficiliora continuo progreſſus, multo intimius hunc cognitionis humanæ gradum inſpicias, quam ſi inverſo ordine, inſuper habitis primis inventis, ſtatim ad ſubliniora te conferas, ad quæ non patuit aditus niſi per faciliora inventoribus.

§. 283. Atque hoc ordine ſi progrediaris, haud parum quoque lucis affunditur ad tertium cognitionis gradum adſpiranti. Cum enim ad Artem inveniendi exercendam certa quoque requiratur mentis habitudo, ea omnino omnium commodiſſime acquiritur eo modo, quo ſucceſſive, in diverſis licet ſubjectis, incrementa ſua cœpit. Sed de hoc ipſo plura mox nobis dicenda erunt, ubi de ſtudio Aſtronomiæ in uſum tertii gradus cognitionis agendum erit. Ceterum qui Dioptricam ea lege perluſtrare voluerit, quam pro acquirendo tertio cognitionis gradu præſcripſimus; is non inanem operam a ſe ſumi ipſo facto deprehendet. Probe notandum eſt artificium, quo lex refractionis analytice inveſtigatur (§. 36 *Diopt.*); tum quod in argumento phyſico adhibeatur principium a cauſa finali deſumtum, nimirum quod Natura agat via breviſſima, tum quod methodus de maximis & minimis ad problema phyſicum applicetur. Præterea conſiderandum, quod Matheſis requirat experimenta, ſi per ejus demonſtrationes aliquid in Phyſica accurate determinandum. Etenim per analyſin mathematicam ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti indeterminata prodit, quæ per experimenta deinde in quolibet diaphano determinanda. Etſi autem KEPPLERUS veram refractionis legem

gem non fuerit aſſecutus, cum rationem conſtantem quæſiverit in angulis, non in eorum ſinibus; non tamen propterea attentione indignum eſt principium *Kepplerianum*, cum inde pateat, quomodo hypotheſes vicarias, in locum verarum Naturæ, ſubinde ſurrogare liceat in cognitione mathematica; ſive veras detegere non detur, ſive eædem diſquiſitiones reddant moleſtiores; tum etiam quod inventum KEPPLERI ad veram legem refractionis inveniendam manuducere potuit SNELLIUM; quatenus conſtans quædam ratio inter angulum incidentiæ & angulum refractionis obſervatur, quamdiu anguli ſinibus phyſice propemodum proportionales ſunt: id quod tanto facilius ſuccedere potuit, quia in ipſa Trigonometria in ſimili caſu angulorum ratio ſubſtituitur rationi ſinuum (§. 23 *Trigon.*). Et non minus demonſtrationes, quam analyſis dioptrica loquuntur, ubi Geometria ad Phyſicam applicatur, non ſemper obſervandum eſſe rigorem geometricum; ita ut lineæ v. gr. convergentes haberi poſſint pro parallelis, & anguli quantitate parva differentes pro æqualibus: id quod convenit approximationibus in Matheſi pura, & eandem cum hiſce habet rationem. Quodſi ſingula eodem modo perluſtrare velimus, quo in ſtudio Algebræ explicando a nobis factum; multa artificia annotare licebit, quæ ad tertium cognitionis gradum faciunt. Sed noſtrum jam non eſt in tantas ambages deſcendere, qui tantummodo monſtramus viam, qua ſit eundum. Non tamen nobis temperare poſſumus, quin unicum adhuc commemoremus. Nemo eſt qui neſciat, primam teleſcopii inventionem caſui deberi; ejus autem perfectionem, maxima ingenii vi & acumine ſummo, a Mathematicis primi ordinis fuiſſe promotam. Fortuita teleſcopii inventio attento inſinuat modum, quo in inveniendo caſui obviam ire licet. Ac evidentiſſime hinc perſpicitur, quod ea, in quæ caſu incidimus, manum emendatricem & auxiliatricem expectent a ſcientia & arte inveniendi. Ampliſſimus ſeſe hic aperit dicendi campus; ſed eum ingredi prohibet inſtituti præſentis ratio. Quamvis autem in ipſis demonſtrationibus dioptricis paſſim adhibuerimus calculum algebraicum, diſtantiam foci a lente determinaturi; id ipſum tamen non obſtitit, quo minus doceremus, quomodo eadem analytice inveſtigetur; non modo ut uſus Algebræ in Matheſi mixta doceatur, verum etiam ut præſtantia ejus appareat; cum theoremata in anterioribus operoſe demonſtrata, quamvis ope calculi analytici fuerint contractæ demonſtrationes, mira facilitate ex formula generali eliciantur: id quod extra Matheſin uſui eſſe poteſt in ſpeciebus ex dato genere determinandis. Cur vero ſolutionem dederimus particularem, quæ Dioptricæ ſufficit, non vero

vero univerſalem, ſive figuram medii refringentis, ſive ejus denſitatem ſpectes, quod tanto facilius fieri poterat, cum dudum proſtent ſolutiones generales, nec eædem ſupponant, niſi quæ in Analyſi a nobis fuerunt tradita, ex iis liquet, quæ in ſuperioribus jam annotavimus, cur ſolutiones particulares univerſalibus prætulerimus, in ipſa etiam Algebra, vel ſubinde univerſales nonniſi præmiſſis ſolutionibus in caſu particulari ſubjunxerimus; ut adeo opus non ſit hic repetere, quæ in anterioribus jam inculcata fuerunt. Ceterum hic quoque annotari poterat, quod, cum Dioptrica multis experimentis anſam præbeat; Ars quoque experimentandi lucem quandam hinc expectare poſſit. Enimvero cum ſuo tempore, quando nos ordo deducet ad experimentalem Philoſophiam tradendam, ea de re ex inſtituto ſit agendum; eidem in præſenti immorari non debemus.

§. 284. Antequam vero hinc diſcedamus, non inconſultum ducimus unum adhuc moneri Dioptricæ lectorem ad tertium cognitionis gradum adſpirantem. Trigonometriam planam pro parte Artis inveniendi venditare ſolemus, aut, ſi mavis, pro methodo particulari inveſtigandi veritatem latentem (§. 142). Unde ſtudium trigonometricum commendamus iis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, non modo illis, qui ad tertium cognitionis gradum, in Matheſi adſpirant (§. *cit.*). Non deſunt, qui ſibi perſuadent, Trigonometriam ad Artem inveniendi parum conferre; propterea quod per eam tantummodo computentur exempla, non vero veritates univerſales eruantur. Hi facillime confutantur per problemata in Dioptrica trigonometrice ſoluta: apparet enim per Trigonometriam eadem inveniri, quæ per Algebram eruuntur. Quamvis vero opinio iſta ſatis refelli poterat per hoc, quod ipſæ ſolutiones trigonometricæ problematum ſint veritates generales, quæ per applicationem Trigonometriæ inveniuntur, & harum demum applicatione computari exempla; multo tamen clarius idem patet in Dioptrica, ubi etiam per computum trigonometricum eruuntur theoremata univerſalia Dioptricæ. Accedit, quod uſus quoque Trigonometriæ in Philoſophia naturali per Dioptricam eluceſcat. Ita ex ejus applicatione ad experimenta innoteſcit, quomodo lex refractionis ex. gr. in vitro detegatur, ut alia taceam.

CAPUT VIII.

De Studio Sphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ.

§. 285. Trigonometria ſphærica demonſtrari nequit, niſi præmittantur principia Sphæricorum, quæ etiam ante applicanda ſunt ad Aſtronomiam ſphæricam, quam calculo trigonometrico in eadem utidatur. Atque ea ratio eſt, cur Elementa ſphæricorum cum Trigonometria ſphærica conjunxerimus. Quamobrem qui cognitionis gradum ſecundum intendit, Elementa quoque ſphæricorum attenta mente perluſtrare tenetur, antequam ad problemata Trigonometriæ ſphæricæ accedat. Quoniam demonſtrationes ſyntheticæ ſunt, quales in Geometria elementari occurrunt; eodem quoque modo expendendæ, quo demonſtrationes Geometriæ elementaris reſolvere docuimus. Quamobrem iis, qui methodum demonſtrandi Veterum ſibi familiarem reddere volunt, & demonſtrationis legitimæ ideam exemplarem, quam imitentur extra Matheſin, majore luce perfundere geſtiunt, lectionem quoque Elementorum ſphæricorum commendamus, ſi vel maxime Trigonometriam ſphæricam attingere noluerint. Sunt dubio procul ſphæricorum Elementa pars Geometriæ, ſi non elementaris, certe ſublimioris, quæ de lineis curvis agit, quarum etiam in numero ſunt circuli in ſuperficie ſphæræ deſcripti. Mallem tamen eadem referre ad Geometriam elementarem, quia in hac non minus locum habet circulus, quam ſphæra. Sed ea de re cum nemine ſerram contentionis reciprocabimus: ſufficit demonſtrationes non eſſe difficiliores demonſtrationibus Geometriæ elementaris, ex cujus etiam principiis contexuntur; niſi forſan imaginatio hinc inde minus exercitatis negotium aliquod faceſſat; quod tamen evaneſcit, ubi figuris in plano delineatis ſubſtituas globum, in cujus ſuperficie circuli debito modo ſunt deſcripti. Et ut hoc faciant tyrones, omnino ſuaſerim, præſertim illi, quibus moleſtum accidit horum Elementorum ſtudium, ne ejus fiant deſertores. Philoſophis vero hinc diſcere licet, quænam differentia intercedat, ſi imaginatio juvet, non turbet operationes intellectus.

§. 286. Quodſi igitur quis nonniſi calculum trigonometricum ſibi familiarem reddere voluerit; is ex problemate primo §. 114 regulam catholicam de triangulis rectangulis probe perpendat, utque eandem intelligat, definitiones 9, 10 & 11, cum ſuis corollariis,

rollariis, expendat & quomodo ad omnes caſus applicetur ex §. 116 *&* *ſeqq.* addiſcat. Si numeri tantummodo varientur, exempla plura comminiſci licet. Hæc calculi exercitia continuanda ſunt, donec regulam catholicam in dato quocunque caſu dextre applicare poſſit. Qui experiri voluerit, quantum Trigonometria ſphærica per regulam catholicam facilitetur; eadem problemata more communi reſolvat, quemadmodum in libellis aliis Trigonometriæ ſphæricæ aut in Introductione ad Tabulas ſinuum atque tangentium docetur. Ubi ſolutio triangulorum rectangulorum nihil amplius difficultatis faceſſit; addenda ſunt problemata 20 *&* *ſeqq.* §. 158 *&* *ſeqq.* circa quæ eadem obſervanda, quæ de reſolutione triangulorum rectangulorum monuimus. Nullus dubito fore, ut calculus trigonometricus abſque ullo tædio addiſcatur, nec majorem in eo difficultatem ſentias, quam in Trigonometria plana. Quoniam multos a ſtudio Aſtronomiæ practicæ abhorrere expertus ſum; quod tædia calculi Trigonometriæ ſphæricæ devorare cogerentur: omnem quoque operam navavi, ut Trigonometriam ſphæricam redderem facilem quoad praxin, etſi theoria ſit multo profundior, quam Trigonometriæ planæ.

§. 287. Trigonometriæ ſphæricæ demonſtrationes non modo ſupponunt theoremata ſphærica ſeu Sphæricorum theoriam; ſed propriam quoque theoriam habet, qua nituntur reſolutiones problematum. Nimirum quemadmodum Trigonometria plana nititur theoria triangulorum planorum, ſeu rectilineorum, in plano deſcriptorum, quæ traditur in Geometria elementari; ita quoque Trigonometria ſphærica pendet a theoria triangulorum ſphæricorum, ſeu eorum quorum latera ſunt arcus circulorum maximorum in ſuperficie ſphæræ deſcriptorum. Eam cum alibi ſupponere non potuerimus, in ipſa Trigonometria ſphærica tradere debuimus; quemadmodum theoria triangulorum planorum in Trigonometria plana explicanda eſſet, niſi jam in Geometria elementari expoſita fuiſſet. Quodſi dicas, theoriam triangulorum ſphæricorum eſſe partem Elementorum ſphæricorum, quemadmodum theoria planorum eſt pars Geometriæ planæ: mihi perinde erit, ſive eam a Trigonometria ſphærica ſepares eandemque tibi familiarem reddas, antequam ad hanc accedis; ſive ipſam demum cum problematis, quorum ſolutiones inde pendent, addiſcas; quamvis hoc poſterius mihi videatur commodius minusque moleſtum, cum ſic theoriæ ſtatim pateat uſus, nec difficilis præmittenda ſit praxi faciliori. Theoriam autem Sphæricorum & Trigonometriæ ſphæricæ plurimum commendamus iis, qui in Aſtronomia non modo ad ſecundum cognitionis gradum,

verum etiam ad ipſum tertium adſpirant; conſequenter omnibus, qui intellectus perficiendi gratia ad Matheſin addiſcendam accedunt. Cum demonſtrationes ſingulas eadem forma exhibuerimus, qua conſpiciuntur in Geometria elementari, niſi quod nonnullæ in theoria Trigonometriæ ſint prolixæ; ſi noſtro more reſolvantur, nihil difficultatis faceſſent, ut eadem deterreatur, qui a Geometria elementari ad ſphæricam Trigonometriam ſtatim accedit. Quodſi enim cuidam viſum fuerit, neglecta Algebra & ceteris Matheſeos mixtæ partibus, pergere in demonſtrationibus Matheſeos puræ methodo Veterum conditis, ut hanc magis ſubjiciat poteſtati ſuæ, nec ante ad analyticam Recentiorum accedat, quam ubi ſyntheticæ Veterum fuerit ſatis compos; is a Geometria Elementari & Trigonometria plana ſtatim pedem promovere poteſt ad Elementa Sphæricorum & Trigonometriam ſphæricam; cum nec hic ſupponantur principia, niſi quæ ex Trigonometria plana & Geometria elementari hauſiſti, nec alia demonſtrandi methodus, quam qua ibidem uſi ſumus; ita ut, ſubjunctis Geometriæ elementari Sphæricorum Elementis, Trigonometriam ſphæricam cum plana conjungere licuiſſet, quemadmodum vulgo a Trigonometriæ Scriptoribus fieri ſolet.

§. 288. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, iis ſtudium Elementorum ſphæricorum & Trigonometriæ ſphæricæ commendandum. Etenim, ſine principiis ſphæricis & Trigonometria ſphærica, nihil reperire licuit in Aſtronomia ſphærica; multa etiam in Geographia ab hiſce principiis pendent. Ipſemet expertus fui, cum ſtudium Aſtronomiæ mihi videretur perplexum, ac tædioſum eſſet reſolutiones problematum primi mobilis ex Autoribus petere; principiis ſphæricis perſpectis, nullo negotio per me ipſum eas fuiſſe conſecutum, & beneficio illorum principiorum eas extemplo reperire potuiſſe, quando de iiſdem cogitandum erat, etſi eas memoria non comprehendiſſem. Quamobrem ſi in Aſtronomia & Geographia perſpicere volueris, quomodo reſolutiones problematum fuerint detectæ; principia ſphærica probe perſpecta eſſe debent. Vi Trigonometriæ autem ſphæricæ patet illatio, qua opus eſt, ut in caſu particulari dato computatio legitime fiat, ope principiorum ſphæricorum, triangulis & in iiſdem datis detectis. Circuli, qui concipiuntur terminati in ſuperficie ſphæræ, oriuntur ex ſectionibus ſphæræ, quas omnes eſſe circulos theoremate 1, §. 13 demonſtratur. Differt adeo Sphærica a Geometria plana, in qua circuli ſe mutuo ſecantes in eodem ſunt plano, cum hic in diverſis ſint planis, omnes tamen terminentur in eadem ſuperficie ſphæræ. Unde facile patet, alium hic

requiri

requiri uſum facultatum cognoſcendi, quam in Geometria plana. Qui vero tertium cognitionis gradum acquirere ſtudet, is utique diſtincte cognoſcere tenetur uſum facultatum cognoſcendi in veritate inveſtiganda requiſitum; conſequenter ubi novus quidam uſus emergit, ad eundem animum attendere debet, ne attentioni ſuæ ſeſe ſubducat. Talia autem inprimis ſcrutari debet, qui Artem inveniendi diſtincte cognoſcere avet, & Matheſi quoque in uſum Philoſophiæ operam navat, ejuſque ſtudio intellectum perficere ſtudet; conſequenter promptum facultatum cognoſcendi uſum conſequi conatur, quem habere poſſunt. Etſi autem intra cancellos, quos præfixit præſentis inſtituti ratio, nos continentes ad particularia non deſcendamus; non poſſumus tamen non excitare attentionem lectoris ſciendi cupidi ad artificium, quo regula catholica Trigonometriæ ſphæricæ fuit eruta; præſertim cum ſingula huc ſpectantia ſatis diſtincte explicaverimus & demonſtrata dederimus. Elucet enim ex eo uſus prorſus ſingularis fictionum ad formandos conceptus univerſales, ſub quibus comprehenduntur, quæ, propter intrinſecam diverſitatem, ad commune quoddam genus, ſeu univerſalem quandam notionem reduci minime poſſe videbantur. Etſi enim hujus artificii jam mentionem quandam injecerimus in Analyſi; ſingularis tamen prorſus hic occurrit applicatio, ut aliam prorſus formam induat. Regulam catholicam non alio fine inveſtigavimus, quam ut memoriæ ſuccurreretur, regularum multitudine non obruendæ, & ut omnis applicatio Trigonometriæ ſecum ferat ſenſum certitudinis manifeſtiorem. Habemus igitur hic, quod imitemur in aliis diſciplinis practicis, ad praxin omnem facilitandam. Quamvis enim dentur artificia adhuc alia, quibus idem præſtari poteſt, nec ſemper recurrendum ſit ad fictiones; ſufficit tamen hoc exemplo nos moneri, cogitandum quoque eſſe in Diſciplinis practicis de praxi per regulas catholicas facilitanda; immo & de theoria multiplici ad notiones univerſales reducenda, ut facilior evadat ejus ad humana negotia applicatio. Maximæ hoc ipſum utilitatis eſt, cum non omnium ſit theoriam, quæ multitudine regularum abundat, ita memoriæ infigere, ut ſingulæ veluti ſua ſponte præſentes ſiſtantur intellectui, quoties uſus eas requirit, cum tamen ad recte agendum illis carere nequeamus. Mirabuntur forſan nonnulli, qui, cum Matheſin ſibi ſoli diſcant, ad alia, quæ extra eam ſunt, animum non diuertunt, nos ſtudium Matheſeos explicaturos talia proferre, quæ cum eo nihil commune habere videntur. Enimvero qui animo recoluerit, quæ ſupra de ſtudio Matheſeos, intellectus perficiendi gratia inſtituendo, in medium attulimus, & cum eodem

ſtudium Philoſophiæ verioris, quam in operibus noſtris tradimus, conjunxerit, non habebit amplius quod miretur, utilitatem eorum, quæ hinc inde commendantur, reipſa experturus.

§. 289. Trigonometriam ſphæricam non explicamus, niſi in uſum Aſtronomiæ & Geographiæ. Quamobrem non plura tradimus, quam quæ huic fini ſatisfaciunt. Et quoniam Trigonometria ſphærica demonſtrari nequit, niſi ſuppoſitis principiis ſphæricis, nec applicari in Aſtronomia & Geographia niſi mediantibus his ipſis principiis; nec ex hiſce addidimus, niſi quæ huic ſcopo ſufficiunt. Etſi itaque Algebra ad doctrinam quoque Sphæricorum & Trigonometriam ſphæricam applicari poſſit; uſum tamen Algebræ in hac Matheſeos parte prætermiſimus, cum unice propoſitum nobis fuerit praxin Trigonometriæ ſphæricæ reddere faciliorem. Ne tamen quis exiſtimet, eum vel eſſe nullum, vel adeo difficilem, ut hactenus detegi non potuerit; provoco ad exempla, quæ dedit Jacobus Kresa e Societate Jeſu in Analyſi ſpecioſa Trigonometriæ ſphæricæ, primo mobili &c. applicata, & ad hiſce illuſtriora, quæ extant in Commentariis Academiæ Imperialis Petropolitanæ. Problemata primi mobilis per Algebram ſoluta, ſi ad Geometriam puram reducuntur, non ſunt niſi problemata ſphærica. Geometræ ſane de Sphærica nunquam cogitaſſent, niſi problemata primi mobilis in Aſtronomia de ea cogitandi anſam dediſſent. Neque dubium eſt, initio hanc Geometriæ partem ab Aſtronomia ſphærica non fuiſſe ſeparatam, quemadmodum & ipſa Trigonometria non tradebatur niſi in Aſtronomia.

CAPUT IX.

De Studio Aſtronomiæ.

§. 290. Studium Aſtronomiæ multis ſeſe nominibus commendat omnibus, qui ad ſolidam rerum cognitionem adſpirant, ſive ſecundum cognitionis gradum, ſive tertium intendant; & inprimis ſi quis intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navet, ac ad ſcientiam naturalem excolendam animum appellere velit; immo ſi ſtudio medico ſeſe mancipandi animum habuerit. Diverſi admodum ſunt fines, cur quis ad ſtudium Aſtronomiæ accedit. Quare nec omnibus eodem modo in eodem verſandum, cum diverſos fines non eodem modo conſequi detur. Noſtrum igitur eſt docere, quid unicuique faciendum, ut finem a ſe intentum conſequatur.

§. 291.

§. 291. Sunt qui curioſitatis tantummodo gratia Aſtronomiam addiſcendam eſſe ſibi perſuadent; cui tanto magis ſatisfaciendum exiſtimant, ne ignorent ea, quæ in Calendariis extant; non decere virum eruditum arbitrati, ut Calendarium quotidie in manu habeat, non tamen intelligat, quæ in eodem traduntur. Sunt alii, qui iſtis oculatiores longius proſpiciunt, & adoleſcentibus ob curioſitatem commendant ſtudium Aſtronomicum, ut eadem excitetur ſciendi cupiditas & magis magiſque inflammetur. Sane non alio fine in ſcholis introductus eſt JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus de ſphæra; cui deinceps alii ſubſtituere alios libellos, uſum Globorum, & computum eccleſiaſticum exponentes. Etſi enim ea fini etiam Theoricas Planetarum conſignaverit PURBACHIUS; cum tamen Theorica magis conducere viſa iis, qui ex inſtituto Aſtronomiæ operam navaturi ſunt, quam promiſcue omnibus, & ipſe PURBACHIUS potiſſimum intenderit, ut ad ſtudium aſtronomicum fere neglectum ac deſertum aditum aperiret, & animos juvenum ad idem perſequendum accenderet; Theorica ex ſcholis proſcripta in Academias relegata, ubi præter Profeſſorem Mathematum inferiorum, qui Matheſin puram, cum Geometria practica, & Staticæ elementis, interpretari debebat, etiam conſtitutus Profeſſor Mathematum ſuperiorum, qui Aſtronomiam cum Geographia, Chronologia, Gnomonica & Aſtrologia doceret. Unde hodienum in Academia Wittebergenſi & Hafnienſi duo ſunt Mathematum Profeſſores, alter Mathematum inferiorum, alter ſuperiorum. In ſcholis itaque inferioribus, in quibus adoleſcentes ad lectiones academicas præparandi, ſufficere viſum, ſi Aſtronomiæ ſphæricæ, & computi eccleſiaſtici prægustum quendam haberent, & figuras geometricas conſtruere addiſcerent. Unde memini in Gymnaſiis quoque patriis, Vratislavienſibus ſcilicet, cum ego adoleſcens Magdalenæum frequentarem, Profeſſorem Matheſeos nonniſi conſtructiones figurarum, cum definitionibus Geometriæ elementaris, uſum Globorum & computum eccleſiaſticum docuiſſe. Et quamvis inſigni cupiditate methodum mathematicam cognoſcendi jam tum flagrarem, nec minor eſſet Algebræ addiſcendæ ardor; quod illa certam acquiri poſſe cognitionem, cui contradicere nemo auſit; hac vero, proprio marte veritates incognitas inveſtigari audiviſſem; nemo tamen erat, qui ſitim meam reſtinguere valeret; immo non deerant, qui ſtudium Matheſeos diſſuaderent, aut ſaltem affirmarent, me ejus auxilio non conſecuturum, quod ſperabam. Ego vero nunquam ab ea opinione me dimoveri paſſus ſum, cujus quidem rationes hic exponi nil attinet.

§. 292. Qui adeo ſolius curioſitatis gratia Aſtronomiam addiſcere volunt, iis ſufficit hiſtorica veritatum præcipuarum cognitio. Nimirum primo ipſis legenda ſunt, quæ capite primo Aſtronomiæ ſphæricæ, quoad obſervationes communes & principia inde ſtabilita, traduntur. Neque enim integro hoc capite continetur quidpiam, quod captum Mathematum imperiti excedat; & quocunque quis animo ad Aſtronomiam accedat, ea ignorare non debet, quæ in eodem continentur. Deinde ex ſecundo capite, quod de circulis ſphæræ mundanæ agit, definitiones circulorum & aliorum nonnullorum ad eos ſpectantium ſibi familiares reddat, omiſſis ceteris omnibus. In capite vero quarto legat ſcholia probl. 16, §. 244 *& ſeqq.* quæ de catalogo fixarum, & aſteriſmis, ac magnitudine apparente illarum loquuntur. Addi poſſunt hinc inde ſcholia quædam alia, quæ utrum contineant, nec ne, quod videatur notatu dignum, quilibet facile per ſeipſum judicabit. Hinc ſtatim accedat ad caput ſextum, in quo conſtructio & uſus Globi cœleſtis in ipſius potiſſimum uſum docetur. Neque male ſibi conſulet, ſi in capite ſeptimo perlegat de refractione & parallaxi, quæ in definitionibus & ſcholiis habentur, & ſub rubrica obſervationum reperiuntur: id quod etiam intelligendum de crepuſculis, quibus deſtinatur caput 8, ſeu ultimum Aſtronomiæ ſphæricæ. Et hæc ſatisfaciunt etiam adoleſcentibus ad ſtudium Aſtronomiæ præparandis, quoad partem ſphæricam. In parte Theorica iis, qui ſolius curioſitatis gratia Aſtronomiam addiſcunt, commendanda ſunt capita tria priora de natura Solis ac Lunæ ceterorumque Planetarum, & mundi ſyſtemate, ſi pauca quædam problemata excipias, quæ prætermitti poſſunt. Poterunt etiam prætermitti theoremata, quæ in uſum ſyſtematis mundani evincendi proponuntur §. 571 *& ſeqq.* Sufficit enim ut ſaltem theorema 27, §. 612, & theorema 28, §. 630 cum ſubjectis ſcholiis legat, demonſtratione prioris inſuper habita. De Theoria Planetarum, quæ capite quarto traditur, non plura cognoſcere tenetur quam hypotheſin: non tamen prorſus inconſultum eſt, ut addat definitiones, quarum in Theorica uſus, propterea quod hi termini in Calendariis quoque occurrunt, quæ intelligere vult curioſitatis gratia Aſtronomiæ operam aliquam impendens. Quod ad Lunam attinet, præter definitiones & obſervationes, a §. 816 uſque 822, non eſt, quod curioſus tantummodo lector attingere teneatur. Et ex capite ſexto tantummodo diſtantias planetarum a Terra ex §. 906, earumque magnitudines ex §. 922, haurire debet. De adſpectibus capite ſeptimo ſufficiunt eidem definitiones §. 926-935, cum definitionibus eclipſium §. 937 & §. 982. Denique ex capite ultimo de ſtellis

lis fixis & novis atque cometis, ſufficiunt theoremata abſque demonſtrationibus,& obſervationes,omiſſis vero problematis. Ea abunde ſatisfaciunt, ut de rebus aſtronomicis verba facere poſſit, quando occaſio tulerit in ſermone communi, & intelligere, quæ in Calendariis de iiſdem habentur.

§. 293. Quodſi quis cognitionem hiſtoricam Aſtronomiæ accuratiorem deſiderat; is omnia, omiſſis demonſtrationibus, ea induſtria perlegere debet, quam pro primo cognitionis gradu præſcripſimus. Quodſi tamen praxin non curat, nec opus eſſe videtur, ut ſingula problemata perluſtret. Abunde ſufficit, ſi theoriam planetarum primariorum perſpectam habeat & calculi eclipſium ideam aliquam animo concipiat. Permittendum adeo eſt unicuique, quo uſque ipſum trahat ſua voluptas. Vix enim alius finis intendi poteſt, quam ut notitia rerum aſtronomicarum animum delectet. Quoniam itaque ſola voluptas menſura eſt eorum, quæ addiſcenda ſunt, uniuscujuſque omnino relinquendum eſt judicio, quantum eidem ſatisfaciat. Quemadmodum illam ſuo quiſque modulo metiri debet, nec ex ſe judicare licet alios; ita quoque determinari nequit, quænam unicuique conducant.

§. 294. Cognitio Aſtronomiæ hiſtorica quoad partem ſphæricam, facilitatur continuo uſu Globi cœleſtis, qui ſemper ad manus eſſe debet. Etenim definitiones multo facilius intelliguntur, ſi ea, quæ declarant, in ſuperficie Globi repræſententur; cum imaginatio nihil amplius faceſſat negotii, ob conſenſum ejus cum ſenſu ſeu viſu. Si ſchemata in plano delineantur, quemadmodum fieri ſolet & a nobis quoque factum eſt; ſenſus non revera exhibet, quod repræſentare debebat; ſed ſaltem dirigit imaginationem, ut vi vocabulorum, quæ in definitione continentur, ſibi formet ideam ejus, quod cognoſci debet. Sumamus exemplum facile, ut quæ dicuntur recte intelligantur. Declinationem ſtellæ definimus per diſtantiam ejus ab æquatore. Cumque diſtantiam a circulo maximo eſſe oſtenderimus arcum circuli maximi inter duo puncta in ſuperficie ſphæræ intercepti & ad circulum maximum perpendicularem (§. 76 *Sphæric.*); ideam declinationis formaturi imaginari debemus circulum maximum in ſuperficie ſphæræ, qui per centrum ſtellæ, ſeu punctum in ſphæræ ſuperficie datum, & per æquatorem tranſit, & hunc ad angulos rectos ſecat. Quamobrem cum porro conſtet (§. 28 *Sphær.*), hunc circulum tranſire debere per polos æquatoris, quos eoſdem eſſe cum polis mundi conſtat (§. 48 *Aſtron.*); nobis imaginari debemus ſphæram cavam, in cujus centro oculus collocatus, & in eadem duos polos, circa quos vertitur, una cum æquatore intervallo quadrantis

in ſuperficie ſphæræ deſcripto, & circulo tranſeunte per polos & ſtellam, ſeu punctum in ſuperficie datum tranſeunte, qui ſecat æquatorem. Ita enim demum idea repræſentabit declinationem. In plano circulus MAPQ repræſentat ſphæram mundanam, puncta P & p polos mundi diametraliter oppoſitos, AQ æquatorem ex altera hemiſphærii parte, in qua ſumitur ſtella S ſive punctum quodcunque datum. PSp repræſentat circulum, qui per polos mundi P & p atque punctum datum S tranſit, in eadem hemiſphærii parte, & æquatorem in D ſecat. Unde arcus circuli maximi DS repræſentat Declinationem ſtellæ, ſeu puncti S. Hinc liquet, quomodo definitiones primum explicandæ ſint per figuras in plano delineatas. Enimvero cum idea hujus ſchematis non ſit ea, quæ rem ipſam, prouti concipitur, repræſentat, ſed vicariam ſaltem operam præſtet; imaginationis eſt, eam transformare in ideam veram. Loco igitur circuli APQpA nobis imaginamur ſphæram cavam, in cujus centro oculus conſtitutus; in ejus ſuperficie imaginamur porro duos polos P & p ſibi diametraliter oppoſitos, & æquatorem ab utroque polo undiquaque eodem intervallo diſtantem, tandemque circulum alium per ſtellam in eadem ſuperficie ſumtam & duos polos tranſeuntem, qui neceſſario æquatorem ſecat. Atque ita demum imaginatio veluti viſui percipiendam exhibet declinationem SD. Nemo non videt non ſine exercitio vim iſtam acquiri, quæ imaginationi ad iſtam transformationem idearum ſufficit; immo ipſam imaginationis vim jam extendendam eſſe, ut ſatis clare repræſentet quod percipiendum. Enimvero ſi globus fuerit ad manus, cum in ejus ſuperficie deſignati ſint poli, & æquator deſcriptus, ac præterea Meridianus circulus per polos mundi tranſiens, ſub quo ob ejus volubilitatem circa polos, & ſitum Meridiani fixum, quodvis ſuperficiei punctum pro arbitrio conſtitui poteſt; non alia re opus eſt, quam ut ſtella conſtituatur ſub Meridiano, ita enim ejus arcus inter eandem & æquatorem interceptus repræſentat declinationem, qualem imaginatio percipiendam exhibere decet. Atque ita ſenſus cum eadem conſentit. Non eſt quod excipias, Globum exhibere in ſuperficie convexa, quod imaginatio transferre debet in concavam; conſequenter nec hic ſenſum cum imaginatione conſentire. Etenim quis non videt, cum non neceſſarium ſit ut oculus collocetur in centro ſphæræ, fingi poſſe quod is extra ſphæram collocetur? quod ubi imaginamur, imaginatio a ſenſu non diſſentit. Quodſi vero imaginationis vi ipſam ſphæram mundanam repræſentare velis, qualis nobis apparet, dum noctu cœlum ſtellis ſuperbiens contuemur; multo jam facilius accidit ea, quæ

Tab. IV. Fig. 40.

quæ oculo extra ſphæram mundanam per fictionem conſtituto apparent, eidem in centrum ſphæræ retracto, tanquam in concava, percipienda exhibere.

§. 295. Non dubito fore haud paucos, qui nodum in ſcirpo quæri exiſtimaturi ſunt, & ſine iſtiuſmodi ſcrupuloſitate Aſtronomiæ cognitionem hiſtoricam acquiri poſſe tanto confidentius ſibi aliiſque perſuaderi conabuntur, quod experientia teſtetur, ex ſchematiſmis in plana delineatis ſatis intelligi, abſque ulla opera, quæ per definitiones explicantur, & in reſolutionibus problematum præcipiuntur. Enimvero quis vitio vertet Philoſopho, quod diſtincte explicet uſum facultatum, quem alii de eodem parum cogitantes faciunt, præſertim eo fine, ut ſimul oſtendat, quomodo uſum iſtum facilitare liceat? Homines & animalia moventur abſque cognitione regularum Staticæ, nec norunt, quem faciant eorundem uſum, dum eaſdem inviolabiliter obſervant. Ecquis vero reprehendit BORELLUM, quod, in egregio opere de motu animalium, ex regulis Staticæ eundem demonſtrandum ſibi ſumſerit? Si quis fuerit Aſtronomus, qui in Pſychologia ſimul verſatus, ut acumine ſuo diſcernere poſſit, quæ modificationibus animæ inſunt; is utique agnoſcet vera eſſe, quæ de idea vi imaginationis formanda ad clare percipienda, quæ in Aſtronomia ſphærica docentur, in medium attulimus (§. 294).

§. 296. Quemadmodum vero illam idearum transformationem juvat, præter Globum cœleſtem, ſphæra etiam armillaris; ita non inutile foret, ſi, ad ſimilem uſum in parte Aſtronomiæ theorica obtinendum, adhiberentur Inſtrumenta levi ſumtu parabilia, quibus phænomena motus ſecundi apte repræſentarentur; non quidem ea accuratione, ut calculi vicem ſubire poſſent, ſed quantum ſufficit, ut motus ſecundus, ſeu proprius, diſtincta notione comprehendatur. Intendebat hoc PURBACHIUS cum ſuis Theoricis Planetarum; ſed cum, Aſtronomiæ parte theorica per COPERNICUM inprimis ac KEPPLERUM reformata, nullus amplius illarum ſit uſus; alia prorſus forma fieri hodie deberent inſtrumenta ad motus ſecundi phænomena eodem modo repræſentanda, quo ope Globi artificialis repræſentantur phænomena motus primi. Equidem non ignoro, non defuiſſe aliquos, qui de motu ſecundo Planetarum organice repræſentando cogitarunt; ſed deſunt inſtrumenta, quæ ad communem diſcentium uſum adhiberi poſſent. Neque vero negandum eſt in Theoricis defectum iſtiuſmodi inſtrumentorum eſſe tolerabiliorem quam in ſphæricis; quia, per ſchemata in plano deſcripta, non adeo confunditur imaginatio, quam in ſphærica; & quod ad Theoricam demum accedas ſphærica abſoluta; conſequenter ubi notionibus aſtronomicis jam adſuetus animus.

§. 297. Qui propter praxin Aſtronomiæ operam navant, cum ea varia ſit, nec omnes eodem modo in ea verſari debent. Conſtat, ad praxin Aſtronomiæ facilitandam, conditas eſſe Tabulas tam primi mobilis, quam motus Planetarum. Illarum uſus eſt in parte ſphærica; harum vero in theorica. Quibus adeo calculus aſtronomicus curæ cordique eſt, illi uſum Tabularum multiplici computatione ſibi familiarem reddere tenentur. Præfiguntur Tabulis præcepta calculi, quæ non in omnibus ſunt prorſus eadem. Quamobrem ut ea intelligantur, cognitio ſaltem hiſtorica ex Elementis Aſtronomiæ præmittenda. Quo accuratior hæc fuerit, eo melior. Equidem fieri poteſt, ut calculum aſtronomicum juxta Tabulas abſolvat, qui terminos tantummodo cognitos atque perſpectos habet; ſed in tenebris quaſi verſatur, qui nihil prorſus rationis regularum perſpicit. Suadendum igitur eſt, ut theoriæ, tam ſphæricæ, quam theoricæ cognitione hiſtorica animum imbuas, antequam ad calculum accedas. Dedimus ipſimet præcepta calculi aſtronomici, eademque exemplis illuſtravimus. Quamobrem qui ad hanc praxin adſpirat, ad ea animum advertere tenetur. Exemplorum typum ita repræſentavimus, ut ideam exemplarem calculi animo ingenerare poſſit, quæ regularum vicem tueri poteſt, ubi plura exempla computaveris, & eadem forma calculum deſcripſeris. Antequam autem ſatis exercitatus fueris, ut tibi fidere poſſis, quod nulla ex parte aberraveris; exempla computanda ſunt, quæ in Ephemeridibus habentur, ut cum iis conferre queas, quæ calculus tuus prodit.

§. 298. Tabulæ aſtronomicæ non alio fine conduntur, quam ut calculus reddatur facilior & brevior. Computantur autem ex obſervationibus calculo geometrico, aut, ſi mavis trigonometrico. Quamobrem Tabularum conditoribus calculus geometricus perſpectus eſſe debet. Formam quoque hujus calculi cognoſcere tenetur, quicunque ſolidam Aſtronomiæ ſcientiam acquirere debet. Nos in Elementis noſtris hunc calculum, non modo regulis perſpicue ac diſtincte propoſitis, comprehendimus; verum etiam exemplis illuſtravimus, & typum calculi ita exhibuimus, ut in praxi commode regularum vice fungatur, ipſeque calculus prolixus ab omni perplexitate & moleſtia liberetur. Uſi nimirum hic ſumus eodem artificio, quo calculum algebraicum facilitare ſtuduimus. Quamobrem, ſi quis præcepta calculi cum typo conferat, non habebit, quod conqueratur de obſcuritate, ſed plena luce fruetur in iis intelligendis; modo in Trigonometria fuerit verſatus, cujus problemata familiaria ſupponuntur, nec ignoret terminos, quos ex definitionibus perſpectos habere debet. Neque enim acce-

dendum eſt ad calculum geometricum, niſi intellectis terminis aſtronomicis & Trigonometriæ, tam ſphæricæ, quam planæ, praxi in poteſtatem ſuam redacta. Si quis numeros datos variaverit, in aliis exemplis calculi typum imitaturus; is non modo habitum computandi ſibi comparabit; verum etiam ideam calculi exemplarem memoriæ infiget, ope ſchematis delineati in memoriam facile revocandam, quoties calculo iſto utendum. Atque hoc ipſo obtinetur, ut non modo moleſtia omnis a calculo aſtronomico arceatur, ſed etiam ut animo placido, nec perturbato ſanguinis circulo, calculos continues per tantum temporis ſpatium, quantum libuerit; modo tibi non moleſtum accidat tempus calculis fallere, quod ſcientiæ amplificandæ impendere malles. Neque enim tædia, ex diverſo fonte propullulantia, pro diverſitate inclinationum naturalium quibus natura homines a ſe invicem differre voluit, in unum confundenda; errore manifeſto iis, qui in Pſychologia cum laude ſunt verſati. Quodſi vero præcepta calculi, quæ numeris ſuis diſtincta ſigillatim exhibuimus, tranquillo animo lente feſtinans perpendas; formæ calculi notionem diſtinctam conſequeris, uſus regulis quas in Logica pro acquirenda notione diſtincta præſcripſimus; etiamſi illas nunquam didiceris, nec, dum juxta eas determinas facultatum cognoſcendi uſum, earum tibi conſcius fueris. Quantum hoc conducat ad perficiendum intellectum, ut etiam extra Matheſin diſtincte concipere adſueſcas, quæ meditaris, & ordine in meditando cogitationes tuas promoveas, nunc demonſtrare nolo; etſi demonſtratio ex Pſychologiæ ac logicæ principiis dari poterat; utpote aſſenſum non niſi eorum extorſura, qui Metaphyſicæ, prouti a nobis tradita, jam operam debitam navarunt. Sufficit monuiſſe, quod credendum ſit experto; & oculata futura ſit fides ſingulis, quotquot conſilio noſtro aurem benignam præbere non dedignati fuerint. Qui Aſtronomiam non ſibi diſcunt, ſed intellectus perficiendi gratia eidem incumbunt, id quod faciendum plurimis (cum paucis admodum Aſtronomis opus habeat genus humanum) illis formam calculi animo concepiſſe ſufficit, nec opus eſt, ut in eodem ſint exercitati. Quatenus tamen exempla lucem affundunt præceptis, non inconſultum eſt, ut unicum ſaltem, quod exhibuimus, exemplum computent, ſingulis præceptis ad idem applicatis; præſertim cum etiam extra Matheſin, in Philoſophia præſertim practica, magna ſit exemplorum vis; quemadmodum in parte altera Philoſophiæ practicæ univerſalis demonſtravimus; atque adeo utile ſit ad Philoſophiam animum appellenti præcepta ad exempla dextre ac expedite applicare. Ecce igitur tibi uſum univerſalem eumque maximi faciendum;

dum, ob quem hæc pars ſtudii aſtronomici promiſcue commendari meretur omnibus, quos ſolida rerum cognitio juvat; etſi ætatem omnem in calculis aſtronomicis conſumere nolint; immo etſi futurum vitæ genus minime ferat, ut notitiam multo labore acquiſitam conſervent. Quoniam enim ea conſervari, hoc non obſtante, poteſt intellectus habitudo, quam hoc ſtudio acquiſiviſti; non eſt quod conqueraris, te in ſpem futuræ oblivionis diſcendo ea, quæ tibi nulli uſui ſunt, tempus inutiliter conſumſiſſe.

§. 299. Peculiaris quoque praxis aſtronomica eſt phænomena ſiderum obſervandi, omnis praxeos reliquæ baſis. Ex obſervationibus enim calculo geometrico eruuntur, quæ in Aſtronomia ſcire intendimus; nec abſque iis, calculi hujus beneficio, conduntur Tabulæ, quarum in praxi tam commodus eſt uſus. Immo, abſque obſervationibus non licet perficere Tabulas, ut major ſit earum cum cœlo conſenſus. Ne igitur hac in parte quoque deeſſemus; modum quoque obſervandi expoſuimus, ut aliquam ejus ideam animo concipere detur. Nemo autem a nobis requiſiverit, ut omnia minutiſſime perſequamur, quæ ad dexteritatem in obſervando faciunt. Quodſi enim quis obſervatorem agere voluerit, is non modo intellectis iis, quæ a nobis traduntur, legat Autores ſupra commemoratos, cum ſcripta Aſtronomorum recenſeremus; verum etiam in obſervatorio aliquo celebri, quale eſt Pariſinum in Gallia & Grenovicenſe in Anglia, per aliquod tempus commoretur, ut, quæ ad obſervandi dexteritatem faciunt, ab Obſervatoribus exercitatis addiſcat. Quamvis enim impoſſibile non ſit, ut eandem multo exercitio per ſe aſſequatur, ſi in obſervando ſedulus ac continuus ſit; facilius tamen longe accidit, ubi alios præeuntes imitamur, quam ſi demum multa circumſpectione ipſimet detegere ea debeamus, quæ ad obſervationem accuratam conducunt. Quodſi quis inſtrumenta, modumque obſervandi Veterum cum recentioribus & recentiſſimis conferre voluerit; is animadvertet cum theoria Aſtronomiæ creviſſe quoque obſervationum perfectionem. Unde conficitur, eum, qui obſervationibus aſtronomicis vacare voluerit, theoriam quoque Aſtronomiæ ſibi perſpectam reddere debere. Immo ex iis, quæ in noſtris Elementis demonſtrantur, jam patebit, obſervatorem in calculo quoque aſtronomico, ipſo etiam geometrico verſatum eſſe debere. Sane qui obſervatorem agere voluerit, Aſtronomiam omnem, tam theoreticam quam practicam, intime perſpectam habere debet. Ad obſervandum requiruntur inſtrumenta &, ſi obſervationes accuratæ eſſe debent, accuratis quoque opus eſt inſtrumentis. Quamobrem qui obſervationibus

tionibus aſtronomicis ſeſe dare voluerit, inſtrumentorum quoque fabricam, uſum, & examen intime perſpicere debet. Notio inſtrumenti adæquata eſſe debet, qualis ſufficit ei, qui artificem ejus fabricam docere vellet, aut, ſi arte polleret, ipſemet idem conſtrueret. Rationes ſingulorum in fabrica obſervandorum ex theoria Aſtronomiæ reddendæ, ut ſcientifica ſit inſtrumenti cognitio. Uſum accuratum determinat Aſtronomiæ theoria ad conſtructionem inſtrumenti applicata. Conſtruitur enim inſtrumentum in certum finem, veluti magnus Gnomon ad obſervandas altitudines Solis meridianas per ſingulos anni dies; ex theoria autem Aſtronomiæ conſtat, quanta exactitudine finem intentum conſequi debeamus. Inſtrumenti igitur is fieri debet uſus, quem finis conſequendus exigit. Examina non modo pro diverſitate inſtrumentorum, verum etiam pro uno eodemque inſtrumento varia eſſe poſſunt. Eo autem tendunt omnia, ut inde conſtet, inſtrumenta eſſe accurate facta, atque adeo iis in obſervando fidendum eſſe, ſi quidem certus ſis te debitam in obſervando diligentiam adhibuiſſe. Ad hæc examina referendum, ſi quis inſtrumento ſuo eadem ἀκριβεῖα phænomenon obſervat, qua ab aliis celebribus Obſervatoribus alias fuit obſervatum; veluti ſi quis per teleſcopium ſuum Saturni eaſdem phaſes videt, quales primus exquiſitiſſimis teleſcopiis obſervavit HUGENIUS. De examinibus iſtis ſpecialia in medium afferre non licet. Supponunt enim accuratam Inſtrumentorum deſcriptionem, qualem hic dare non licet. Sufficit adeo monuiſſe, quod iſtiuſmodi examinibus opus ſit, ne magno conatu ac maxima diligentia nihil agas. Obſervationes aſtronomicæ ſunt pauciſſimorum, propterea quod non quilibet, qui Aſtronomiæ ſtudio delectatur, gaudet ſupellectili ad obſervandum neceſſario, fruiturque otio ac commoditate obſervandi. Quamobrem in noſtris Elementis nonniſi ea tradidimus, quæ ſufficiunt, ut intelligatur, qualibus obſervationibus opus habeat Aſtronomus.

§. 300. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, Elementa Aſtronomiæ integra eodem modo perluſtrare tenentur, quem ſupra pro cognitionis gradu ſecundo acquirendo præſcripſimus. Eum enim in finem Elementa Aſtronomiæ eadem methodo conſcripſimus, qua Elementa Geometriæ condidimus; etſi communiter Aſtronomi continuo diſcurſu, quemadmodum vulgo faciunt Autores, ſua proponant; ſit ita quod demonſtrationes eidem interſerant: quem morem etiam hodie Geometræ ſequuntur, in ſchediaſmatis præſertim quibus inventa ſua orbi literato communicant in Diariis Eruditorum & Commentariis Societatum Regiarum. Conſtat

ipſum

ipſum PTOLOMÆUM eundem morem tenuiſſe in Almageſto ſuo. Negari tamen non poteſt, quod methodus *Euclidea*, quam nos adhibuimus, multo ſit clarior; præſertim ſi omnia rigide demonſtranda, nec ſumenda, quorum demonſtratio lectoris induſtriæ relinquitur, neque etiam immiſcenda, quæ prorſus non demonſtrantur. In parte etiam ſphærica, ex principiis ſphæricis rigide demonſtravimus, quæ vulgo ab Aſtronomis fiducia illorum principiorum ſumuntur, ne evidentiam deſiderent tyrones; inprimis ubi Elementa Geometriæ tam ſcrupuloſa induſtria pertractarunt, quam ſupra præſcripſimus, & qua omnino opus eſt, ſiquidem ideam methodi demonſtrativæ exemplarem in uſum Philoſophiæ ex Matheſi haurire volueris. Neque porro negari poteſt, ſtudium Aſtronomiæ hoc pacto facilitari. Sane non alia de cauſa PURBACHIUS ſtudium Aſtronomiæ amplificaturus, & ad captum tyronum accommodaturus, Almageſtum PTOLOMÆI, idem methodo *Euclidea* digerere cœpit; telam vix cœptam, poſt obitum ejus, jure legati, pertexente REGIOMONTANO. Non igitur fecimus, niſi quod judicio REGIOMONTANI, Aſtronomi ſummi, probetur. REGIOMONTANUS nullis problemata illuſtravit exemplis: id quod tamen apprime neceſſarium eſſe ex iis, quæ modo in antecedentibus inculcavimus, abunde elucet. Præterea ipſa res loquitur, quod, cum is nonniſi Almageſtum PTOLOMÆI in formam Elementorum EUCLIDIS redigere voluerit, idem non tradat niſi Aſtronomiam antiquam, a qua recentior plurimum differt, præſertim in theorica, ut adeo dici nequeat nos actum egiſſe. Quemadmodum vero Elementa Geometriæ *Euclidea* multo clariora & evidentiora reddidimus, tum quod demonſtrationes fecerimus completas & ordinatas, quales eſſe debent, ſi quis methodum demonſtrativam in uſum philoſophandi addiſcere voluerit, tum quod reſolutiones problematum magis diſtincte exhibuerimus; ita idem obſervavimus, ut in ceteris Matheſeos partibus, ſic etiam in Elementis Aſtronomiæ. Obſervationes præterea, quales in Matheſi pura nullæ occurrunt, ſigillatim quoque ita recenſuimus, ut præter facta nihil contineant; ea vero, quæ inde concluduntur, per modum corollariorum deduximus; quemadmodum vult Logica verior, & fieri debere in Logica noſtra evicimus: id quod etiam in diſciplinis opticis jam fecimus. Sicuti enim methodus demonſtrativa in iis, quæ operationibus intellectus perficiuntur, ad amuſſim obſervat regulas in Logica præſcriptas: ita etiam in iis, quæ ſenſuum uſu ſub directione intellectus innoteſcunt, ejuſdem regulas ſequi debet. Nihil adeo a nobis prætermiſſum exiſtimamus, quod methodus accurata exigere poterat. Cum in theoricis nonnulla den-

tur,

tur, quæ rigide demonſtrata eſſe dici nondum poteſt, etſi rationi & experientiæ admodum conſentanea videantur, & quæ in uſum Aſtronomiæ practicæ ſumenda eſſe unanimiter hodie conſentiunt Aſtronomi; veluti quod Terra moveatur motu vertiginis, & motu translationis circa Solem (§. *622*), & deſcriptio Syſtematis mundi (§. *630*); demonſtrationis quoque titulum omiſimus; ne, contra regulas Logicæ de demonſtratione, pro tali venditemus, quæ non eſt, ut ab incautis vulgo pro tali habeatur. Nulli igitur dubitamus fore, ut certam nobiliſſimæ ſcientiæ cognitionem ex Elementis noſtris hauriat, qui non perfunctoria opera in iiſdem verſari voluerit. In Theoricis ſecuti ſumus hypotheſin KEPPLERI; quam cum cœlo magis conſentire ceteris hypotheſibus commentitiis omnibus in confeſſo hodie eſt, apud Aſtronomos omnes, fiducia obſervationum quibus in Aſtronomia omnia dirimenda. Quamobrem quoque placuit calculum geometricum explicare, qualem dedit KEPPLERUS in Commentariis de ſtella Martis, & in Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ; ut & conſtructio Tabularum Rudolphinarum, & calculus Rudolphinus intelligatur. Quoniam tamen hodie majore fruimur luce in Geometria, quam KEPPLERI ævo; ea quoque addidimus, quæ lubens ipſe in theoriam ſuam recepiſſet, ſiquidem ipſi ea videre licuiſſet.

§. 301. Neminem vero, qui Dioptricam ante didicit, quam ad Aſtronomiam accederet; quemadmodum omnino fieri debet, ob eximium teleſcopiorum in omni Aſtronomia uſum; offendet, ubi obſervaverit in theorica quædam ſumi, quæ in rigore geometrico vera non ſunt, ad veritatem tamen propius accedunt. Etenim in cognitione Naturæ mathematica, ad quam etiam Aſtronomia referenda, præſertim ſi more *Keppleriano* tractetur, non attendendus eſt rigor geometricus, modo conſtet quæ eodem invito ſumuntur ad veritatem prope accedere; præſertim ubi theoria quæritur propter praxin, ubi approximationes æquipollent veritati. Vidimus quoque in Mechanica iſtiuſmodi hypotheſes in locum hypotheſium naturæ utiliter ſubſtitui; immo ſi praxin unice reſpicias, ſubſtituendas eſſe. Quoniam tamen ad Aſtronomiam accedere licet, Mechanica ſepoſita, ſtatim a Geometria elementari & Trigonometria utraque; non inconſultum duximus denuo inculcare, quod attento lectori ex anterioribus jam patere poterat. Neque hoc abhorret a more priſcorum Aſtronomorum, cum tamen antiquiſſimis temporibus rigor demonſtrandi maxime ſeſe probaret Geometris. Etenim in computo eclipſium ſumſerunt, quemadmodum adhuc fieri ſolet, lineas rectas pro arcubus circulorum, & triangula ſphærica in plana

plana converterunt, ad facilitandum calculum; propterea quod non committitur error ſenſibilis, ſed qui obſervabili minor; error autem obſervabili minor in Aſtronomia practica habetur pro nullo. Huc etiam referri debet, quod in doctrina primi mobilis ſemidiameter Telluris habeatur pro puncto, reſpectu diſtantiæ fixarum. Quando vero dicimus, in demonſtrationibus aſtronomicis non ſemper obſervari rigorem demonſtrandi; id non intelligendum de forma, ſed de materia demonſtrationis. Conſtat nimirum ex Logica, formam probationis ſemper eandem eſſe debere, nec ab ea unquam recedendum, ſi methodus accurata eſſe debet: id quod etiam uſui eſt in rigore demonſtrandi agnoſcendo; ne quis ſibi perſuadeat ſupponi, quæ vera ſunt, ſibi autem in memoriam venire nequeunt. Nullo igitur modo probamus, ſi rigor demonſtrandi quoad formam negligatur; quicquid etiam videatur aliis. Notandum vero & hoc eſt; in Aſtronomia a rigore demonſtrandi quoad materiam recedi, abſque ullo ſcientiæ detrimento; quemadmodum etiam in Dioptrica contingit. Quod enim ſumitur contra veritatem, eadem tamen non invita ſumitur; quia quod ſumitur quoad praxin in locum veri ſurrogare licet, nec ſine utilitate. Alia vero longe ratio eſt, ſi dubium ſumitur tanquam verum, non ſine formidine oppoſiti. Hoc enim in caſu ſubeundum eſt periculum errandi, quale non metuendum in præſenti caſu. Sunt equidem etiam in Aſtronomia, quæ dubia ſunt, & ad certitudinem hactenus deduci minime potuerunt: ſed ea a ceteris ſatis aperte diſtinguimus, ne cum certis confundantur. De hiſce plura mox monebimus in ſequentibus. Non vero vitio vertitur Aſtronomo, ſi in dubiis acquieſcit, ubi certitudo haberi nequit: illud demum vitio vertendum fuerat, ſi dubia pro certis venditaret. A priori nullum damnum metuendum ſcientiæ; a poſteriori autem detrimentum patitur ſcientia. Ingenue confitentur Aſtronomi, ſe a certitudine adhuc abeſſe, ubi eam nondum conſecuti; minime autem certa & explorata videri volunt, quæ non ſunt. Immo ſi contingat a vero aberratum eſſe, obſervationibus contrarium ejus, quod ſtatutum fuerat, loquentibus; diſſenſum ab obſervationibus minime diſſimulant; multo minus erroribus incruſtandis ac pertinaciter defendendis operam impendunt, prouti eruditis ceteris ſolenne. Veritatem nimirum quærunt, quam ubi nondum invenerunt, eandem inveniſſe videri nolunt; ne ſibi non minus quam aliis ad eam inveniendam viam præcludant. In iis quoque, quæ dubia ſunt, unus non ægre fert diſſenſum alterius, quantuſcunque fuerit; nec propter diſſenſum unus alterius laudi detrahit, multo minus eundem inſectatur,

quem-

quemadmodum denuo ab aliis eruditis fieri aſſolet. Quamobrem & nos in dubiis adverſas ſententias recenſuimus, citra injuriam in ullum diſſentientium; & unicuique liberum reliquimus, cuinam illarum accedere velit, aut num inter extremas mediam amplecti malit.

§. 302. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, ſive in Matheſi acquieſcere, ſive intellectum in uſum philoſophandi perficere velint, iis multa ſuppeditabit Aſtronomia. Etenim a parvis initiis continuo crevit, & per multiplices ambages ad ea tandem acceſſit, quæ a cognitione humana maxime remota videbantur. Ad progreſſum adeo Aſtronomiæ animum maxime attendere debet, qui artificia cognoſcere ſtudet, quibus abdita Naturæ rimari datur. Pars ejus ſphærica multo facilior theorica. Quamobrem de illa nobis primum ſigillatim dicendum. Capite primo recenſuimus obſervationes communes, ac inde prima Aſtronomiæ ſphæricæ principia ſtabilivimus. Obſervationes communes ſua ſeſe ſponte offerunt cœlum contuentibus, nec vulgi captum tranſcendunt. Atque adeo liquet prima principia eſſe Aſtronomo cum vulgo communia. Neque etiam aliter fieri potuit, quam ut, qui primus de Aſtronomia cogitavit, aliunde notiones aliquas diſtinctas acquireret ad ulteriora profuturas, quam reflectendo ſuper iis, quæ nemo ignorat, niſi rationis uſu omni deſtitutus. Per haſce communes obſervationes, cœlum percipitur inſtar ſphæræ cavæ, in cujus centro Terra eſt, cui inſiſtimus, & cujus ſuperficiei affixæ ſunt ſtellæ, quæ autem circa Terram continuo revolvitur. Vulgo hæc notio confuſa eſt; ſed Aſtronomus, qui notionem ſphæræ diſtinctam ex Geometria hauſit, eam applicans ad ea, quæ percipit, diſtinctam conſequitur notionem. Atque ita Aſtronomiæ ſtudioſus, immo primus ejus inventor ultra vulgus ſapere cœpit, dum, notione communi ad diſtinctam revocata, aditum ſibi ad ulteriora pandit; cum vulgus in confuſa acquieſcens ulterius progredi nequeat, ſed in iis, quæ percipit, ſubſiſtere teneatur. Quæritur vero jam, an quod apparet revera quoque ita ſe habeat; nimirum an cœlum ſit ſphæra cava, an Terra ſit in centro ejus, ibidemque quieſcat, an cœlum circa eandem continuo rotetur, an ſtellæ omnes ſuperficiei ejus ſint affixæ? Hoc pacto liquet, quomodo ſtatim inventori plura invenienda ſeſe offerant. Quodſi ponas eum eſſe circumſpectum, ne per præcipitantiam ſtatuat; ad quæſtiones haſce animum advertens, eas omnes hinc pendere animadvertit, num ſemper quod apparet ita quoque revera ſeſe habeat. Ponamus Opticam nondum eſſe inventam, quemadmodum probabile eſt Aſtronomiæ eandem ortum ſuum debere: nemo non videt re-

currendum fuiſſe ad obſervationes communes de iis, quæ nobis apparent. Videtur nobis cœlum ſphæra cava, in cujus centro ſumus; quod ſtellæ omnes eandem diſtantiam a Terra habere videntur; nullumque corpus aliud inter oculum & ſtellas interpoſitum apparet. Quodſi ergo experientiam communem conſulimus; objecta remota, etſi aliquo intervallo a ſe invicem diſtent, eodem tamen a nobis abeſſe videntur, ubi inter ea nullum aliud corpus interpoſitum conſpicimus; veluti dum arborem in agro a ſylva procul adhuc remotam huic conterminam videmus e longinquo. Incertum adeo eſſe cognoſcimus, num cœlum ſit ſphæra cava; num ſuperficiei ejus affixæ ſint ſtellæ; num denique Terra ſit in centro. Cumque ex obſervationibus communibus hæc decidere non detur; quid ſtatuendum ſit, dubitandum; neque hactenus apparet, quomodo a dubitatione liberari queamus. Immo ex progreſſu patebit, non adeo facile fuiſſe, ut ab eadem liberaremur. Non plura ſecula, ſed integri millenarii elapſi ſunt, antequam aliqua ſaltem probabilitatis ſpecie ſtatui potuerit, quid veritati conſentaneum videatur. Liquet adeo, a præcipitantia non abeſſe, qui ſcepticiſmum amplectuntur, quamprimum animadvertunt ſe a dubitatione liberari non poſſe, adeoque veritatem fruſtra quæri ſibi aliiſque perſuadent. Quodſi jam porro diſpiciant, num quod quieſcere videtur, revera quieſcat, & quod moveri videtur, revera moveatur; obſervationes denuo communes loquuntur, quieſcentibus in re celerrime mota, quæ quieſcunt in partem contrariam ferri videri; veluti dum curru celerrime vecto per ſylvam arbores nobis in eodem ſedentibus in plagam contrariam currere videntur, vel dum littora moveri in partem contrariam in navi celerrime mota ſedentibus apparet. Quamobrem denuo in dubitationem adducimur, utrum Terra quieſcat, & cœlum circa eandem rotetur; an vero ſtellæ quieſcant & Terra motu vertiginis in plagam contrariam convertatur. Liquet autem, ut ante, ex obſervationibus communibus decidi minime poſſe, a qua parte ſtet veritas. Quodſi ergo qui primi ad Aſtronomiam animum appulerunt, ſcepticiſmo locum dare voluiſſent; omni adhuc Aſtronomia careremus. Enimvero quid faciendum erat in hiſce anguſtiis conſtitutis? Ea tanquam dubia erant notanda, & obſervationes communes ulterius expendendæ, num forſan per eas major lux ſit affulſura, & an nos deducant ad alia intellectui magis obvia. Quodſi hoc facias, in notionem ortus & occaſus incidis, quemadmodum capite primo oſtendimus; quos ubi invicem confers notionem habes moræ ſupra horizontem. Secundam porro obſervationem expendens, continuam ſtellarum ſitus re-

ſpectu

ſpectu verticis tui variationem deprehendis, diſtantia a vertice a primo ejus ortu continuo decreſcente, donec ad minimam pervenerit, & deinde rurſus creſcente, donec ad maximam regreſſa in parte cœli oppoſita occidit. Præterea hinc diſcimus, continuo alias ſtellas oriri; eas autem, quæ per aliquod tempus conſpicuæ fuerant, denuo occidere. Hæc ubi diſtincte conſiderantur, quærendorum ſeſe offert numerus; nimirum quando ſtella aliqua oriatur, quando occidat, quanto temporis intervallo in parte cœli nobis conſpicua commoretur, ſeu quodnam tempus inter ortum atque occaſum intercedat, quænam ſit minima ejus a vertice diſtantia, quandonam ad eandem perveniat, quo tempore ſingulas intermedias in utraque cœli viſibilis parte acquirat. Nemo non videt, phænomena, quæ quærenda animo inſinuant, pendere ab eo quod cœlum, cujus ſuperficiei ſtellæ affixæ ſunt, videatur circa Terram quieſcentem, in qua fixum tuemur locum, moveri, atque ex hoc aſſumto rationem eorundem reddi poſſe. Unde manifeſtum eſt, in gratiam horum phænomenorum, ubi quæſtiones, ad quas nos ea deducunt, reſolvendæ, inſtar hypotheſeos ſumi poſſe; quod cœlum ſit ſphæra cava, in cujus ſuperficie hæreant ſtellæ eidem affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem continuo gyratur. Quoniam ex anterioribus conſtat, phænomena eadem proditura, ſi Terra in plagam contrariam circa axem ſuum convertatur, cœlo cum ſtellis quieſcente; æquipollentia utriuſque hypotheſeos probe perpendenda: ita enim conſtabit, ubi non quæritur niſi quæſtionum illarum, quas commemoravimus, ſolutio, ſalva veritate ſumi poſſe utramvis; conſequenter in Aſtronomiæ parte prima, quæ de motu communi agit, nos feliciter progredi poſſe, etiamſi ignoretur, quænam harum hypotheſium ſit vera. Enimvero utraque hypotheſis non eadem facilitate ſeſe commendat dictas quæſtiones reſoluturis. In inveniendo itaque & demonſtrando præferenda ea, quæ faciliorem operam parit. Ac ea de cauſa in parte ſphærica Aſtronomiæ ſumitur motus cœli & quies Telluris; ac bona methodus jubet ſumi, etiamſi contrarium verum eſſe invictis argumentis demonſtrari poſſet. Etenim in inveniendo & demonſtrando, præſertim ubi praxin intendimus, hypotheſis vicaria in locum hypotheſeos naturæ ſeu veritatis ſurrogatur; quemadmodum jam vidimus in aliis quoque diſciplinis mathematicis fieri. Hinc itaque eluceſcit, progreſſui Aſtronomiæ ſphæricæ non obeſſe ignorantiam veritatis, ſed, eadem in dubio relicta, non minus praxi ſatisfieri, & in ea ad liquidam veritatem pertingi poſſe, ac ſi a primis dubitationibus prorſus eſſemus liberati. Neque dicendus es a vero aberrare ac erro-

erroribus locum dare; modo caveas, ne per præcipitantiam quoad ea erres quæ ſumis. Etſi enim in præſenti negotio error non noceat, nocere tamen poteſt in aliis; iis ſcilicet quæ ab eo pendent quod eſt, non vero ab eo, quod apparet.

§. 303. Probe ea, quæ modo dixi, perpendant velim, qui ad Philoſophiam animum appellunt; etſi Mathematicis, qui, anteceſſorum ſuorum inventa addiſcendo, ſibi habitum quendam inveniendi compararunt, talia puerilia videantur & contemnantur; qui tamen contemtui dant pœnas, quoties de rebus philoſophicis judicium ſibi ſumunt, aut ſuperbo ſupercilio Philoſophiam contemnunt omnem, propterea quod quæ in ea vulgo docentur a certitudine, qualis in Matheſi datur, immenſo intervallo diſtant. Quodſi vero acumine quo pollent uſi, ad animum revocarent ea quæ modo dixi; haud difficulter animadverterent, Philoſophiam hactenus in infantia fuiſſe; infantiam vero ejus prorſus convenire cum infantia Aſtronomiæ; quæ, ſi ob eundem ſtatum negligenda, non educanda fuiſſet, nunquam ad virilem ætatem adoleviſſet. Sane non rectius videre licet, quomodo ſcientiæ philoſophicæ, quæ ex communi vulgi notitia tanquam ex ſemine naſcuntur, in primo ortu eſſe debeant, quam ſi ad ortum Aſtronomiæ animum attendant. Quodſi porro eandem attentionem ad progreſſum ipſius afferant; quid fieri debeat, ut Philoſophia quoque humano generi adeo utilis adoleſcat, haud difficulter perſpicient Aſtronomos imitaturi, quantum fert differentia, quæ inter cognitionem philoſophicam & mathematicam intercedit. Demus exemplum. Communi experientia conſtat, animam in perceptionibus ſuis dependere a corpore, & viciſſim corpus quoad motus organorum externorum & ſui totius, ab anima. Hæc dependentia phænomenon eſt, quale eſt figura ſphærica mundi, cujus ſuperficiei ſtellæ affixæ & quæ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem continuo gyratur. Philoſophus, perinde ac Aſtronomus, notionem confuſam revocat ad diſtinctam, animamque a corpore dependere agnoſcit, quoad ſpecificationem perceptionum & continuitatem temporis, quo cum mutationibus in organis ſenſoriis contingunt; & corpus ab anima, quoad ſpecificationem motuum voluntariorum & continuitatem temporis, quo cum volitionibus animæ contingunt (§. 962 *Pſych. empir.*); notionibus adjutus ontologicis, quemadmodum Aſtronomus geometricis. Atque hoc pacto primo paſſu diſcedit a cognitione vulgi, ſibi aditum paraturus ad ulteriora. Quoniam vero novit, notionibus confuſis non eſſe fidendum, cum per eas appareant haud raro, quæ non ſunt; ad haſce quæſtiones delabitur, utrum illa dependentia ſit realis, an vero ſaltem appareat; ſeu num

anima

anima & corpus revera in ſe invicem agant, & a ſe invicem patiantur, an vero tantummodo in ſe agere, & a ſe invicem pati videantur; quemadmodum Aſtronomus quærit, num cœlum cum ſtellis fixis circa Tellurem in centro ejus collocatam revera moveatur, an ſaltem moveri circa eandem videatur, & utrum Telluris ſitus revera talis ſit, qualis apparet, nec ne. Experientia communi quæſtiones ſuas dirimi non poſſe, perinde ac Aſtronomus agnoſcit. Quemadmodum enim hic motum cœli circa Tellurem non obſervat, neque etiam ſitum ejus in centro ſphæræ mundanæ; ita ſimiliter Philoſophus nullam obſervat actionem corporis in animam, nec animæ in corpus (§. 949, 955 *Pſych. empir.*). Quodſi dicas, Newtonum, virum perſpicaciſſimum, affirmare, actionem illam mutuam animæ ac corporis in ſe invicem, ſingulis momentis, nos experiri; facilis eſt reſponſio. Acumine ſummo polluit in geometricis, non vero in metaphyſicis: acumen autem Geometræ, quod ab imaginatione pendet, non eſt idem cum metaphyſico, quod imaginationi prorſus ſubducitur. Quemadmodum itaque per præcipitantiam judicarunt Aſtronomi, ſi qui experiri ſeſe ſibi viſi fuerint figuram mundi ſphæricam, ſitum Telluris in centro ejuſdem, & motum continuum circa Tellurem in centro quieſcentem; ita quoque per præcipitantiam judicavit Newtonus, quando ſibi viſus fuit experiri actionem mutuam corporis ac animæ in ſe invicem, qua una ſubſtantia in modificationibus ſuis efficiatur dependens ab altera. Ab hac præcipitantia ſibi utique caviſſet, ſiquidem ortum Aſtronomiæ diſtincte expendere voluiſſet, Aſtronomiam non ſibi ſoli addiſcens, ſed in uſum quoque philoſophandi. Quod hoc facere debuerit, minime contendimus, nullius jus violaturi, quod Natura unicuique conceſſit; utpote qui ab omni injuria procul remotum habemus animum, multo minus ejus laudi detrahere cupimus, quam ſummam ipſi merito ſuo magno deferimus; ne quicquam contra humanitatis officia, ad quæ aliis prompte præſtanda obligamur, admittamus. Veritati non minus debetur honos ſuus, quam hominibus præclare de eadem detegenda, & ejus theſauris amplificandis, promeritis. Neque præſumendum eſt, viros magnos velle, ut, dum laudamus, adulemur; cum adulatio potius anſam det laudibus promeritis detrahendi, quam eas amplificandi, nec ipſi appetere cenſendi ſint niſi veritati conſentaneas. Certum adeo manet, Philoſophum circumſpectum, non minus ac Aſtronomum (§. 302), in dubitationem adduci, quid de dependentia animæ ac corporis a ſe invicem, in modificationibus ſuis, ſtatuendum ſit, ubi ejus ratio ex eſſentia & natura utriuſque reddenda;

denda; quemadmodum eam non aliunde reddendam eſſe per prima philoſophiæ principia edoctus eſt. Quemadmodum vero Aſtronomus, in limine Aſtronomiæ adhuc conſtitutus, non videt quomodo a dubitatione liberari poſſit; ita ſimiliter nec Philoſophus, in limine Philoſophiæ adhuc conſtitutus, reperit quomodo ex dubitatione eluctari queat. Quid igitur faciendum? Num animus omnis prorſus abjiciendus & in ſcepticiſmum eundum? Abſit ut hoc faciat, qui philoſophari decrevit! Imitari convenit Aſtronomum. Inquirendum itaque, num obſerventur alia, quæ ab iſta mutua modificationum animæ ac corporis dependentia a ſe invicem porro dependent. Videmus a ſenſatione pendere alios actus facultatis cognoſcitivæ, & ab his actus facultatis appetitivæ & averſativæ: videmus etiam actuum non minus internorum animæ, quam motuum organorum corporis, ſeu actionum externarum, determinationem pendere a nutu animæ; conſequenter eidem competere directionem actionum externarum & internarum quandam. Horum rationem reddi poſſe apparet ex mutua illa dependentia. In hæc igitur omnia inquirere, & praxes hinc a priori deducere licet; nondum licet cognita ratione mutuæ illius dependentiæ modificationum animæ ac corporis a ſe invicem. Quamobrem ſicuti in Aſtronomia ſumimus motum communem tanquam phænomenon, & inde deducimus alia, quæ ab eodem pendent, parum ſolliciti, num revera detur, an ſaltem appareat; ita quoque, in Philoſophia, mutua animæ ac corporis quoad modificationes a ſe invicem dependentia ſumenda tanquam phænomenon, ac inde deducenda ſunt alia, quæ hinc porro pendent; nec ea Philoſophum tangere debet cura, num illa dependentia realis ſit, an tantummodo apparens, & quænam ſit ejus cauſa. Immo cum conſtet, quæcunque tandem cauſa ſit illius dependentiæ, ſemper tamen ſupponendum eſſe animam & corpus ita agere, ac ſi in ſe invicem influerent; quemadmodum in Pſychologia rationali evicimus; ſi vel maxime falſum eſſet, animam & corpus in ſe invicem influere, veritate tamen illæſa, ſumi poteſt tanquam hypotheſis naturæ vicaria, quoad regimen corporis, quod animæ tribuitur, immo quoad regimen ſui ipſius, quatenus a corpore pendere videtur, animam & corpus in ſe mutuo influere; quemadmodum, in Aſtronomia, quoad motum communem ſumimus, cœlum eſſe ſphæram cavam, cujus ſuperficiei affixæ ſunt ſtellæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus collocatam ab oriente in occidentem convertitur, etiamſi perſuaſi ſimus, hæc a veritate abhorrere, ob rationem paulo ante (§. 302) dictam. Memini cum ſyſtema harmoniæ præſtabilitæ maxima animorum acerbitate impugnaretur,

tur, quaſi per ipſum omnis moralitas, omne regimen politicum, immo omnis religio funditus evertatur, cumque ad avertendum tantum ab eo periculum iſta monerem; Theologo cuidam celebri hoc paradoxum, immo abſonum viſum fuiſſe. Sed hoc ipſi condonandum erat, tanquam methodi demonſtrativæ, ac Artis analyticæ prorſus ignaro, cujus nec notionem ullam, nec exemplum habebat. Ecquis enim eſt qui neſciat, ſi vel in ſola Matheſi attentionem ſuam deſiderari minime paſſus fuerit, ſine methodi demonſtrativæ notitia, nemini eſſe poſſe ideam dependentiæ veritatum a ſe invicem, nec ſine Artis analyticæ cognitione conſtare poſſe, quænam, etſi nondum definita, ſumi queant illæſa veritate ad alia inveſtiganda, quæ uſum in praxi habent? Enimvero, ſi qua ſunt quæ a cauſa illius mutuæ ac corporis dependentiæ a ſe invicem dependent; tum ea non amplius ſumitur tanquam vera, niſi demonſtratum fuerit, utrum ea realis ſit, an tantummodo apparens; quemadmodum in parte theorica, Aſtronomi non amplius ſumunt Telluris quietem & motum communem, ſed potius motum vertiginis Telluris, cœlique ac ſtellarum quietem. Poteramus alia addere exempla, ex Phyſica generali pariter, ac ſpeciali, niſi unicum ſufficeret, ut intelligatur, quomodo in re præſenti Aſtronomum imitari debeat Philoſophus.

§. 304. Poſtquam in Aſtronomia parte ſphærica Aſtronomi ſumſerunt, cœlum eſſe ſphæram cavam, cujus ſuperficiei ſtellæ omnes ſunt affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem ab oriente in occidentem continuo circumvolvitur; ad hoc phænomenon Geometriam applicarunt, ut alia hinc pendentia determinarent, cum phænomenorum motus primi, ſive communis, cognitionem mathematicam quærerent. Quamobrem qui tertium cognitionis gradum intendit, in capite ſecundo, quod de circulis ſphæræ mundanæ agit, ei inquirendum eſt, quem in finem circulos iſtos in ejus ſuperficie deſcriptos imaginentur. Ipſa natura quaſi circulum deſcripſit, qui viſum oculi undiquaque terminat, & ſphæram mundanam in duo hemiſphæria dividit, Horizon ideo dictus. Circulus hic immotus eſt, dum ſphæra mundana continuo volvitur; adeoque ultra ſphæram mundanam imaginari tenemur aliam immobilem, in cujus ſuperficie peripheria hujus circuli deſcripta. Ipſa adeo natura Aſtronomos deduxit ad diſtinguendos circulos mobiles ab immotis, antequam perpenderent, quales circuli ſuperficiei ſphæræ mundanæ ſint inſcribendi. Videmus hinc cognitionem Naturæ mathematicam, imaginaria admittere, tanquam principia ex quibus deducitur, & fictionibus locum dare: id quod præpoſtere imitari minime

debet Philoſophus; etſi in nonnullis utiliter imitetur, quemadmodum modo vidimus (§. 303). Hinc vero accidit, quod Mathematici, ad res philoſophicas celeri nimis gradu properantes, imaginaria a realibus non diſtinguant; & notiones in Matheſi toleranter veras, tanquam reales, importuno auſu in Philoſophiam inferant; quemadmodum nec alia fuit ratio, quod olim Phyſici mundum ex ſphæris cryſtallinis cavis compoſitum finxerint; donec tandem hypotheſis inſulſa, a TYCHONE DE BRAHE exploſa, nullam amplius hodie inveniat fidem. Utinam huc animum ſerio adverterent, qui, ex Principiis Philoſophiæ naturalis mathematicis & Optica Mathematici ſummi ISAACI NEWTONI, neſcio quam Philoſophiam *Newtonianam* exſculpere volunt; quaſi notiones imaginariæ, quæ ad cognitionem Naturæ mathematicam ſufficiunt, & in ea fœcundæ deprehenduntur, in Philoſophiam primam & naturalem utiliter inveherentur; immo quaſi ex iſtis notionibus imaginariis inferri poſſent, quæ ad Theologiam naturalem, & Coſmologiam generalem ſpectant. Idem enim revera agunt, quod fecere antiqui, qui notionem imaginariam mundi, quæ Aſtronomo in explicando motu communi adeo proficua fuit, tanquam realem in Phyſicam inferre auſi ſunt. In uſum cognitionis mathematicæ multa fingere licet; ſed fictiones iſtæ mathematicæ non ſunt veræ cauſæ, quibus effectus Naturæ intelligibili modo explicantur. Abſit autem, ut quis hinc inferat, quaſi laudibus Mathematicorum detrahere & ſupra Mathematicos Philoſophos extollere velimus! Neque enim nobis jam propoſitum eſt Philoſophos cum Mathematicis committere, nec de Jure præcedentiæ controverſiam movere. Diverſitatem ſaltem notionum imaginariarum & realium inculcamus; ne in detrimentum ſcientiæ confundantur, quæ diverſa ſunt; ſed legitimus utrarumque conſervetur uſus. Nihil decedit laudi Mathematici, etſi non habeatur Philoſophus: quemadmodum nec Philoſophos laude ſua, quam mereatur, fruſtratur quod non ſimul habeatur Mathematicus. Mathematici & Philoſophi in numerum eorum entium referendi, quorum non eſt ad ſe invicem ratio; utut maxime conſultum ſit Philoſophum ſimul eſſe Mathematicum, præſertim ubi in Philoſophia ad tertium cognitionis gradum adſpirat; cum Mathematicus in arte ſua ſummus eſſe poſſit, utut nullam inter Philoſophos laudem mereatur.

§. 305. De ſphæricorum theoria non ante cogitarunt Geometræ, quam cum Aſtronomia ad eandem eos invitaret. Qui ergo ad tertium cognitionis gradum adſpirat, ei ſuademus, ut primo, in uſum ſecundi, totum caput ſecundum perluſtret, & quomodo principia illius theoriæ ad

ſphæ-

ſphæram mundanam applicentur expendat, donec ſingula, quæ hic explicantur & demonſtrantur, habuerit perſpecta; parum ſolicitus, quomodo primi inventores in ea incidere potuerint. Enimvero ubi ſingula ipſi probe cognita atque perſpecta fuerint; jam ſecundis curis idem caput perluſtret; atque jam ſupponat, quaſi nulla adhuc proſtaret ſphæricorum theoria; & inquirat, quomodo ſuppoſito phænomeno, (quod veluti baſis eſt totius Aſtronomiæ ſphæricæ, tanquam fonte rationum de ceteris quæ quæruntur reddendarum, dum in phænomenorum motus communis rationes inquirimus,) in circulos, quæ in ſphæræ ſuperficie concipi debent, aut ſi mavis tanquam ſphæram ſecantia plana conſiderantur, incidamus. Immo non inconſultum erit, ſi ante, quinque priora capita, in uſum ſecundi gradus cognitionis, pertractet, quam quæ in uſum tertii perpendenda ſunt, exquirat; quoniam hoc pacto evidentius ipſi conſtabit, quænam ſint phænomena motus communis in hac Aſtronomiæ parte determinanda; ſicque facilius apparebit, quoniam circulorum apparatu ea fini ſit opus. Dum vero curis ſecundis caput ſecundum percurrit, attentione inprimis opus eſt, ut obſervetur, quomodo theoria imperfecta nos deducat ad obſervationes, quibus perficiatur, ſimulque ad obſervationes, quibus ad praxin aptatur. Ex. gr. Vi phænomeni fundamentalis, ſphæra mundana circa Tellurem continuo circumvolvitur. Enimvero quæritur an puncta illa fixa circa quæ rotatur, & qui poli dicuntur, ſemper ſint iidem; an vero mutentur. Quid ſumi debeat, per obſervationes definiendum. Similiter, cum motus vel æquabilis, vel inæquabilis, eſſe poſſit, & celeritas in diverſis revolutionibus vel eadem, vel diverſa; denuo quid ſumendum ſit per obſervationes definiendum. Equidem per modum hypotheſeos ſumi poteſt, polos ſemper manere eoſdem, motum non modo eſſe æquabilem, ſed eandem quoque eſſe in qualibet rotatione celeritatem. Enimvero, ubi examinanda hypotheſis, ad obſervationes tandem confugiendum. Atque adeo videmus, quomodo theoria imperfecta beneficio obſervationum reddatur perfectior. Similiter, ubi per theoriam agnoſcis Meridianum ſecare hemiſphærium in duas partes æquales, & in eodem altitudines ſtellarum eſſe maximas, ſeu diſtantias a vertice minimas quas habere poſſunt; in uſum praxis ſitus Meridiani determinandus eſt reſpectu tui loci. Nec abſimili modo patet ſitum quoque poli reſpectu loci tui determinandum eſſe. Deducit adeo nos theoria ad obſervationes, quibus eadem ad praxin aptatur. Unde liquet, quomodo ea, quæ per meditationes deteguntur, ulterius quærenda inſinuent, de quibus ante cogitare non poteras. Probe autem notandum

dum eſt, quomodo obſervationes ſine circulo vitioſo, quem Logici vocant, inſtituantur, quando utraque alteram ſupponere videtur, quales ſubinde in Aſtronomia occurrunt. Habemus exemplum, in invenienda linea meridiana, ad determinandum planum meridiani in dato loco §. 120. Etenim ea ſupponit ſtellæ declinationem, vel etiam Solis intra tempus obſervationis non mutari. Supponit obſervatio immutabilitatis declinationis immutabilitatem poli, quæ ex immutabilitate altitudinis maximæ, adeoque in plano meridiani, demonſtratur §. 114. Quod ſi tamen perpendas, quæ §. 110 *& ſeqq.* docentur; videbis, quomodo abſque periculo circuli vitioſi committendi hæc dirimantur. Equidem non negaverim, initio Aſtronomos plurima ſumſiſſe per modum hypotheſeos, quemadmodum idem quoque haud raro fieri debuiſſe ex Theoricis conſtabit; & cum ex iſtis hypotheſibus deducta cum cœlo, deinceps per alias obſervationes, conſentire deprehenderent; aſſumtis demum plenum aſſenſum præbuiſſe: hoc tamen minime obſtat, quo minus Aſtronomiam methodo ſynthetica tradituri oſtendamus, quomodo ſcrupuloſiores in infantia ſtatim Aſtronomiæ certitudini proſpicere potuerint; cum nobis propoſitum ſit eam ita tradere, ut methodum imitari liceat, non modo in Philoſophia naturali, verum etiam in aliis ejus partibus, ubi a poſteriori quædam ſtabilienda, ut alia inde deduci queant.

§. 305. Qui tertium cognitionis gradum intendit, problemata per Trigonometriam ſphæricam ſoluta analytico more expendere debet. Artificium heuriſticum, quo hic utendum, in eo conſiſtit, ut interſectione circulorum ſphæram ſecantium detegatur triangulum, cujus id, quod quæritur, pars aliqua eſt, ſive latus, ſive angulus; ac præterea attendatur, num per obſervationem, principia ſphærica, aut calculos præcedentes dentur tres ejuſdem trianguli partes aliæ. Conſtat enim ex tribus datis per Trigonometriam ſphæricam ſemper inveniri poſſe quartum, quod quæritur. Facillimum exemplum præbet problema quartum §. 198, quo inveniri jubetur puncti cujuſcunque dati Eclipticæ declinatio. Quoniam declinationem metitur arcus circuli maximi, inter æquatorem & punctum datum interceptus, atque ad æquatorem perpendicularis (§. 76 *Aſtron.*), qui circulus declinationis dicitur (§. 78 *Aſtron.*); hinc colligitur, animum advertendum eſſe ad æquatorem, eclipticam & circulum declinationis. Quamobrem in charta deſcribitur circulus, qui ſphæram mundanam repræſentare fingitur; cumque ſitus æquatoris dependeat a polis mundi (§. 48 *Aſtron.*); in eo ſumitur pro arbitrio punctum P, quod polum repræſentet. Jam æquator ſphæram mundanam in duo hemiſphæria dividit (§. 50 Tab. IV. *Fig.* 40.

Aſtron.

Aſtron.), & ſingula ejus puncta a polo mundi quadrantis intervallo diſtant (§. 49 *Aſtron.*). Ex polo igitur P, intervallo quadrantis AP, deſcribitur circino arcus AQ, qui æquatorem repræſentat. Cum polus eclipticæ certo intervallo a polo mundi P diſtet (§. 179 *Aſtron.*), & illa æquatorem ſecet (§. 172 *Aſtron.*); pro arbitrio ſumitur punctum M tanquam polus eclipticæ & ex eo quadrantis intervallo ME deſcribitur arcus EL, qui eclipticam repræſentat, & æquatorem AQ in G ſecat. Cum circulus declinationis tranſeat per polos mundi P & *p* (§. 78 *Aſtron.*) & ex principiis ſphæricis pateat, quod poli ejus ſint in æquatore, punctum vero S in ecliptica pro lubitu ſumi poſſit; deſcribatur denique arcus PSD, qui quadrantem circuli declinationis repræſentat (§. 79 *Aſtron.*). Patet hoc modo interſectione æquatoris, eclipticæ & circuli declinationis obtineri triangulum DGS in ſuperficie ſphæræ mundanæ, cujus crus DS repræſentat declinationem puncti eclipticæ S, quæ quæritur. Inquirendum igitur porro eſt, num in eodem triangulo tria tanquam aliunde cognita deprehendantur. Quoniam itaque punctum eclipticæ S, cujus declinatio quæritur, pro lubitu ſumitur a Tabularum conditore, aut in alio caſu datur; in priori caſu punctum G, in quo ecliptica æquatorem ſecat, ſumi poteſt, vel pro principio arietis, vel pro principio libræ (§. 158, 160 *Aſtron.*), in poſteriori ex dato puncto eclipticæ patet, num punctum G repræſentet principium arietis, an vero principium libræ. Ponamus in præſenti puncti G eſſe principium arietis. Quia punctum eclipticæ S datur, ejus diſtantia a principio arietis ſeu arcus eclipticæ SG datur. Datur præterea angulus obliquitatis eclipticæ per obſervationem (§. 163, 178 *Aſtron.*). Et ex ſphæricis conſtat angulum ad D eſſe rectum (§. 76 *Aſtron.*). Habemus itaque in triangulos DGS tria data, nimirum angulum rectum D in interſectione æquatoris AQ & circuli declinationis PD, angulum obliquitatis eclipticæ G, diſtantiam SG puncti eclipticæ S a puncto æquinoctiali G. Inveniri autem debet latus DS angulo obliquo G oppoſitum: id quod fieri poſſe, per Trigonometriam ſphæricam patet. Videmus adeo, qua analyſi reſolutio problematis de invenienda declinatione puncti cujuſcunque eclipticæ fuerit inveſtigata, & ex hac analyſi facile condi poterat demonſtratio problematis ad morem Veterum Geometrarum, ſiquidem tanto rigore demonſtrandi foret opus. Nimirum qui ad Aſtronomiam accedit, cum in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ, Trigonometriæ utriuſque & ſphæricorum, Opticæ item, Catoptricæ atque Dioptricæ jam ita verſatus ſupponatur, ut, quæ in iſtis Ma-

theſeos partibus traduntur, familiaria experiatur, in Methodo demonſtrandi jam ſatis exercitatus eſt, ut non minutiſſima quæque ipſi enucleari ſit opus. Non tamen inconſultum eſt, ut, qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat, eodem rite extra eandem uſurus, analyſi quam hic commendamus ſedulo incumbat, ac ſyntheticas demonſtrationes hinc eruat.

§. 306. Qui in ſeipſis experiuntur ſe, absque iſta analyſi quam hic urgemus, ſine mora ſchemata delineare, & triangulorum reſolutiones invenire poſſe, ac absque demonſtratione hinc derivata, veritatem ſolutionis problematum propoſitæ perſpicere; tantum apparatum condemnabunt, ac tempus inanibus ſpeculationibus falli exiſtimabunt, quod longe utilius in aliis addiſcendis collocari queat. Immo non deerunt, qui, cum inter Aſtronomos merito ſuo emineant, analyſin iſtam ac derivatas inde ſyntheticas demonſtrationes inter ſuperflua referent; forſan tanquam puerilia prorſus ridebunt. Quamobrem apprime neceſſarium videtur, ut quædam ad avertendum præjudicium philoſophaturo admodum nocuum annotemus. Nemo in dubium vocare poteſt, omnibus iſtis notionibus quæ analyſin noſtram ingrediuntur, animum ejus imbutum eſſe debere, qui proprio marte ſolutionem problematis de inveſtiganda declinatione ſingulorum graduum, aut puncti cujuslibet eclipticæ invenire, aut veritatis ejuſdem, ubi ab alio inventa ſupponitur, plene convinci debet. Pone enim quamcunque illarum eſſe tibi incognitam; extemplo conſtabit, tibi de veritate ſolutionis dubium aliquod adhuc ſupereſſe; conſequenter abeſſe convictionem, quæ omnem dubitationem excludit. Notiones igitur iſtæ omnes influunt in determinationem aſſenſus, quem præbes ſolutioni tanquam veræ. Quamobrem ſi diſtincte exponendum, quomodo generetur aſſenſus, & qui fieri potuerit, ut a priori in ſolutionem problematis inciderit primus inventor; nulla illarum notionum prætermittenda; ſit ita quod inventor, vel qui ſolutionem jam inventam addiſcit, in confuſis notionibus acquieſcat, nec quæ ideæ a qua pendet convictio inſunt, ſingula a ſe invicem actu mentis diſcernat. Sane cum Philoſophi ſit rationem reddere iſtius aſſenſus ac modi, quo ad ſolutionem problematis inventor pervenire potuerit; nemo niſi cognitionis philoſophicæ contemtor reprehendet, quod quæ actibus animæ inſunt diſtincte explicet, utut utilitatem non pervideat. Hanc vero eſſe maximam, ſi quis animum ad philoſophandum appellit, haud difficulter oſtenditur. In Aſtronomia, ſchemata, notiones, quas antea tibi comparaviſti, imaginationi præſentes ſiſtunt; ut confuſa quædam idea animum attendenti ſufficiat ad veritatem

proti-

protinus perſpiciendam. Enimvero in Philoſophia, præſertim in Metaphyſicis ac Moralibus, iſtiuſmodi ſubſidio deſtituimur, quo imaginatio apta efficitur ad vicarias intellectus operas præſtandas; nec confuſis ejus ideis tuto fidere licet, ſiquidem errandi periculum ſubire nolueris. Ipſe igitur intellectus agere debet, quod ſuum eſt; adeoque non admittendæ ſunt niſi notiones diſtinctæ, nec in exacta earundem evolutione unquam nimii ſumus; ſiquidem eam deſideraverimus evidentiam, quæ in Matheſi datur. Quamobrem ut evolutioni huic adſueſcamus, conſultum omnino eſt analyſin problematum primi mobilis inſtituere, quemadmodum præcepimus: id quod in Aſtronomia multo facilius ſuccedit, quam in Philoſophia; quia intellectus dirigitur ab ipſa imaginatione, modo ad imaginem, quæ ob oculos verſatur, animum attendas; cum, in Philoſophia, imaginatio ac ſenſus ſuppetias ferre nequeant, ſed intellectui magis obſtaculo ſint, ne ſuo munere dextre fungatur. Non ſuadeo niſi experta & quorum veritatem in ſeipſo experiri poterit, qui voluerit. Quicquid igitur videatur aliis, qui Aſtronomiæ totos ſeſe dederunt, nec Philoſophiæ excolendæ operam impendendi otio fruuntur; ego iſtam Analyſin admodum proficuam judico omnibus, quotquot ad hanc excolendam animum appellere decreverunt. Neque enim exiſtimandum eſt levi opera conſequi te poſſe, ut methodo demonſtrativa in philoſophando rite utaris. Plurima enim ſunt, ad quæ per exempla felicius, quam per præcepta patet aditus: exempla vero tutiſſima offert Matheſis, ſi accurata demonſtrationum analyſis curæ cordique fuerit. Nos, quibus methodi intimius cognoſcendæ cupido ſtudium Matheſeos commendavit a prima ætate, Matheſin quoque hoc nomine maximi facimus. Non jam commemorare lubet, quod diſtincta uſus facultatum animæ explicatio augeat ſcientiam philoſophicam, & quod eum cognoſcere teneatur Philoſophus, ſi in Philoſophia morali tradere velit, quæ ſatis faciunt: hic enim, ubi intellectus perficiendi nonniſi ratio habetur, ad methodum tantummodo digitum intendimus.

§. 307. Non lubet ad particularia deſcendere, quæ utiliter moneri poterant: neque enim conſultum eſt, ut prima ſtatim vice minutiſſime perſequatur ſingula, qui intellectus perficiendi gratia ad ſtudium aſtronomicum accedit. Quodſi enim hiſce tantummodo obſervatis, quæ docuimus, ad ſtudium pſychologicum & ontologicum acceſſerit; in Ontologia & Pſychologia probe verſatus, proprio, quod acquiſivit, acumine deteget, quæ adhuc annotari poterant. Merentur autem attentionem, quæ de refractione, parallaxi, & crepuſculis dicuntur; eo etiam fine, ut intel-

intelligatur, quam neceſſarium ſit experientiæ & rationis connubium, ne per theoriam fieri poſſe videantur, quæ tamen in praxi minime ſuccedunt. Nimirum qui experientiam negligit, ſubinde fieri poſſe ſumit, quæ ob circumſtantias a priori non definiendas haud quaquam fieri poſſunt. Unde contingit nos incidere in reſolutiones problematum, quibus ſatisfieri nequit. Obſervanda hæc ſunt Philoſopho, non minus in Philoſophia morali, quam civili; ne ſibi jam conſecutus videatur, quæ adhuc in quærendorum numero ſunt; & a veritate inquirenda deſiſtat, quam detegere in poteſtate ipſius erat, modo præjudicio iſto non habuiſſet mentem præpeditam.

§. 308. Pars theorica Aſtronomiæ ad perficiendum intellectum, ut eodem extra Matheſin utaris, plurimum confert; modo omnem afferas attentionem ad methodum, tantopere a nobis commendatam, & tam ſollicite inculcatam. Capite primo & ſecundo, in quibus de natura Solis ac Lunæ, ceterorumque planetarum, tam ſuperiorum, quam inferiorum, eorumque ſatellitum agitur; docentur, quæ ad Phyſicam magis, quam Aſtronomiam ſpectant, etſi Aſtronomus jure ſuo ſibi ea arroget, quæ obſervationibus ſuis debentur. Quamobrem hinc diſcere licet, quomodo utiliter in Philoſophia naturali, ſeu Phyſica, ſit verſandum; nimirum quomodo quærendæ ſint obſervationes tam communes, quæ ſua veluti ſponte ſeſe offerunt, quam ſtudio quæſitæ; ac inde a poſteriori colligantur propoſitiones, quas a priori detegere non dabatur, principiis ad ratiocinandum neceſſariis deficientibus. Nos in Phyſica dogmatica, quam idiomate patrio evulgavimus, eandem viam ingreſſi ſumus. Etſi autem facilis videatur hæc methodus; non tamen adeo facilem deprehendet, quantum putat, qui eadem rite uti voluerit. Nimirum acumine nonniſi multa exercitatione acquiſito opus eſt, ne obſervationibus inſerantur, niſi quæ ſenſui patent; ut eædem ab omni prorſus vitio ſubreptionis, quod in Logica vocamus, ſint liberæ: qua in re multum peccatur a Medicis, utut virorum experientiſſimorum titulum, quaſi ſibi proprium, dudum conſecutis. Neque facilius eſt facta, quæ obſervantur, notione diſtincta comprehendere, & verbis aptis ſingula in eadem contenta enunciare, ut certi quid inde concludi poſſit. Artis præterea eſt, nec plus, nec minus inde colligere, quam certo ratiocinio inferri poteſt. Qui his accurate ſatisfacere voluerit, etſi in demonſtrando nihil difficultatis deprehendat, nondum tamen ex voto omnia ſibi ſuccedere experietur. Quamobrem ad obſervationes, quas commemoramus, animum probe attendat; ut idea exemplaris eas rite deſcribendi animo inſinuetur; nec minorem attentionem afferat ad corollaria

laria, in quibus propoſitiones ex iiſdem eliciuntur; ut modum ſtabiliendi per obſervationes principia, ſeu ex iis eruendi propoſitiones, comprehendat. Utilitatem non modo in Phyſica, verum etiam in ipſa Philoſophia morali & civili experietur. Inprimis etiam eandem animadvertet, qui Medicinam ad majorem certitudinem perducere voluerit. Sed memini me de hiſce jam plura dixiſſe, in Horis ſubſecivis, cum de Medico Aſtronomum imitante verba facerem. Non inanem operam ſumet, qui ea, quæ in Logica de experientia præcipiuntur, cum obſervationibus ac inde deductis propoſitionibus confert: ita enim facilius intelliget regulas methodi, quas proprio marte abſtrahere non poterat. Immo praxin Logicæ, quoad hanc partem, hoc pacto ſibi comparabit. Qui novit, quantam utilitatem nobis afferat cognitio a poſteriori acquiſita; eum nunquam pœnitebit ſtudii, quod in methodo hac intimius perſpicienda collocaverit.

§. 309. Theoricam tradidimus juxta hypotheſin COPERNICI, atque KEPPLERI; nimirum ſuppoſito Terræ motu, & orbitis Planetarum ellipticis; in quibus Planetæ ea lege incedunt, quemadmodum ſagacitate ſua primus detexit KEPPLERUS; propterea quod ſic prodit theoria cum cœlo omnium maxime conſentiens. Etſi autem methodum *Kepplerianam* expoſuerimus computandi loca Planetarum; non tamen neglеximus, quæ recentiorum induſtria, poſtquam Geometria & Aſtronomia magis exculta fuit, ad ejus perfectionem ulteriorem acceſſerunt. Quodſi tamen quis tertium cognitionis gradum intendit, ei ſuademus, ut, probe intellectis iis, quæ de motu Planetarum elliptico traduntur, Aſtronomiam quoque veterem perluſtret, qualem tradidit PTOLEMÆUS, juxta Epitomen a REGIOMONTANO factam, & in ſubſidium vocato RICCIOLI *Almageſto*, in quo exponuntur, quæ ad eam magis excolendam poſt eum acceſſerunt. Hinc enim omnium optime addiſcet, quomodo Philoſophia naturalis per hypotheſes ſit excolenda, ubi ad veritatem liquidam pertingere non licet; & eundem morem imitabitur in Medicina ad certitudinem ſucceſſive evehendam; immo in reliqua etiam Philoſophia, præſertim practica, ac ipſa praxi vitæ humanæ. Equidem non ignoro eſſe hodie nonnullos, qui omnem hypotheſium uſum in Philoſophia naturali & Medicina damnant; ſed hi, propter abuſum, ipſum etiam uſum rejiciunt: id quod ſine ſcientiæ incremento haud quaquam facere licet. Diximus nonnulla huc ſpectantia in Diſcurſu præliminari de Philoſophia, quem Logicæ præmiſimus, methodum philoſophicam explicantes. Laudant quidam NEWTONUM, quod ex Philoſophia naturali eliminaverit hypotheſes; qui tamen hypotheſibus indulget in iis ipſis, in quibus eum ab iiſdem abſtinuiſſe exiſtimant. Quid enim at-

tractio, ſeu gravitas univerſalis quæ per modum attractionis repræſentatur, aliud eſt quam hypotheſis, quæ in gratiam quorundam phænomenorum ſumitur, & ad omnem deinde materiam extenditur? Immo nonne explicatio ſyſtematis mundani, quæ præcipua pars eſt Principiorum Philoſophiæ naturalis mathematicorum, per motum projectionis, & gravitationem in Solem, aut centrum Planetæ primarii, hypotheſis philoſophica eſt; quam HEVELIUS in *Cometographia*, ad imitationem motus projectorum a GALILÆO detecti, imaginatus eſt, & quæ in Matheſi utiliter ſurrogatur in locum hypotheſeos naturæ; phænomenorum autem cauſas phyſicas non attingit, quas ſcrutari debet Phyſicus? Facile quidem largior hoc non videre eum, qui ſoli Matheſi aſſiduam operam navavit, ac ideo notionibus imaginariis animum imbutum poſſidet: extemplo tamen videt, qui cum Matheſeos ſtudio Philoſophiæ, præſertim Metaphyſicæ, ſtudium conjunxit. Sed mittamus hæc, & per nos ſuo quiſque abundet ſenſu. Videamus potius, quomodo in cognoſcenda methodo, per hypotheſes cognitionem humanam promovendi, ſit progrediendum. Quemadmodum in anterioribus obſervavimus, omnem cognitionem humanam initium capere ab obſervationibus communibus; ita ſimiliter de parte Aſtronomiæ theorica idem dicendum. Ex obſervationibus communibus innotuit motus proprius Solis (§. 27 *Aſtron.*): quo ſcilicet indies, ab occaſu verſus ortum, certo intervallo promovetur (§. 30 *Aſtron.*): non tamen tanquam verus; cum applicata Matheſi ad obſervationem conſtet (§. 571 *Aſtron.*), motum Solis eodem modo e Tellure ſpectari, ſive ipſe circa Terram intra orbitam quieſcentem revera moveatur, ſive Terra circa Solem quieſcentem feratur. Quando itaque Aſtronomus ſumebat Terram quieſcere, & Solem motu annuo circa eandem ab occaſu in ortum moveri; quod ſumebat, hypotheſis erat, quæ, admiſſo motu vertiginis Telluris, hypotheſi naturæ æquipollet; ſi quod autem ſumitur a veritate alienum, admiſſo motu communi tanquam vero, hypotheſis nonniſi imaginaria eſt, cui adeo in Matheſi quidem locus conceditur, minime autem in Phyſica. Finge jam Aſtronomum noluiſſe uti hypotheſi: nemo Aſtronomiæ gnarus diffitebitur, eum ſtatim in limine nobiliſſimam hanc ſcientiam deſerere debuiſſe, nulla ſpe ad veritatem liquidam perveniendi relicta, abſque conjecturis hypotheſi innixis. Immo ſi quis, poſito motu communi tanquam vero, hypotheſin imaginariam de motu Solis communi, in Philoſophiam naturalem, tanquam veritatem, inferre voluiſſet; ecquis ſanus Philoſophus hoc approbare potuiſſet, propterea quod ea ſatisfacit Aſtronomo ad cognitionem mathematicam motus proprii Solis acquirendam? Ex obſervationibus itidem communibus, ſed majore attentione factis, conſtabat, Solem ab eodem puncto digreſſum ad idem redire.

Hinc

Hinc pronum erat inferre, quod Sol motu proprio feratur per lineam in ſe redeuntem, intra cujus ambitum collocata Terra. Enimvero cum infinitæ ſint lineæ in ſe redeuntes, quemadmodum ex Geometria conſtat; quæſtio incidebat, quænam linearum in ſe redeuntium ſit orbita Solis. Ex Geometria elementari notum erat, in harum numero eſſe circulum, cujus proprietates & ſymptomata ſunt magis obvia quam ceterarum. Sumebant igitur Aſtronomi, per modum hypotheſeos, orbitam Solis eſſe circularem. Quodſi hypotheſi uti noluiſſent, non ſumendum eſſe contendentes, niſi quod ſit demonſtratum; impoſſibile fuiſſet, ut theoriam motus Solis cœlo conſentientem detegerent, & Aſtronomia adhuc deſerta & inculta jaceret. Enimvero, quemadmodum in veritate inveſtiganda accidit, ut, ſi uni quæſtioni ſatisfacias, quantum datur, nimirum vel veritatem detegendo, vel conjecturæ locum faciendo, enaſcantur aliæ; ita etiam in caſu præſenti jam quærebatur, in quonam puncto, intra ambitum circuli ſito, poſita ſit Terra. Ex Geometria elementari tyronibus notum eſt, circulum AHPI habere centrum C, a quo ſingula puncta peripheria AHPI æqualiter diſtant. Quæſtio igitur huc redibat, num Terra ſit in centro orbitæ C, an vero extra centrum veluti in T. Eam dirimere non licebat, niſi denuo interea alterutro aſſumto tanquam vero, conſequenter confugiendo ad hypotheſin. Nullum adeo eſt dubium, quin primus inventor ſumſerit, veritatis inveſtigandæ gratia, Terram eſſe in centro C. Inquirendum ergo erat, quomodo loca Solis definiantur ad datum tempus, in hac hypotheſi, ut locus Solis computatus cum eo, qui per obſervationem eruitur (§. 203 *Aſtron.*), conferri, ſicque hypotheſis ad examen referri poſſet. Hoc ubi inveſtigare volebat Aſtronomus, cum per principia Geometriæ elementaris ipſi perſpectum eſſet, ſi arcus AD & DE ſint æquales, angulos ACD & DCE eſſe æquales (§. 141 *Geom.*); nova incidebat quæſtio, utrum Sol motu æquabili incedat in orbita ſua, ut arcus AD & DE æquali tempore percurrantur, an vero inæquabili, ut iidem arcus abſolvantur tempore inæquali. Nemo non videt, hic denuo confugiendum fuiſſe ad hypotheſin; alterutrum horum aſſumendo tanquam verum; donec examen hypotheſeos, per obſervationes decretorias, proderet quod certum eſt. Cum motus æquabilis ſit uniformis, & intellectu facilior inæquabili; legibus artis conjectandi, quibus in aſſumendis hypotheſibus locus eſt, conveniens erat ſupponere, quod ſit æquabilis. Unde enaſcebatur hypotheſis Solis concentrica, qua Sol ſupponitur motu æquabili incedere in orbita ſua ſecundum ſignorum ſucceſſionem, Terra in centro ejus collocata. Atque hoc pacto hypotheſis ſufficienter determinata erat ad calculum geometricum inſtituendum; ut adeo non alia re opus eſſet, quam ratio-

Tab. IV. *Fig.* 41.

Tab. IV. *Fig.* 42.

ratiocinando hinc colligere, quæ ad eum ſpectant. Si Sol motu æquabili percurrit orbitam; arcus, quos percurrit AF & FG, conſequenter etiam anguli ACF & FCG, ſunt tempori proportionales. Quamobrem, ut dato tempori reſpondens angulus ACF, ſeu arcus AF, computari poſſit, notum eſſe debet, quo tempore Sol integram orbitam percurrat: quod cum ſit facti, aliter innoteſcere non poterat, niſi per obſervationem. Obſervari nimirum debebat, tempore quodam, locus Solis in dato aliquo puncto A; ac porro obſervandum, quo tempore ad idem redeat punctum. Etſi autem initio indifferens videretur, quodcunque punctum eligatur; ubi tamen ad obſervationem accedebat Aſtronomus, non commode obſervari poſſe tempus advertit, quo Sol ad idem punctum promiſcue aſſumtum redit. Quoniam itaque planum æquatoris determinari poteſt independenter a theoria Solis (§. 149 *Aſtron.*); commodiſſima videbatur huic inſtituto obſervatio appulſus Solis ad æquatorem; modo conſtaret, æquatorem conſtanter ſecare orbitam Solis in eodem puncto, ſeu, aſtronomice loquendo, puncta æquinoctialia eſſe fixa. Sumebatur hoc primum denuo per modum hypotheſeos, & inquirebatur in modum obſervandi tempus, quo centrum Solis ad æquatorem appellit. Et ſic incidebatur in armillas æquatoreales, quibus Veteres obſervaſſe æquinoctia novimus. Quoniam ſic, etſi adhuc ruditer conſtare poterat quantitas anni ſolaris, ſi momentum æquinoctii vernalis ſumebatur pro epocha; per regulam trium computari poterat locus Solis ad datum quemvis diem in hypotheſi concentrica, quemadmodum docuimus (§. 672, 673 *Aſtron.*). Quodſi jam loca computata conferebantur cum obſervatis (§. 203 *Aſtron.*); illa cum his minime conſentire deprehendebantur; adeoque hypotheſin concentricam a veritate alienam eſſe palam erat. Quoniam igitur Terra intra ambitum orbitæ Solis conſtituitur, centrum illius extra centrum hujus ſitum eſſe debet in hypotheſi circulari. Atque adeo in locum concentrici circuli ſumebatur, per modum hypotheſeos, circulus eccentricus, retento motu æquabili. Ponamus jam in C eſſe centrum orbitæ, in T centrum Telluris, in H punctum æquinoctiale unum, in I alterum. Repræſentabit ſchema hypotheſin Solis circularem eccentricam. Inquirendum adeo erat, quænam ex ea conſequantur, ut denuo quæ inde colliguntur cum obſervationibus, quibus inde deducta occaſionem præbent, conferri poſſint. Quia nos Solem ex puncto T intuemur; ſtatim apparebat, diſtantiam ejus continuo variari, cum TS ſit major ipſa TL, eamque in A eſſe maximam, in P minimam (§. 303 *Geom.*). Atque ſic naſcebatur notio Apogæi A (§. 636 *Aſtron.*) & Pærigæi P (§. 635 *Aſtron.*), atque eccentricitatis Solis TC (§. 639 *Aſtron.*

Tab. IV. *Fig.* 43.

Tab. V. *Fig.* 44.

Aſtron.). Enimvero jam incidebat quæſtio, utrum æquinoctium vernale, ſeu principium arietis ſupponendum ſit in H, an vero in I; item in quæ orbitæ ſolaris puncto, ſi ad eclipticam referatur, hæreat Apogæum A, in quonam Perigæum P, & quanta ſit eccentricitas TC. Nemo non videt confugiendum hic eſſe ad obſervationes, quales autem eædem eſſe debeant, ut ſint deciſivæ, ex hypotheſi deducendum. Quodſi Sol ſit in S; patet diſtantiam ab Apogæo in centro orbitæ C videri ſub angulo ACS; ex Tellure autem in T ſub angulo ATS: quod cum ita ſeſe habeat per integrum ſemicirculum HAI; diſtantia Solis ab Apogæo ſemper minor videtur, quam revera eſt in eo ſemicirculo, in quo hæret Apogæum Solis A. Ex adverſo ſi Sol ſit in L, ex centro orbitæ diſtantia a Perigæo PL videtur ſub angulo PCL, ex Tellure in T autem ſub angulo PTL, adeoque in ſemicirculo IPH continuo apparet major, quam revera eſt, (§. 239 *Geom.*

Tab. IV. Fig. 45. *&* §. 209 *Optic.*). Conſideremus porro Solem in punctis æquinoctialibus H & I. Quodſi ſpectetur ex centro orbitæ C, diſtantiæ ab Apogæo A, nempe AI & AH, videntur ſub angulis rectis ACI & ACH, ut adeo Sol videatur abſolviſſe ſemicirculum, ab uno æquinoctio uſque ad alterum, dum revera ſemicirculum HAI percurrit, in quo Apogæum A hæret: enimvero ex Terra ſpectantur diſtantiæ AI & AH ab Apogæo A, ſub angulis ATI & ATH, qui ſunt rectis minores (§. 239 *Geom.*); conſequenter HAI minor ſemicirculo apparet (§. 209 *Optic.*), adeoque Sol minus temporis ſpatium conſumere videtur in ſemicirculo HAI, in quo eſt Apogæum A, quam in altero IPH, in quo hæret Perigæum P. Jam cum porro Tab. IV.
in ſemicirculo HAI diſtantiæ Solis a Fig. 44.
centro Terræ T ſint majores diſtantiis a centro orbitæ, veluti TS major CS, & in Apogæo A diſtantia TA ſit maxima (§. 303 *Geom.*), in ſemicirculo autem IPH diſtantiæ Solis a Terra ſint minores diſtantiis a centro orbitæ, veluti TL minor CL, & in Perigæo P diſtantia TP ſit omnium minima (§. *cit. Geom.*); Sol ipſe major videri debet in ſemicirculo IPH, in quo eſt Perigæum, quam in ſemicirculo HAI, in quo eſt Apogæum A. Quodſi jam meditationem cœptam eodem, quo hactenus, modo continuare velimus; obſervationes determinare licebit, quales eſſe debeant, quæ deſiderantur. Sed ne juſto prolixiores ſimus, filum abrumpendum eſt, contentis monſtraſſe viam, qua ſit eundum, quantum ad præſens inſtitutum ſufficit. Annotabimus potius alia nonnulla, quæ uſui eſſe poſſunt illis, qui Matheſeos ſtudio intellectum perficere geſtiunt, ut eodem rite extra eandem utantur.

§. 310. Ex iis, quæ diximus, clariſſime perſpicitur, quomodo in inveſtigandis veritatibus a poſteriori ſit procedendum, & quam indiſpenſabilis uſus ſit hypotheſium, ut, ſi iiſdem

uti nolueris, nulla ſuperſit ſpes veritatis unquam detegendæ. Non eſt quod excipias hypotheſibus equidem locum eſſe concedendum in inveniendo, ab iis tamen eſſe abſtinendum in libris, qui publici juris fiunt. Etenim ubi veritates ab iis, quæ nobis perſpecta ſunt, principiis procul remotæ ſunt, ut a priori denegatur ad eas acceſſus; non ſemper unius hominis eſt ea abſolvere, quæ a poſteriori acceſſibilem faciunt: quin potius haud raro ſociæ requiruntur operæ, cum hic valeat illud pervulgatum, oculos plures plus videre quam oculum unum; & ſubinde qui acceſſum parare ſtudet, laborem cœptum aliis continuandum relinquere tenetur. Qui animum ad ea attendit, quæ de theoria Solis inveſtigata modo annotavimus, dictis facilem præbebit aurem; etſi rationes non perſpiciat, quas dare poteramus, ſi prolixiores eſſe liceret. Quamvis igitur, examine inſtituto, hypotheſes deprehendantur a veritate alienæ; non tamen ideo cenſendæ ſunt inutiles; propterea quod aberrando a veritate deducimur ad veritatem, ubi methodo conjecturali opus eſt. Unde memini me ſæpius auditoribus meis inculcaſſe, deberi etiam a veritate aberrantibus ſuas laudes, ubi nobis errandum fuiſſet, niſi ipſi priores erraſſent. In aliorum enim meritis cenſendis æqui eſſe debemus, ne quid admittamus, quod contra officium boni viri eſt. Nemo Aſtronomus vitio vertet ei, qui primus de theoria Solis cogitavit, ſi hypotheſin motus æquabilis in orbita concentrica excoluerit, utut ſucceſſores eam a veritate alienam examine per obſervationes inſtituto deprehenderint. Videt enim eum feciſſe, quod initio faciendum erat, & aliis perficiendum reliquiſſe, quod ipſi perficere vel non licebat, vel quod perficere nolebat. Quodſi Phyſici Aſtronomos imitati fuiſſent, ex obſervationibus communibus eliciendo hypotheſes, & has, per obſervationes ſtudio quæſitas & experimenta, examinatas corrigendo ac perficiendo, nullus profecto dubito, quin Philoſophia naturalis dudum magis promota fuiſſet. Idem dicendum de Medicina, de qua jam diſertius dixi in Horis ſubſecivis, cum Medicum Aſtronomos imitantem in ſcenam producerem.

§. 311. Diſcimus etiam, quales eſſe debeant hypotheſes, quibus in Philoſophia concedendus eſt locus; nimirum quas methodus conjecturalis ſuggerit, qua in veritate inveſtiganda utendum. Sumitur nimirum in gratiam nonnullorum phænomenorum, unde ratio eorum reddi poteſt; ac deinde inquiritur, num ceterorum quoque per id, quod ſumitur, ratio reddi poſſit; quatenus ea, quæ ex hypotheſi a priori colliguntur, conferuntur cum iis, quæ obſervantur. Perinde enim eſt, ſive antea obſervaris phænomena, & poſtea demum inquiras, num eadem a priori ex hypotheſi deducantur; ſive primum a priori deducas

ducas ex hypotheſi, quæ inde neceſſario conſequuntur, & poſtea demum obſerves, num eadem quoque in rerum natura ita ſeſe habeant. Patet autem certum eſſe debere, quod id, quod ſumitur, in ſe ſpectatum poſſibile ſit. Ita ſumebatur in Aſtronomia, orbitam Solis eſſe circulum. Certum nimirum erat, eam eſſe lineam in ſe redeuntem. Quamobrem cum circulus ſit linea in ſe rediens, in ſe ſpectatum non impoſſibile eſt, ut orbita Solis ſit circulus. Non igitur probamus commentitias hypotheſes, quas hodie bene multi in Philoſophiam naturalem invehunt, quidvis pro lubitu fingentes, utut demonſtrare minime poſſint talia, quæ ſibi imaginantur, in rerum natura exiſtere poſſe. Immo facile largimur, iſtiuſmodi commenta non eſſe qualitatibus occultis ſcholaſticorum meliora. Quamobrem in Phyſica, quam patrio ſermone edidimus, maluimus phænomena ex phænomenis explicare, nec in hypotheſibus admittere niſi quæ ex obſervationibus colliguntur; ne incerta cum certis confundantur, & in inventorum numerum referantur, quæ ſunt in quæſtionum numero. Omnium minime autem probamus, ſi ex commentitiis hypotheſibus rationes reddantur in Medicina; quippe quæ non modo uſum nullum in praxi habent, verum etiam nocent, ſi in praxi earum rationem habere volueris. Et huc dubio procul animum adverterunt, qui Philoſophiam naturalem & Medicinam ab hypotheſibus liberam eſſe voluerunt; atque inter theoriam phyſicam & medicam in arte ſalutari diſtinxerunt. Propter abuſum tamen hypotheſium, non tollendus erat uſus; ſed hypotheſes ad inveniendum veritatem aptæ diſcernendæ a figmentis, quæ in eorum locum ſurrogantur.

§. 312. Liquet porro ex iis, quæ de theoria Solis analytice perveſtiganda diximus, in veritate a poſteriori inveſtiganda perpetuum eſſe debere experientiæ ac rationis connubium. Neque enim ex obſervationibus communibus, quæ primo loco aſſumuntur, quicquam concluditur, niſi in ſubſidium vocatis principiis geometricis. Immo ipſæ hypotheſes inde non derivantur ratiocinando, niſi vi illorum principiorum. Et ubi ex hypotheſi a priori deducenda quæ ex ea neceſſario conſequuntur, & ſine quibus eadem examini ſubjici nequit, principiis mathematicis denuo opus habemus, neque abſque horum ope obſervationes in hunc uſum capiendæ determinari poſſunt. Quamobrem ſi Aſtronomos in Philoſophia naturali, & eidem agnata Medicina, imitari velimus; cogitandum erat de theoria demonſtrativa. Ontologia, qualem dedimus, ſuppeditat notiones directrices, de quibus plura diximus in Horis ſubſecivis. Et hiſce inprimis locus eſt, ubi analyticam viam ingreſſuri colligere debemus, quid ſit faciendum; quamvis etiam principia ontologica conducant ad concluſiones ex obſervationi-

vationibus & experimentis eliciendas. Subinde etiam uſui ſunt principia mathematica, de quorum ad experimenta applicatione nonnulla diximus in ſuperioribus capitibus quinto, ſexto, & ſeptimo, cum de ſtudio Mechanicæ, Hydroſtaticæ, Aërometriæ, Hydraulicæ, & Opticæ ageremus. Ex obſervationibus quoque atque experimentis eliciendæ ſunt propoſitiones determinatæ, eo modo quem in Logica capite 2, ſect. 2, part. 2, expoſuimus, cum methodum formandi judicia intuitiva & notiones a poſteriori traderemus; atque ex hiſce principiis demonſtranda ſunt alia, quæ a priori inde deducuntur. Hoc enim pacto condenda forent Elementa Philoſophiæ naturalis, eundem uſum promittentia, quem habent elementa Euclidis in Matheſi. Quamdiu enim deſiderantur principia certa, quibus in ratiocinando utaris, luxurianti imaginationi omnia tribuuntur, atque adeo non mirum, ſi abortus imaginationis pro veritate in Philoſophia & theoria medica obtruduntur. Neque mirum videri debet, quod de eodem ſubjecto meditati incidant in cogitationes toto cœlo diverſas; ita ut unus per principia chymica explicare velit, quod alter explicat per mechanica, alius per figmenta, ad imitationem cauſarum ſibi notarum, quæ effectum ei ſimilem producunt, cujus cauſa vel ratio quæritur. Abſtinemus ab exemplis, ne ſint odioſa. Cenſere alios videri nolumus, dum docere nobis propoſitum eſt. Quodſi Deus nobis vitam animi, ac corporis vires conſervaverit, ut ad Phyſicam, Philoſophia practica abſoluta, progredi licuerit; operam dabimus, ut iſtiuſmodi principia ſtabiliamus; ne facultatibus inferioribus tribuatur, quod ab intellectu expectandum. Eorum autem neceſſitatem in dubium revocare nequit, qui facultates cognoſcendi earumque uſum perſpexit. Immo ſi diſtinctam ratiocinii notionem ex Logica hauſit, eam agnoſcere tenetur. Obſervatio enim, & experimentum, non ſuppeditat niſi propoſitionem unam, quæ in ſyllogiſmo minoris vicem tuetur. Quodſi ergo hinc inferenda concluſio, principio opus eſt, quod majoris locum occupat. Cumque non ſemper unico ſyllogiſmo inferatur concluſio, pluribus quoque principiis opus. Quæ enim ratio eſt, cur multi multa cumulaverint experimenta, multas collegerint obſervationes rariores; nihil tamen inde intulerint, quod ad alia ratiocinando detegenda prodeſſet, ut phænomena nondum obſervata prævidere ac prædicere liceret? Sane non alia, quam quod deficiant principia, quorum ad experimenta & obſervationes applicatione inferantur concluſiones. Obſervationes communes, quæ baſis ſunt omnis cognitionis aſtronomicæ, in vulgus notæ. Cur vero Aſtronomus hinc colligat, quæ alii inde colligere nequeunt, non alia ratio eſt, quam quod ille principia Geometriæ, quæ ipſi perſpecta ſunt, ad

ad illas applicet, his vero nulla ſint principia, quæ ad eaſdem applicare poſſint. ROBERTUS BOYLE multa dedit de qualitatibus ſenſibilibus experimenta: quid vero hinc colligit? Nil niſi generalem hanc propoſitionem, quæ in Coſmologia ex principiis metaphyſicis demonſtratur, omnia in natura fieri mechanice. Provocare poteram ad Chymiam, cujus theoria fœcunda, ad inveniendum apta, adhuc deſideratur; & uſus in Scientia naturali prædicatur, ſed non oſtenditur: ſed in re per anteriora ſatis manifeſta prolixiores eſſe nolumus.

§. 313. Aſtronomia quoque nos docet, conjunctis viribus ſcientiam eſſe excolendam, & inventa anteceſſorum eſſe emendanda, perficienda, confirmanda, prout occaſio tulerit; conſequenter quæ ab aliis tradita ſunt ante addiſcenda, quam ad ſcientiam amplificandam animum appellas. Quantum hic peccetur ab aliis, qui Aſtronomorum non ſequuntur morem, in vulgus proh dolor! notum eſt. In inventorum numero eſſe volunt, qui diſcentium ſubſellia occupare debebant. Quæ ab aliis tradita ſunt contemnunt, antequam ea didicerunt. Sibi ſoli ſapere videntur, qui ex aliena doctrina ſapere debebant: Sibi ſoli ſufficere videntur, qui alieno auxilio maxime indigent. Quo quis indoctior, eo in cenſendis aliis audacior. Vana virium fiducia ſumma audent, quæ nullo negotio a ſe confici poſſe putant, cum vulgaribus capiendis eædem vix ac ne vix quidem ſufficiant. Non amore veritatis ducuntur, ſed vanæ ambitioni litantes, vulgo imperito ut placeant unice ſtudent. Argumentis extrinſecis pugnant, qui rationes intrinſecas ut perſpicerent, operam dare debebant. Quodſi Aſtronomi iiſdem moribus fuiſſent præditi, nihil adhuc præclari de motu ſiderum ſciretur, nec phænomena cœleſtia tanta certitudine prædicere daretur, quemadmodum hodie ab Aſtronomis fieri ſolet. Quantum, quæſo, promota fuit ſcientia aſtronomica altercationibus iſtis de motu Telluris? Quantum vero incrementi debet hypotheſi Terræ motæ legitime excultæ? Utinam igitur omnes Aſtronomiæ operam navarent, eamque analytice expenderent, quemadmodum paulo ante inculcavimus, quotquot ad ſcientias excolendas animum appellere decreverunt. Ego hunc fructum longe maximum judico, qui ex ſtudio aſtronomico ſperari poteſt; nec me pœniteret temporis quod in eo conſumſi, etiamſi alium nullum inde reportaſſem. Diſcant hinc, quantum ſibi deſint, qui ſtudium Aſtronomiæ negligunt, hac ſola de cauſa, quod nullam ejus utilitatem eſſe ſibi perſuadeant in eo vitæ genere, quod olim ſequi ſtatuerunt. Quaſi vero ea mentis metamorphoſis, quæ a ſtudio aſtronomico expectanda, nullius momenti ſit in quolibet vitæ genere, quod Eruditi ſequi tenentur. Vulgo quidem ingeminatur;

Didiciſſe fideliter artes
Emollit mores, nec ſinit eſſe feros: quod etſi multo laxiore ſenſu verum ſit, quam vulgo accipitur, in praxi tamen parum attenditur. Nemo enim quærit, quantum ſtudium aliquod faciat ad mores emolliendos, aut, ut clarius dicam, ad omnem facultatum noſtrarum promptum & genuinum uſum.

§. 314. Occurrendum vero eſt objectioni, quam forſan nonnulli movere poterant Aſtronomiæ non modo periti, verum etiam in eadem perficienda utiliter verſati. Exiſtimabunt enim, eo, quem diximus (§. 309), modo veritatem aſtronomicam non fuiſſe detectam. Inceſſiſſe inventores per multas ambages, antequam ad viam, qua ſit eundum, ipſis pervenire datum fuerit, ac, multis fruſtra tentatis, tandem reperiſſe quod ad progreſſum ulteriorem faceret. Immo plures in deviis ſubſtitiſſe, antequam uni licuerit eſſe adeo felici, ut in viam rectam incideret. Multum haud raro temporis præterlapſum fuiſſe, antequam ſurgeret Aſtronomus, qui quid daret, cui in Analyſi noſtra locus eſſe poterat. Non igitur tam ardua, qualia ſunt Aſtronomorum inventa, tanta facilitate inveniri potuiſſe, quantam præ ſe fert analyſis noſtra. Ubi veritates detectæ ſint, earum inveſtigationem videri obviam, quæ prorſus inacceſſæ videntur, ubi adhuc ignorantur. Non nego, ſi facta ſola reſpicias, vera omnino eſſe, quæ dicuntur: neque enim nobis difficile foret exemplis ea confirmare. Verum enimvero nobis non jam quæſtio eſt de eo, quod factum eſt; ſed de methodo, qua veritas latens tandem in apricum producta. Quodſi regulæ methodi, quibus legitimus facultatum noſtrarum uſus præcipitur, primis inventoribus diſtincte fuiſſent perſpectæ, nec defeciſſet theoria, principia ad ratiocinandum neceſſaria ſuppeditans, aut hæc ſatis familiaria illis fuiſſent; in ambages inutiles non incidiſſent, ſed rectam, qua eundum eſt, viam ſtatim animadvertiſſent, nec in devia delapſi fuiſſent, multo minus in iiſdem diu ſubſtitiſſent. Breviori adeo tempore ea dediſſent, quæ in analyſi noſtra locum merentur, niſi quantum obſervandi opportunitas moram injeciſſet. Quando in apricum productum, quod quærebatur; quonam uſu facultatum noſtrarum id fuerit factum, reperire licet; ac tanto quidem evidentius id patet, ſi quis in principiis pſychologicis fuerit verſatus. Non igitur inutile, immo potius neceſſarium eſt, niſi incrementum Artis inveniendi negligere voluerimus, ut in eundem omni animi contentione inquiramus, atque eum ad diſtinctas notiones revocemus, ut conſtet, quomodo certa methodo reperiri potuiſſet ab uno, quod nonniſi poſt multa tentamina, in quibus caſui multum tribuitur, detectum. Quia ea perpendit, quæ de Logica artificiali in Prolegomenis Logicæ inculcavimus, dictis

facile

facile aſſentietur. Homines multi conſiderantur inſtar unius, in quo nonniſi locum habet rectus facultatum, quem fecerunt, uſus; rejectis aberrationibus, quæ vel uſus hujus defectui, vel abuſui tribuendæ. Quodſi enim extitiſſet homo, qui rectum facultatum ſuarum uſum, abſque ulla aberratione, facere potuiſſet; is nonniſi ea feciſſet, quæ ad detegendam veritatem latentem ſpectaſſent. Quemadmodum in moralibus obſervandum illud CATONIS, ut ex alieno caſu diſcas quæ vites, & nonniſi ea imiteris quæ ad rectum facultatum uſum faciunt; ita ſimiliter hoc tenendum in Arte inveniendi, & omni veritatis cognitione. Fictio illa, quæ hic admittitur, nihil abſurdi habet, atque longe utiliſſima eſt. Meretur itaque attentionem, quoad omnia, quæ a facultatum humanarum uſu proficiſci poſſunt. Qui ſtudio Matheſeos intellectum perficere vult, non aliud intendit, quam ut rectum conſequatur facultatum uſum aberrationes omnes, quantum datur, poſthac evitaturus. Animum igitur attendere debet ad ea, quæ uſum iſtum loquuntur; parum ſollicitus, utrum in eodem, an in diverſis ſubjectis ea ſint obſervanda; modo conſtet, nonniſi his factis ad ſcopum contendiſſe inventores, cetera vero ipſis nihil profuiſſe, ſed inutiles tantummodo moras peperiſſe, ab illis minime intentas, ſed moleſte latas. Niſi hoc obſervaveris, aliorum exempla & caſus tibi parum proderunt ad perfectionem propriam promovendam; quam tamen metam eſſe in Philoſophia practica univerſali demonſtravimus, ad quam continuo contendere tenemur, niſi obligationi noſtræ naturali deeſſe, ac felicitati propriæ obicem ponere velimus.

§. 315. Nemo non videt ampliſſimum hic eſſe dicendorum campum, ſiquidem omnia, quæ ad præſentem ſcopum ſpectant, minutiſſime perſequi velimus: ſed tantæ prolixitati ſeſe immergere non patitur præſens inſtitutum. Neque etiam diffitemur, quod, ſi quis ulterius progredi voluerit, ei alios quoque autores conſulendos eſſe, tum Veteres, quorum placita collegit RICCIOLUS in Almageſto, tum Recentiores, quos ſuperius laudavimus, cum ſcriptores rerum aſtronomicarum recenſeremus. Quodſi enim ante ſibi cognita atque perſpecta reddiderit, quæ nos noſtro more explicavimus, ut ſine hæſitatione in legendis aliorum ſcriptis progredi poſſit, quam ad hæc legenda accedat; & ordinem temporis obſervet, quo prodita fuerunt, ut pateat, quodnam cogitata anteriora adjumentum attulerint ad poſteriora: quæ exempli loco modo in medium protulimus haud difficulter imitabitur; præſertim ſi in diſciplinis anterioribus, more noſtro, fuerit verſatus, nec ullibi ſuam paſſus deſiderari operam. Hoc conſilium qui ſequi voluerit, ſua ſponte animadvertet, quomodo cum Geometria creverit quoque Aſtronomia. Sane quæ KEPPLE-

RUS dare non poterat, utut ſagaciſſimi ingenii vir, non invita Minerva tentarunt alii; poſtquam noſtro ævo Geometria magis exculta, & ad multo majus faſtigium eveċta, quam KEPPLERI tempore attigerat. Eſt etiam Algebræ ſuus uſus in parte Aſtronomiæ theorica, cujus latiſſimus uſus per univerſam Matheſin. KEPPLERI ævo adeo ignorabatur, ut ne ſomniando quidem eum prævidere daretur; nec mirari debeamus, quod abjecta ſubinde vir ſummus de Algebra ſenſerit. In gratiam igitur eorum, qui Algebræ ſtudio delectantur, unum alterumque ſpecimen dedimus, quo præclarum ejus in Aſtronomia uſum inſinuaremus. Plura ſuppeditat GREGORIUS in *Elementis Aſtronomiæ*, & illuſtria admodum exempla petere licet ex *Commentariis Petropolitanis*.

§. 316. Erunt forſitan nonnulli, qui ſibi perſuadebunt, inanem operam ſumi in tractatione analytica ſtudii aſtronomici, propterea quod abſque ea Aſtronomi ſua invenerint, ac hodienum inventa anteceſſorum perficiant, noviſque acceſſionibus nobiliſſimam ſcientiam locupletent. Enimvero facilis eſt reſponſio. Qui quæ ab aliis inventa ſunt attenta mente conſiderant, eorum animis idea quædam exemplaris uſus facultatum ſeſe inſinuat ad particulare hoc objectum reſtricta, quam, etſi confuſam, imitantur quoad idem objectum, neſcii omnino quemnam facultatum uſum faciant; quemadmodum accidit iis qui in tractandis negotiis imitantur alios in caſu ſimili, theoria omni deſtituti. Neque diffitendum, hac imitatione niti omnem praxin Artis inveniendi in Aſtronomia; quidni etiam in Matheſi reliqua, ſi a regulis Algebræ, ſeu Analyſeos Mathematicæ receſſeris; quamvis etiam in Algebræ praxi huic imitationi multus ſit locus. Quam multum vero in hac imitatione tribuatur caſui, & quam multis ideo tentaminibus locus ſit, meum non eſt in præſenti exponere. Enimvero tota noſtra tractatio analytica non alio tendit, quam ut idea iſta confuſa revocetur ad diſtinctam; quo facto, imitatio, quæ fuerat empirica, rationalis evadit, & multo latius extenditur, immo etiam caſui ſubducitur. Nos jam potiſſimum intendimus, ut Philoſophus imitetur Aſtronomum in qualibet Philoſophiæ parte; immo Eruditus quicunque in ſuo ſcibili; cum de intellectu ſtudio Matheſeos perficiendo agamus, ut eodem extra Matheſin rite utamur. Hæc vero imitatio expectari nequit ab idea confuſa, quæ Aſtronomo prodeſt in Aſtronomia excolenda. Immo ſi qui eam audent, quam ſint infelices ſatis patet. Non deeſſent exempla illuſtria, quibus hoc doceri poterat; niſi conſultius exiſtimaremus ab iis producendis abſtinere.

CAPUT

CAPUT X.

De Studio Geographiæ, Gnomonicæ, & Chronologiæ.

§. 317. GEographia mathematica, cum qua hic nobis negotium eſt, multum affinitatis habet cum Aſtronomia, præſertim ſphærica, a cujus principiis tota pendet. Unde etiam Veteres eandem ab Aſtronomia non ſepararunt, ſed quæ in eadem traduntur, ad Aſtronomiam retulerunt. Quamobrem quæ de ſtudio Aſtronomiæ ſphæricæ dicta ſunt, de Geographiæ quoque ſtudio tenenda ſunt. Et quoniam Geographia, quemadmodum modo diximus, principiis Aſtronomiæ ſphæricæ præſertim nititur; ad eam accedere minime debet niſi eorundem gnarus. Quemadmodum itaque, in Elementis noſtris, Aſtronomiam Geographiæ præmiſimus; ita etiam in Aſtronomia ante verſari debet, quam ad Geographiam pedem promoveat, qui inoffenſo pede in hac progredi voluerit. Quodſi quis, extra ſyſtema, Geographiam mathematicam tradere voluerit, ei multa explicanda ſunt, quæ in Aſtronomia docentur; quemadmodum etiam a nonnullis factum vidimus.

§. 318. Qui nonniſi hiſtoricam Geographiæ cognitionem ſibi acquirere ſtudent, iis ſufficiunt, quæ ad Globum terreſtrem, atque mappas geographicas, & tam illius, quam harum, uſum cognoſcendum faciunt. Ex capite itaque primo ea addiſcere tenentur, quæ de figura Telluris, & circulis in ejus ſuperficie concipiendis, habentur; prætermiſſis problematis ad inveſtigandam ſemidiametrum Telluris ſpectantibus. Sufficit iiſdem notaſſe, quæ de quantitate ſemidiametri Telluris, & unius milliaris Germanici, in pedibus Pariſinis leguntur (§. 43. *Geogr.*). Curioſior ſi quis fuerit, addere poteſt magnitudinem ſuperficiei, ac ſoliditatis Terræ (§. 44 *Geogr.*). Nec uſu caret, ſi Tabulam, quæ in ſcholio problematis 7 (§. 46 *Geogr.*) exhibetur, de convertendis gradibus ſingulorum parallelorum in milliaria Germanica inſpiciat. Ex capite ſecundo, definitiones diſtantiæ locorum, longitudinis item, ac latitudinis ſibi perſpectas reddere tenentur, & quod latitudo loci æqualis ſit elevationi poli notent, ut intelligant, quid ſibi velit Tabula Latitudinis & Longitudinis locorum (*§.* 60 *Geogr.*); prætermiſſis problematis de diſtantia locorum per Trigonometriam ſphæricam ſolvendis. In capite tertio, ultra definitiones zonarum, & tempeſtatum ſtatarum, non progrediendum, additis theorematis 8 & ſequentibus, ſed abſque demonſtrationibus. Eadem

ſere tenenda ſunt, in perluſtrando capite quarto, nimirum ut, præter definitiones, nonniſi theoremata pleraque abſque demonſtratione notentur, & uſus Tabulæ climatum (§. 138 *Geogr.*) inſpiciatur. Niſi quis curioſior fuerit, caput quintum ſicco pede tranſire poteſt; ex ſexto autem, ſufficient definitiones. Ex ſeptimo, diviſionem plagarum ad dignoſcendos ventos cognoſci perutile eſt, una cum theorematis de ventorum proprietatibus, quorum uſus eſt in dijudicandis tempeſtatibus vagis. Inprimis autem horum ſtudio inſervit caput 8, de Globi terreſtris conſtructione & uſu. Immo ſuademus ut Globus ſemper ad manus ſit, in prima ſtatim tractatione Geographiæ; quo facilius intelligantur, quæ in anterioribus docentur. Tandem ex capite nono, quod de mappis geographicis agit, nonniſi ea haurienda ſunt, quæ rudem quandam earundem ideam animo ingenerant, & uſum ipſarum explicant. Nimirum ad manus eſſe debent mappæ, tum univerſales, tum particulares, & addiſcendum, quid denotent lineæ in iiſdem deſcriptæ, quidque indigitent numeri in margine adſcripti. Ita enim conſtructio intelligitur, quantum ſufficit ad earum uſum: neque eo fine requiritur, ut quis modum conſtruendi mappas geographicas capiat. Paucis adeo horis, ſtudium Geographiæ abſolvere poteſt, qui in hiſtorica ejus cognitione acquieſcit; ultra quam nemini progrediendum, qui aliud non intendit, quam ut mapparum geographicarum ideam quandam diſtinctam animo concipiat, quarum hodie promiſcuus omnium uſus eſt.

§. 319. Qui ad ſecundum cognitionis gradum adſpirant, Elementa Geographiæ integra, eo quo a nobis conſcripta ſunt ordine, perluſtrare debent; obſervatis iis, quæ ad nauſeam uſque inculcavimus, cum de ſtudio Aſtronomiæ ſphæricæ ageremus: neque enim inter theoremata ac problemata Aſtronomiæ ſphæricæ & Geographiæ ulla differentia eſt, cum utrobique ad primum mobile referantur, ſeu a motu communi Solis & ſtellarum pendeant; ut adeo etiam, olim præſertim, problemata geographica ad problemata primi mobilis fuerint relata. Loquuntur demonſtrationes, principia ubivis peti ex Aſtronomia. Unde, me tacente, intelligitur ſcientificam Geographiæ mathematicæ cognitionem acquiri minime poſſe, niſi ab eo qui in Aſtronomia fuerit verſatus. Equidem non deſunt, qui, quæ de aſciis, amphiſciis, heteroſciis & periſciis, nec non de antœcis, periœcis & antipodibus docentur, pro futilibus habent, quæ utiliter ignorentur; judicium tamen præcipitant, vel terminorum inſuetorum ſono deluſi, vel ex eorum definitionibus non proſpicientes doctrinæ uſum. Quibus terminorum inſuetorum ſonus imponit, illi cum Scholaſticorum terminis metaphyſicis nondum intellectos comparant, & quod de his inculcari audiverunt

runt judicium, ad hos applicant, cœca imitatione, iis ſolenni qui de rerum valore ex ipſarum notionibus per ſe ſtatuere neſciunt. Oppido autem falluntur: termini enim geographici accuratis definitionibus explicantur, quæ optime intelliguntur, modo terminos eas ingredientes ex anterioribus habueris perſpectos; non vero definitionibus magis obſcurantur, quemadmodum a Scholaſticis fieri ſuevit. Præterea ex his ipſis definitionibus demonſtrantur accurata methodo, quemadmodum in ceteris Matheſeos partibus, quæ ad cognitionem Telluris mathematicam ſpectant, adeoque in Geographia prætermittenda non ſunt (§. 1. *Geogr.*). Non minor eſt præcipitantia eorum, qui negant, quæ proſpicere nequeunt. In Geographia mathematica doceri debet omnis differentia phænomenorum, quæ per univerſam Terræ ſuperficiem a primo mobili pendent. Inter hæc vero etiam ſunt umbrarum differentiæ, quæ corpora a Sole illuminata projiciunt, & differentiæ longitudinum dierum atque noctium, atque tempeſtatum ſtatarum, nec non ortus & occaſus ſtellarum. Has itaque cognoſcere tenetur, qui omnem in diverſis Telluris locis differentiam perſpicere voluerit, etiamſi locum, quo ipſe commoratur, nunquam fuerit egreſſus. Quæ ad umbras ſpectant, in doctrina de aſciis, amphiſciis, heteroſciis & periſciis explicantur; quæ vero ad dierum, & tempeſtatum ſtatarum, aliorumque phænomenorum agnatorum, differentias pertinent, doctrina de antœcis, periœcis, & antipodibus continet. Non igitur nugæ inanes ſunt, quæ hic demonſtrantur, ſed veritates neceſſariæ, non modo animum ſciendi cupidum oblectantes, verum etiam aliis in poſterum inveniendis inſervientes. Non jam inquirimus in caſus, quibus intereſt cognoſci ſtatum Telluris in dato loco, quoad hæc phænomena. Qui enim nulla ſciendi cupiditate flagrat, eum quoque parum movebit utilitas, quam nondum exiſtimat ſuam, ſed alienam judicat. Unicum moneri conſultum duco, de conſtructione mapparum geographicarum, præſertim univerſalium. Mappæ univerſales non ſunt niſi projectiones ſphæræ in plano: unde ſub hoc etiam nomine earum conſtructionem docuimus (§. 272 *& ſeq. Geogr.*). Non igitur diffitemur, ſi doctrinam de projectione ſphæræ præmittere libuiſſet, quemadmodum Sphæricorum Elementa præmiſimus Aſtronomiæ, multo concinnius conſtructionem iſtam demonſtrari potuiſſe. Quoniam tamen brevitati conſulere decrevimus, quæ de projectione ſphæræ præſupponi debebant, ipſis demonſtrationibus geographicis inſeruimus. Non tamen ideo Elementa projectionis ſphæræ tanquam inutilia rejicimus: probe enim novimus, quantus eorum ſit uſus, tum in conſtructione Aſtrolabiorum demonſtranda, tum etiam in projiciendis eclipſibus ſolaribus; quas pro-

jectiones hodie non inutiliter adhibent Aſtronomi. Quoniam vero nos ea non attingimus, in quibus potiſſimum uſus illorum ſeſe exerit; nec præter neceſſitatem theoriam noſtrorum Elementorum multiplicare voluimus, abunde perſuaſi, quod noſtrorum gnarus, abſque ulla difficultate, ea aliunde haurire poſſit, ſiquidem iiſdem habuerit opus.

§. 320. Abunde conſtat ex antecedentibus, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, eos via analytica progredi debere, ut inquirant in artificia, quibus veritas, quæ demonſtratur, in apricum fuerit perducta. Utimur, in eruendis pleriſque quæ traduntur, Trigonometria, tam plana, quam potiſſimum ſphærica. Quamobrem quæ in Aſtronomia eo fine dicta ſunt, hic repetenda veniunt. Cetera ex principiis aſtronomicis, & geometricis, pauca quædam de umbris ex Opticis, communi methodo Logica deducuntur; adeoque patent per ea, quæ de uſu Logicæ in veritate a priori inveſtiganda docuimus in Opere logico, & uberius explicata fuerunt in ſuperioribus, cum de ſtudio Arithmeticæ & Geometriæ elementaris ageremus. Non itaque opus eſt, ut diutius hiſce immoremur, cum ad Geographiam accedere minime debeat, niſi Arithmeticæ, Geometriæ & Aſtronomiæ, immo etiam Opticæ gnarus. Equidem dubitandum non eſt, eſſe etiam Algebræ in ſolvendis problematis geographicis uſum, etſi hactenus ad Geographiam parum applicata fuerit. Neque etiam dubitamus fore ut, quemadmodum Algebra applicari cœpit ad partem Aronomiæ ſphæricam, ſeu problemata primi mobilis, in poſterum non defuturi ſint, qui ſolutiones problematum in Geographia adhuc deſideratorum dabunt. Sed cum ea, quæ noſtro ſcopo ſufficere viſa ſunt, abſque Algebræ auxilio tradi poſſint; hac vice conſultius viſum fuit a calculis algebraicis abſtinere. Neque enim Elementis Matheſeos omnia inſerenda ſunt, quæ hactenus fuerunt detecta, aut per ea ulterius detegi poterant; ne ſtudium Matheſeos, per ſe ſatis amplum, reddatur nimis diffuſum, & ejus faciamus deſertores, quos ad idem allicere & ad ulteriora præparare intendimus. Quid quod nec nobis conveniat tempus in Matheſi conſumere, quod Philoſophiæ reformandæ impendere debemus; cum hodie non deſint multi, qui Matheſi excolendæ utilem operam navant; nemo autem propemodum ſit, qui ſimilem Philoſophiæ præſtare velit. Unum tamen adhuc reſtat, quod ſilentio prætereundum non eſt. Conſtat hodie figuram Telluris non eſſe ſphæricam, quemadmodum credidere Veteres, ſed potius ſphæroidicam, prouti annotavimus (§.4 *Geogr.*). Neque ignotum eſt, ope Algebræ, in figuram Telluris inquiſiviſſe, non infelici ſucceſſu, Geometras præclaros. Problema adeo tam illuſtre non videbatur omittendum; quod præſertim

præ-

præſtantiam Analyſeos recentioris tam aperte loquitur. Enimvero monuimus, jam loco citato, ſub judice adhuc eſſe litem de vera Telluris figura. Quamobrem cum controverſia ratiociniis ſolis definiri minime poſſit; & figura ſphærica ſatisfaciat in Geographia, qualem tradere debuimus; a figura vera ejuſdem determinanda abſtinendum erat; præſertim quod ea, quæ a nobis tradita ſunt de Analyſi moderna, & ejus ad problemata phyſico-mechanica applicatione in Mechanica, abunde ſufficiant ad intelligendas analyticas ſolutiones problematis de figura Telluris, quas dederunt Geometræ recentiores. Elementa noſtra Matheſeos non eo fine conſcripſimus, ut Matheſeos cultores a lectione aliorum librorum avocemus; ſed ut eos ad eandem præparemus, & aptos efficiamus, non ſine multo temporis ac laboris compendio, & ut iis pervia ſit Matheſis, qui intellectus perficiendi gratia in eadem verſari debent, quo eodem felicius extra eandem utantur: id quod ex tota hac tractatione de ſtudio Matheſeos recte inſtituendo abunde eluceſcit.

§. 321. In gratiam eorum, qui intellectus perficiendi gratia in Geographia verſantur, ut eodem prompte extra eandem utantur, non eſt quod addam. Geographiam omnem methodo ſynthetica concinnavimus, qua uſi ſumus in Geometria elementari & aliis Matheſeos partibus, inprimis etiam in parte Aſtronomiæ ſphærica, ad quam proxime accedit. Quamobrem quæ eo fine ibidem inculcavimus, ea hic quoque obſervanda ſunt. Neque vero exiſtimandum eſt, propterea ſtudium geographicum tuto negligi poſſe; cum ab eo ſperandum non ſit, quod non jam dederint diſciplinæ aliæ, quibus ante operam navare tenemur, quam ad Geographiam pedem promoveamus. Etenim cum habitus omnis crebro exercitio acquiratur, & continuo exercitio conſervetur ac perficiatur; non ſuperflua videri debet opera, quæ Geographiæ analytice expendendæ impenditur. Neque eſt quod dicas, idem obtineri poſſe ſola repetitione diſciplinarum ceterarum. Præſtat enim varietate obtinere, quod eorundem repetitio promittere videbatur. Quemadmodum nimirum varietas delectat, eorundem vero repetitio moleſta accidit; ita quoque illa attentionem apprime hic neceſſariam excitat & conſervat, quam hæc labefactat, ut difficilius conſervetur. Exercitia itaque ad eundem habitum tendentia, quæ quoad hunc ſcopum eadem ſunt, diverſa tamen apparere debent; ita ut quaſi continuo aliud agendo in eundem ſcopum collinees, & per diverſa media finem tibi conſequi videaris. Neque hoc ſingulare quidpiam ac inſolitum exiſtimandum. Sane in ipſa Arithmetica practica varietate exemplorum conſequi ſtudemus, quod repetitione ejuſdem exempli obtineri poterat, ſi habitum acquirendum in ſe ſpectes.

§. 322. Hydrographia, quæ de navigatione per mare agit, apud nos nonniſi curioſitatis gratia addiſcitur. Quamobrem qui eam negligere voluerit, per nos negligat. Mathematicum tamen decet, ne eandem ignoret. Quodſi vero eandem perluſtrare volueris, eodem prorſus modo in eo verſaberis, quemadmodum in Geographia. Eadem enim methodo conſcripta eſt, qua Geographiam tradidimus, &, perinde ac hæc, principiis aſtronomicis tota nititur; ut adeo hæc Matheſeos pars longe utiliſſima fructus Aſtronomiæ ſit &, ſi Aſtronomia non alium uſum haberet, propter hunc ſolum, ſummo cum ſtudio excoli mereretur. Qui animum ſciendi cupidum poſſident, eos ſtudium Hydrographiæ mirifice delectat; quatenus vident, quomodo ex principiis mathematicis, præſertim aſtronomicis, deducta fuerint quæ intellectui humano prorſus inacceſſa videri poterant, & fœcunditatem principiorum mathematicorum, quæ in ſe ſterilia apparebant, ipſo facto experiuntur. Plura non addimus: quæ enim dici poterant, ex anterioribus abunde intelliguntur.

§. 323. Quod ſtudium Chronologiæ attinet, de eo non multa nobis dicenda ſunt. Pleraque enim, quæ in Chronologia traduntur, non majorem requirunt attentionem, quam quæ acquirendæ cognitioni hiſtoricæ ſufficit. Qui nonniſi vulgarem Chronologiæ notitiam ſibi comparare ſtudent, iis ſatisfaciunt definitiones diei, & noctis, epochæ diei civilis, horæ, horæ aſtronomicæ, Europææ, & Judaicæ, minuti primi denique, atque ſecundi ex capite primo. Ex ſecundo, perſpectas ſibi reddere debent definitiones omnes, una cum quantitate menſis lunaris communis, & embolimæi, ſeu corollario primo definitionis 28. Ex capite tertio, ſufficit annotaſſe, quæ de anno Juliano, & Gregoriano dicuntur. Si paulo curioſior fuerit, addet ea, quæ dicuntur de recente Judæorum & Turcarum anno. Ex capite quarto, ad intelligendum calendarium addiſcant, quid ſit cyclus Solis, cyclus Lunæ, & cyclus Indictionum, atque periodus Juliana; & ex capite quinto, petant, quid ſit epocha Ruſſorum, epocha mundi conditi Judaica, & epocha Muhamedica: qui vero in legendis Autoribus claſſicis verſatur, addat definitiones epochæ Olympiadum, & epochæ Urbis conditæ. Denique, ad vulgarem Chronologiæ notitiam ſufficit aliqua Calendarii Juliani & Gregoriani cognitio, ex capite ſexto haurienda, &, ubi quis curioſior fuerit, ſimilem Calendarii Judaici, & Muhamedani, ex definitionibus potiſſimum capitis ultimi ſibi comparet. Calculos enim, qui in problematis docentur, una cum corollariis, quibus eorum rationes continentur, tuto negligere poterit. Brevi adeo labore totum ſtudium chronologicum abſolvi poterit, in quo memoriæ omnes fere ſunt partes. Me autem tacente, patet terminos nonnullos ex Aſtronomia per-

perſpectos eſſe debere, ut definitiones chronologicæ intelligantur.

§. 324. Qui accuratiorem Chronologiæ cognitionem appetunt, eam totam perluſtrare tenentur: id quod nullo fere negotio fiet, ubi in Aſtronomia fuerint verſati; cum eorum, quæ in Chronologia intricata ſunt, & hoc ſtudium perplexum atque moleſtum reddunt, nonniſi cognitionem hiſtoricam ſuggeramus. Hiſce principiis imbutus, & in Aſtronomia cum laude verſatus, adeat Autores, quos ſupra ſuo loco commendavimus, ubi ſpinoſis difficultatibus ſeſe immergere voluerit, ut judicium ferre queat, quid veri ſubſit iis, quæ aliorum fide aſſumuntur. Neque enim exiſtimandum eſt ſingula quæ dicuntur, ad chronologiam hiſtoricam ſpectantia, ex monumentis Veterum, quæ nobis ſuperſunt, eſſe adeo aperta & explorata, ut de eorum veritate ambigi minime poſſit. Hoc omnino monendum eſſe duximus; ne, qui Elementa noſtra Chronologiæ perlegit, miretur, cur vulgo conqueratur ſtudium Chronologiæ eſſe abſtruſum, perplexum, atque difficile; cum tamen nullum videatur, quod in eo collocandum, ſi comparetur cum eo, quod in tractandis ceteris Matheſeos partibus hactenus præcepimus.

§. 325. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, in Chronologia quoque quædam invenient, quæ ad ipſorum ſunt palatum. Juvabit perpendere, quomodo menſuræ temporis, ex motu ſiderum fuerint deductæ & ad uſum civilem aptatæ, ut tempus civile cum aſtronomico in concordiam reducatur: quod poſterius cum non uno modo factum ſit, quatenus arbitrium humanum in determinationem influit; obſervare hic licet, quæ in veritatibus neceſſariis locum minime habent. Singularem quoque hic attentionem merentur, quæ de characteribus temporis, præſertim artificialibus, & variis cyclis, atque periodo Juliana docentur. Denique probe perpendenda ſunt, quæ de Calendario Chriſtiano, & Judaico traduntur. Etſi enim calendarium Judaicum principiis nonnullis nitatur ſuperſtitioſis; calculus tamen, quo in computatione utendum, admodum ingenioſus eſt; ut ab Artis inveniendi cupido probe perpendi mereatur. Præbet Chronologia exemplum, quomodo veritates, quas cognovimus, ad uſum vitæ civilis aptentur; ubi ſummus rigor attendi nequit, id tamen agendum, ne ab eo longius recedas in præjudicium finis intenti. Simile quid occurrit, ubi Jus naturæ ad definienda negotia humana, tam privata, quam publica, adhibetur, cujus rigor ſummus obſervari nequit; ut adeo ex eodem condendum ſit Jus civile, ac Jus gentium arbitrarium, quod ab eo quam minimum recedat, & quo cavetur, ne fine civitatum particularium & civitatis maximæ, quam Gentes conſtituunt, excidamus. Suppeditat itaque Chronologia, modo in abſtrahendo

ſatis fueris acutus, nec deſtituaris illo acumine, quo abſtracta in concretis pervidemus, principia generalia, quæ notionum directricium loco eſſe poſſunt in iſtiusmodi caſibus. Qui in Philoſophia noſtra fuerint verſati, iis ſatis clara & perſpicua erunt, quæ dicuntur. Nimis autem prolixi eſſe deberemus, ſi uberius explicanda eſſent, ne ceteris quoque obſcura viderentur. Videmus adeo (id quod etiam haud pauca ante dicta ulterius confirmant), quam utile ſit ſtudium Philoſophiæ verioris, qualem nos profitemur, cum ſtudio mathematico conjungi; ſiquidem uſus omnis, quem hoc præſtat in intellectu perficiendo, compos fieri volueris. Ita demum obtinebitur, ut Matheſis proſit ad recte philoſophandum: id quod ſola applicatione, ad cognitionem Naturæ mathematicam promovendam, obtineri nequit; ut ea præclara ſit, & maxime commendandum ingeniis excelſis, ut hoc cognitionis genus excolatur.

§. 326. Gnomonica diſciplina tota practica eſt, in qua ſola praxis intenditur. Quamobrem a perplexis quoque demonſtrationibus abſtinuimus, quas legere nolunt, qui intelligere poterant; ceteri autem non capiunt. Quodſi quis theoriam omnem aſpernatur, nec niſi conſtructionem horologiorum ſolarium curæ cordique habet; ei ſatisfacient definitiones, & problematum reſolutiones. Si quæ problemata ipſi magis curioſa, quam utilia videntur; ſuo ſtabit judicio in omittendis iis, quorum notitia ſe carere poſſe exiſtimat. Deſcriptionem horologiorum ſolarium adeo perſpicue expoſuimus, ut eadem facilitate abſolvi poſſit, qua figuræ in Geometria elementari delineantur, & alia ejus problemata conſtruuntur. Ne tamen hæreat circa terminos, nec ſatis intelligat quid fieri debeat; omnino conſultum eſt, ut levem quandam Aſtronomiæ ſphæricæ, Geographiæ, & Chronologiæ notitiam ſibi comparet; qualem commendavimus iis, qui nonniſi hiſtoricam cognitionem ſibi comparare ſtudent. Inprimis autem hic uſui eſt, ſi ideas, quæ lumen praxi Gnomonicæ affundere debent, ne in ea prorſus cœcutias, imaginationi inſinuari cures. Exempli loco eſſe poteſt, ſi ipſam deſcriptionem horologiorum ſolarium, applicatione actuali horologii æquinoctialis ad planum in quo deſcribendum, oſtendas. Uſum hic habent machinæ gnomonicæ, quas in uſum deſcriptionis horologiorum ſolarium commendat, & brevi quodam Tractatu deſcripſit PARDIES; quamvis inſtituto præſenti ſufficiat horologium æquinoctiale ſimplici tantummodo modo deſcriptum, quemadmodum ex problemate quarto (*§. 36 Gnom.*) facile intelligitur.

§. 327. Etſi autem a perplexis & intricatis demonſtrationibus, quales dedit CLAVIUS, & quas parum amant ſtudio gnomonico ſeſe mancipantes, conſulto abſtinuerimus, ne nobis ſcriberemus, dum alios erudire volumus; id

id tamen egimus, ut, quanta fieri potuit brevitate ac facilitate, ſatisfaceremus iis, qui ſcientificam horologiorum ſolarium cognitionem appetunt, ne ignorent genuinas conſtructionum rationes. Ad hanc igitur qui adſpirant, eo modo in Gnomonica verſentur, quo in Geometria elementari verſandum eſſe docuimus, ubi ſecundus cognitionis gradus intenditur. Haurit Gnomonica principia ſua ex Arithmetica, Geometria elementari, Trigonometria utraque, Aſtronomiæ ſphærica præſertim parte, Geographia, & Chronologia. Antequam igitur ad illam tractandam accedat ſcientificæ cognitionis cupidus, harum tractationem præmittere debet. Hoc pacto, in omni Gnomonica nihil deprehendet, quod non ſatis intelligat, & de cujus veritate dubium quoddam ſuperſit. Quoniam vero, quemadmodum modo diximus (§. 326), Gnomonica tota practica eſt; qui eidem operam navat, ſingula quoque horologia in charta delineare tenetur. Quodſi dicas, tibi nunquam propoſitum eſſe, ut aliquando horologium quoddam ſolare actu conſtruas; ſed ſufficere, ut intelligas, quomodo conſtruantur, & cur hoc pacto conſtrui poſſint; conſequenter te ſcopo tuo potiri poſſe, ſi tantummodo reſolutiones problematum cum ſchemate conferas; me per omnia conſentientem minime habes. Etenim ſi horologia in charta ipſemet delinees, non modo facilius & clarius eorum conſtructionem intelligis, verum etiam ipſorum ideam memoriæ firmius imprimis. Quotieſcunque veritates practicas cognoſcere ſtudemus; ſuadendum omnino eſt, ut eas in nobiſmetipſis experiamur. Hinc etiam, non diſſentiente Confucio, ſummo Sinarum Philoſopho, in Moralibus inculcare ſoleo, ut eorum, quæ docentur, veritatem in nobiſmetipſis experiri ſtudeamus: quod quantam afferat utilitatem, in parte altera Philoſophiæ practicæ univerſalis, a priori abunde demonſtravimus. Qui adeo cognitioni ſcientificæ operam navat, in omni Matheſi ſolutiones problematum ipſemet tentare tenetur, ſive conſtructiones geometricas, ſive calculos arithmeticos præcipiant.

§. 328. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, reſolutionem problematis tanquam incognitam ſupponere debent, & vi definitionis horologii, quod deſcribi jubetur, inquirendum, quomodo deſcribi debeat. Etenim, ex datis ratiocinando, colligendum quod quæritur. Non datur niſi definitio horologii deſcribendi, quippe quæ ex anterioribus tanquam data ſupponi poteſt ac debet: quæritur modus idem deſcribendi, quem reſolutio explicat. Modus adeo deſcribendi horologium, ratiocinando eruendus ex ejus definitione. Definitio horologii ſpecialis ſupponit definitionem horologii ſolaris generalem. Quamobrem facile patet, eam quoque tanquam datam ſupponi debere; niſi eam inter principia referre velis, quæ

vi eorum, quæ definitioni ſpeciali inſunt, in memoriam revocantur. Ex definitione adeo petendæ ſunt primæ propoſitiones, quarum ope in memoriam revocantur principia, ex Aſtronomia vel aliunde cognita, ut ex illa ratiocinando colligi queat concluſio. Satis hæc intelliguntur ex ſuperioribus, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (*§. 66 & ſeqq.*). Non diffiteor, faciliorem fore operam, ſi demonſtrationes problematum eo ordine concinnatæ eſſent, qui in methodo analytica obſervandus; non ſumendo reſolutionem tanquam hypotheſin theorematis, quemadmodum in demonſtrationibus ſyntheticis fieri ſolet (§.51 *& ſeqq.*). Enimvero, ſi quis in Geometria elementari problemata analytice tractaverit, & methodum, qua ibidem uſus, in aliis imitatus fuerit; ejus vires nec ſuperabit analytica problematum gnomonicorum tractatio. Et quamvis tyronibus hoc difficile videatur, non tamen difficile erit eorum magiſtris, niſi quis intempeſtive docentium numero ſeſe ingerat, qui diſcentium ſubſellia potiore jure occupare debebat. Elementa Arithmeticæ Germanica, methodo analytica, conſcripſimus, eandemque in iis explicandis magis adhuc illuſtramus. Quodſi ergo quis ideam quandam exemplarem inde hauſerit; ea ipſi facem præferet, non modo in Gnomonica, ſed & in aliis Matheſeos partibus; immo extra eandem in diſciplinis aliis. Et ſi quis Elementa iſta vel non legit, vel legere nequit linguæ Germanicæ ignarus, aut etiam Batavæ, in quam converſa ſunt; ideam tamen quandam animo concipiet vi analyſeos demonſtrationum, quam ſupra (§. 38 *& ſeqq.*) ampliſſime expoſuimus. Non igitur opus eſſe judicamus, ut ad particularia deſcendamus.

§. 329. Ceterum Gnomonica in numero artium eſt, quemadmodum Mechanica practica, quæ machinarum compoſitarum ſtructuram explicat. Quoniam in Gnomonica conſtructiones horologiorum ſolarium demonſtrantur; ex ea diſcimus, quomodo Artes ſcientifica methodo tractandæ ſint. Deducitur ea prorſus a priori, atque adeo methodi artes ſcientifice tractandi ideam omnium optime exhibet. Artes ceteræ, ſi non omnes, ſaltem plurimæ, inventæ ſunt a poſteriori, etſi ſubinde in nonnullis a priori perfectæ. Ars poliendi vitra omnino a poſteriori detecta, perinde ac conſtructio teleſcopii; etſi hæc deinde a priori, per principia dioptrica, magis fuerit perfecta. Phænomena teleſcopiorum dudum ante a poſteriori innotuerunt, quam earum accuratas & rigoroſas demonſtrationes dederint Mathematici. Idem dicendum eſt de ſpeculis, quorum phænomena in Catoptrica demonſtrantur. Ad Gnomonicam tamen quam proxime accedit Ars navigandi, & conſtruendi globos artificiales, atque mappas geographicas, & hydrographicas. Quibus adeo animus fuerit ſcientiam artium excolendi;

di, illi hanc differentiam probe perpendere debent. Ex Gnomonica inprimis videre licet progreſſum artis a priori continuandum; quomodo ſcilicet inventa anteriora non modo anſam ſuppeditent de aliis cogitandi, quorum cogitatio alias animum minime ſubiiſſet; verum etiam ad ulteriora invenienda adjumento ſint; ut adeo idem ſit in arte, qui in ſcientia progreſſus, cum utrobique eædem deprehendantur rationes. Huc inprimis animum advertere debent, qui Artem inveniendi ad formam Artis reducere geſtiunt, quemadmodum Logicam ad eandem redactam videmus. Nos, qui nullum Matheſeos uſum aſpernamur, ad ea quoque animum advertimus, quæ vulgo non attenduntur; & uſum, quem Matheſis habere poteſt in excolendo intellectu, ut eodem in omni Scientiarum genere, in quavis Arte, & in ipſis negotiis, tam privatis, quam publicis, prompte ac rite utamur, majoris facimus, quam quem per ſe habere poteſt; utut ſingula æquo pretio æſtimantes, nec meritam detrahamus iis laudem, qui in aliqua Matheſeos parte excolenda omnem ætatem conſumunt. Neque enim ea eſt hominis ætas, immo nec eæ ſunt ejus vires, ut unus omnia poſſit; &, niſi eſſent, qui particulari ſtudio ſcientiam egregie promoverent, nec is a Matheſi expectari poterat fructus in omni ſua extenſione, quem tantopere commendamus, & cui tantum ſtatuimus pretium. Quamvis adeo in Gnomonica multa occurrunt, quæ magis curioſa, quam utilia videntur iis, qui utilitatem ex neceſſitate ad vitam commode degendam metiuntur; immo quæ a ſeveris inventorum cenſoribus ad luſus Mathematicorum referuntur, ipſis ſubinde Geometris excelſi ingenii, profundique acuminis non diſſentientibus, propterea quod unuſquiſque ſuam amat & laudat Minervam; nobis tamen ea non contemnenda, ſed magni facienda videntur; quatenus analytica eorundem conſideratio prodeſt ad augendam Artem inveniendi; immo etiam ſola eorundem ſcientifica cognitio intellectum perficit, etiamſi de eo perficiendo non cogites.

CAPUT XI.

De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris, & Architecturæ civilis.

§. 330. PYrotechnia paucas continet demonſtrationes, quæ ex Geometria elementari principia ſua mutuantur: quas negligere facile poteſt, qui ſoli praxi ſtudet. Ceterum quæ ad praxin faciunt, non modo perſpicue,

ſpicue, ſed & diſtincte propoſuimus; ut ideam diſtinctam eorum, quæ fieri debent, animo nullo negotio concipere detur. Nulli adeo dubitamus, quin ſtudium pyrotechnicum per facile reddiderimus. Si quis praxi operam dare voluerit, is omnino ipſo opere exequi tenetur, quæ præſcribuntur: quo facto ipſemet in ſe experietur, reſolutiones problematum eodem modo eſſe datas, quo reſolutiones Geometriæ practicæ, veluti triangulorum conſtructionem, linearum perpendicularium deſcriptionem, in Geometria elementari exhibuimus. Quodſi quis ante ſingulorum, quæ fieri jubentur, ideam diſtinctam ſibi comparavit, quam ad ea facienda ſe conferat; is non ſolum ad id, quod faciendum, majorem attentionem conferet, ſed & majore cum voluptate artem manuariam addiſcet. Qui in nuda cognitione hiſtorica acquieſcere volunt, iis quidem ſufficere poſſunt, quæ tradimus; ubi tamen occaſio offertur ipſis oculis uſurpandi ſingula, quomodo parentur, eam negligere minime debent; cum hoc pacto ideæ efficiantur clariores, quatenus diſtincte explicatis inſunt confuſe percipienda.

§. 331. Quibus ſecundus cognitionis gradus curæ cordique eſt, non modo addere debent perpaucas demonſtrationes, quæ hinc inde adjiciuntur; verum etiam eorum, quæ ex principiis geometricis demonſtrari nequeunt, rationes paſſim indicatas perpendere tenentur, & ad ea applicare ſtudeant, quæ ſine illarum allegatione proponuntur. Dantur equidem nonnulla in Pyrotechnia, quæ Geometriæ ſublimioris & Analyſeos recentioris gnarus legibus mathematicis adſtringere poterat, cum nunc ſolo arbitrio regantur; ſed nobis minime vacat in talia inquirere. Hanc igitur telam aliis pertexendam lubentiſſime relinquimus, nobiſque ſufficit ea tradidiſſe, quæ ante perſpecta habere debent, quam ingenii ſui vires periclitentur.

§. 332. Pleraque, quæ in Pyrotechnia traduntur, ſunt inventa, quæ artificum tentaminibus debentur, ubi caſus multas ſibi partes vindicat. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, & intellectum præſertim perficere intendunt, ut eodem extra Matheſin prompte ac rite utantur, hoc etiam inventorum genus probe expendere tenentur: neque enim rerum ceterarum, quemadmodum mathematicarum, tam exaſciata proſtat theoria, ut ſuppetant principia, quorum vi a priori detegere licet omnia, quæ quæruntur. Empirica inveniendi methodus, qua utuntur artifices experientiæ qua pollent omnem facientes uſum qui a notionibus confuſis expectari poteſt, in rebus utiliſſimis detegendis omne fert punctum, modo eadem rite uti noris: id quod tibi promittere poteris, ſi eundo per exempla, qualia ſuppeditat Pyrotechnia, eam revoces ad notiones diſtinctas. Qui vel ea legit, quæ in Prolegomenis de differentia Logicæ naturalis & artificialis docuimus, non modo

modo dicta plene intelliget, verum etiam iiſdem facilem habebit fidem. Quodſi attentius reſolutiones problematum pyrotechnicorum expendas, eaſque tanquam inveniendas tibi proponas; methodo empiricæ inveniendi miſceri rationalem, aut ſaltem miſceri poſſe deprehendes: quemadmodum nemo hominum in actionibus ſuis totus empiricus eſt, ut non etiam rationi aliquæ deferantur partes. Et ſi forſan objecerit quiſpiam, te in modum inquirentem, quo eædem fuerint repertæ, haud raro, immo plerumque, incidere in alium ab eo, quo uſi ſunt inventores, prorſus diverſum; non tamen inde conficitur, te nihil agere: ſufficit enim ſi oſtendere poſſis quod eo, quem concipis, modo reperiri potuerit quod quærebatur. Cum enim non alio fine in modum inveniendi inquiras, quam ut eundem in caſu ſimili imiteris; eundem ex aſſe conſecutus, ſi vel maxime de eo non cogitavit, qui quid invenit: id quod de omni analyſi notandum, quam quaſi divinando eruere ſtudemus. Ceterum, ſi quæ compoſitiones occurrunt, quarum nullam reddidimus rationem; in eam eo modo inquirendum, quo rationem compoſitionis pulveris pyrii caſu detectæ eruimus (§. 17. *& ſeqq. Pyrotech.*).

§. 333. Qui Architecturæ militaris nonniſi cognitionem hiſtoricam deſiderant, ex definitionibus terminos ſibi perſpectos reddere tenentur; nec inconſultum eſt, ſi ad manus fuerit idea quædam materialis munimenti, ſive ex ligno, ſive ex charta, ſive etiam ex argilla parata. Cum enim terminos non alio fine addiſcant, quam ut munimenta videntes ſingula ſuis nominibus indicare valeant, & ut nominibus auditis reſpondentes iiſdem ideæ imaginationi præſentes ſiſtantur; ideæ hæ facilius memoriæ imprimuntur per conſpectum ideæ materialis, quam notionibus diſtinctis, quibus definitiones conſtant. Quodſi tamen hæ accedant, imprimentur tanto firmius, & jucundius, ut facilius eadem retineantur, nec ſine voluptate labore hoc defungaris. Deinde ſufficit munimenti unius vel alterius Protographiam ſaltem conficere, quæ nonniſi ambitum totius munimenti & operum externorum exhibet, ut hoc pacto idea munimenti integri acquiratur, nec ejus deinde conſpectus adſpicientem confundat. Idem tenendum eſt de operibus hoſtium campeſtribus, quorum in praxi offenſiva & defenſiva opus eſt. Neque Inconſultum eſt, ut, terminis intellectis, ichnographias munimentorum ad manus ſumat, & per eos eaſdem explicare diſcat. Rudis hæc Architecturæ militaris notitia uſui eſt iter facientibus & loca munita inviſentibus; tum etiam prodeſt ad intelligendas novellas publicas, quando de obſidionibus urbium munitarum loquuntur.

§. 334. Qui cognitionem Architecturæ militaris ſcientificam ſibi acquirere ſtudent, Elementa integra, eo quo conſcripta ſunt ordine, perluſtrare debent. Ex capite igitur primo, principia ſibi perſpecta reddere tenen-

tur, ex quibus omne de diverſis muniendi formis judicium pendet. Secundum hæc principia examinare debet diverſas muniendi formas, quæ in capite ſecundo proponuntur. Neque parum ſibi conſulet, ubi deinceps ex Sturmii Architectura militari hypothetica, ſimili examini alias adhuc muniendi formas ſubjiciat, vel ex aliis libris, quos de Architectura militari recenſuimus, alias petat. Ita nimirum non modo principia ipſa ſibi reddet multo clariora, eaque magis familiaria; verum etiam eorundem applicationem in ſuam magis rediget poteſtatem. Neque etiam contemnendus eſt calculus trigonometricus: quod qui faciunt, ejus utilitatem minime proſpiciunt. Nemo non novit in qualibet muniendi forma non omnia ſumi poſſe, principiis in capite primo expoſitis convenienter; ſed per quædam aſſumta determinari cetera. Horum adeo quantitas ex iis, quæ ſumuntur, per calculum geometricum eruenda, ſiquidem accurate de eadem conſtare debet. Nullum equidem dubium eſt, ex iiſdem, conſtructione geometrica, eaſdem lineas, eoſdemque angulos determinari, & illarum magnitudinem, ope ſcalæ geometricæ, horum vero quantitatem, ope inſtrumenti tranſportatorii, inveſtigari poſſe; nemo tamen eſt qui neſciat, methodum hanc, non modo ſupponere conſtructionem accuratiſſimam, verum etiam ne hac quidem ſuppoſita adeo accurate inveſtigantur, quemadmodum per calculum trigonometricum eruuntur quantitates linearum & angulorum. Quodſi excipias, in praxi acribiam trigonometricam obſervandam non eſſe, immo nec ſemper obſervari poſſe, ſi vel maxime velis; utrumque largior: non tamen hinc recte infertur, quod inutile ſit noſſe angulorum ac linearum magnitudinem quam accuratiſſime. Etenim hinc non modo certus es, te in ea definienda nullum admiſiſſe errorem, qui facile irrepere poterat eam mechanice inveſtigando; ſed & hinc attentior efficitur animus, ne in praxi a rigore magis recedas, quam par erat. Taceo, quod ad ſcientificam Architecturæ militaris cognitionem etiam requiratur, ut conſtet quomodo ex iis, quæ principiis in parte prima expoſitis convenienter ſumuntur, inveſtigentur cetera, quæ per ea determinantur. Ut vero tanto minus in dubium revocari poſſit utilitas calculi trigonometrici in Architectura militari; hoc unum adhuc probe perpendi velim. Subinde per ea, quæ in methodo muniendi ſumuntur, vi principiorum generalium, moleſta eſt conſtructio geometrica, ſi quidem accurata deſideretur. Quodſi vero lineæ aliæ ſupputentur, ex iis tanquam cognitis jam multo ſimplicior evadit & accuratior. Exemplum habemus in methodo muniendi *Blondelliana* (§. 151. *Arch. mil.*), cujus conſtructio, per calculum trigonometricum, ad *Paganianam* revocatur. Immo, ope hujus calculi, conſtructio, ex latere interno aſſumto, poteſt revocari ad alteram, quæ ex externo procedit, & contra: id quod

ſubin

ſubinde uſui eſſe poteſt, præſertim in munitionibus irregularibus. Munimenta irregularia expendimus capite tertio, & quænam hic ſint obſervanda, exponimus. Enimvero in methodo muniendi irregulari inprimis opus eſt, ut principia generalia conſtanter ob oculos verſentur, ne quid contra ea admittatur: id quod facile accidit, niſi per ea examinentur, quæ in delineandis munimentis irregularibus facis. Hic ſane haud raro cœcutiunt, qui ea non ſatis perſpecta habent, vel in eorum applicatione hæſitant. Unde apparet, quam neceſſaria ſit ſcientifica Architecturæ militaris cognitio, cum irregularia munimenta ſint frequentiora regularibus; ut adeo is demum Artis muniendi peritus ſit dicendus, qui in delineandi munimentis irregularibus non hæret, nec ceſpitat. Denique qui rationes quoque operum campeſtrium, quæ capite ultimo deſcribimus, perſpicere voluerit, is duo ſcholia, quæ in fine adjicimus, attente perlegat, ut proceſſus obſidionis ideam animo concipiat, & quænam obſeſſi defenſionis gratia faciunt, intelligat. Hinc enim multo clarius intelliguntur, quæ de illis præcipiuntur.

§. 335. Quodſi quis praxi Architecturæ militaris operam dare decreverit, ei ſcientificam ejus cognitionem quam maxime commendamus, experientia domeſtica deinde magis illuſtrandam, ac confirmandam. Ab eo autem cum expectetur, ut accuratas & nitidas munimentorum delineationes dare poſſit; in iis quoque delineandis multum operæ conſumere tenetur, donec tandem multiplici exercitio eum conſequatur habitum, quo ſe commendare poſſit. Vulgo peritiam Architecturæ militaris ex munimentorum delineationibus æſtimare ſolent, fallaci admodum judicio. Etſi autem in Arte muniendi excellere poſſit, qui in iis delineandis parum excellet; cum tamen qui eidem totum ſeſe dat, nec ea negligere debeat, quæ Artem ornant, nitidas quoque delineationes ab eo jure exigimus; tanto quidem magis, quo certius eſt, haud raro, immo plerumque contemni Artem ornatu iſto deſtitutam. Qui vero praxi operam dare, ipſamque Artem exercere non decrevit, etſi caſtra ſequatur; ei vix ſuademus, ut in habitu iſto comparando tempus fallat, quod longe utilius in aliis addiſcendis conſumere poterit.

§. 336. Quibus tertius cognitionis gradus curæ cordique eſt, in Architectura quoque reperient militari, quæ attentionem ipſius merentur, ſive in ſola Matheſi verſari voluerint, ſive intellectum perficere ſtuduerint, ut eodem prompte ac rite etiam extra eandem utantur. Cum Architectura militaris in numero diſciplinarum practicarum ſit, ratio ultima eorum, quæ in eadem traduntur, finis eſt, qui per eam intenditur. Quamobrem hic probe perpendendum venit, quomodo ex fine, qui in definitione indicatur, deducantur principia, quæ in capite primo propoſuimus; applicata vero deinde ad eadem Geometria, cetera

hinc deriventur, ſine quibus forma muniendi concipi nequit, multo minus munimenta actu excitare licet. Hinc enim non ſolum addiſcere datur, quæ ad cognitionem Artis mathematicam venandam uſui ſunt; verum etiam quomodo in diſciplinis practicis verſandum, ut ſatis adæquatas nanciſcaris ideas, quæ praxi ſufficiunt. Satis autem adæquata eſt, ſi in ea ſingula, quæ fieri debent, determinentur; quemadmodum ex tractatione Architecturæ militaris abunde eluceſcit, modo attentionem tuam in ea deſiderari minime patiaris. Diverſæ dantur muniendi formæ; ſed, ubi eas juxta principia in capite primo propoſita examines, non omnes cum iis æque conſentiunt. Unde aliæ aliis tanquam meliores præferuntur. Docet autem progreſſus Architecturæ militaris, quod primo inventæ muniendi formæ defectibus fuerint obnoxiæ, quos experientia detexit, primum ab inventoribus non animadverſas, iis autem mederi ſtuduerint, qui recentiores excogitarunt. Etſi in uſum Artis inveniendi non inutile foret, eo fine expendere omnes muniendi formas, quæ hactenus publici juris factæ, & quidem eo ordine, quo luci publicæ expoſitæ fuerunt; noſtri tamen inſtituti ratio minime ferebat, ut in tantas ambages deſcenderemus. Ne tamen hac in re prorſus deeſſemus Lectori ad tertium cognitionis gradum adſpiranti, ea tradidimus, quæ ad ideam quandam hujus facti animo concipiendam ſufficiunt, profuturam iis, qui in aliis diſciplinis practicis Architectos militares non infeliciter imitari voluerint. Non alia ſane de cauſa expoſuimus methodum muniendi *Belgicam*; utut propter defectus, quibus laborat, hodie antiquatam, ut nullius uſus eſſe videatur, niſi quatenus adhuc extent munimenta bene multa hac methodo conſtructa, & iiſdem ſubjunximus methodos muniendi Gallorum. Conſtat enim formam muniendi Belgicam, tanquam omnium optimam, celebratam fuiſſe; ejus autem nævis animadverſis, Gallos primum publicaſſe formas alias, quibus hiſce mederi tentarunt. Ceterum applicatio Trigonometriæ ad Architecturam militarem, in uſum tertii cognitionis gradus, etiam aliquam attentionem meretur; non modo quod hoc ipſo confirmetur, quod in Arte inveniendi locum mereatur; verum etiam ut ejus ampliſſimus uſus in majore luce conſtituatur.

§. 337. Architecturæ civilis cognitionem hiſtoricam acquiſiturus legat definitiones, & problemata; exceptis iis, quæ ad delineationes Ordinum architectonicorum; & eorum uſum in ordinandis januis, atque feneſtris ſpectant, & quæ de Ichnographia & Orthographia ædium agunt. Quodſi deſit occaſio ædificia juxta regulas architectonicas conſtructa contemplandi; Ichnographias & Orthographias externas ædificiorum æri inciſas perluſtret, ut ideam ædificii integri, juxta regulas architectonicas conſtructi, animo imprimat. Inprimis autem

autem terminos, & conſtructionem Ordinum architectonicorum ſibi familiares reddat, ne in ornatu, qui inde petitur, cœcutiat. Hoc pacto obtinebit, ut non ſolum libros de Architectura civili conſcriptos ſine hæſitatione legere, ſed quæ uſui ſuo eſſe poſſunt, etiam addiſcere, ac data occaſione ad eundem transferre, queat. Hiſtorica igitur cognitio non ob ſolam curioſitatem, ſed & ob utilitatem, quam unicuique præſtat, acquiritur. Sane qui peregrinantur, quemadmodum Germani facere ſolent ſtudiis academicis abſolutis, cognitione iſta animum imbutum habere debent; ne in ædificiis, aliiſque operibus architectonicis, ſpectandis ignorent, quid videant, laudaturi aliis, quod cur laudent, nullam afferre valent rationem. Male adeo ſibi conſulunt, qui ſtudium architectonicum, quod ea fini intra paucas hebdomades abſolvi poterat, in Academiis prorſus negligunt, non alia de cauſa, quam quod architecti fieri nolint. Perfacile autem hoc ſtudium eſt, præſertim ſi ultra cognitionem hiſtoricam progredi nolueris. Quodſi otium ſuppetat, ruditer ſaltem delineare Ordinem aliquem architectonicum, veluti Toſcanum, qui delineatu omnium facillimus, juvat; non modo ut idea Ordinis, ſed etiam membrorum memoriæ firmius infigatur: id quod tanto magis ſuadendum, cum norim pleroſque fieri deſertores ſtudii architectonici, quod tædioſum videatur terminorum notitiam ſibi comparare.

§. 338. Scientificam Architecturæ cognitionem deſiderans Elementa integra, eo quo conſcripta ſunt ordine, perlegat, & eam attentionem afferat, quæ ad ſingula rite percipienda ſufficit. Qui vel in Elementis Geometriæ verſatus fuerit, ei attentio huc afferenda nulla fere videbitur: Matheſeos vero prorſus ignarus non majorem hic requiri experietur, quam qua in legendo libro alio quocunque utendum; immo minorem, cum omnia diſtincte explicentur, quod vulgo fieri non ſolet; nec occurrant verba, quorum dubius eſt ſenſus; præter doctrinam vero de Ordinibus architectonicis nihil occurrat, cujus non habeat Lector ideam vulgari experientia acquiſitam. Nemo autem hic expectet demonſtrationes, quales in Geometria dedimus; ſufficit enim addiſci eorum, quæ præcipiuntur, rationes, ut intelligatur, cur hoc potius modo fieri debeant, quam aliter. Inprimis etiam probe perpendat in Ordinibus architectonicis multa eſſe arbitraria; quorum etſi dentur, atque a nobis datæ ſint rationes, abſit tamen, ut quis rationes iſtiuſmodi deſideret, quales ſunt ceterorum, quæ neceſſarias habent. Sane in Arithmetica, quæ rigidas demonſtrationes admittit, cum veritates numerorum non minus neceſſariæ ſint, quam linearum & figurarum in Geometria, eorum, quæ arbitraria ſunt, veluti legis numerandi & notarum numericarum, non dari poſſunt rationes, quæ veritatibus neceſſariis conveniunt. Qui praxi architectonicæ ſeſe

dedunt, iis inprimis opus eſt ſcientifica Architecturæ cognitione: Architectus enim in promptu habere debet rationes, quas reddat quærentibus, cur hoc vel illud ita fecerit (§. 3 *Arch. civ.*). Obtinebit præterea, ne cœca ſit aliorum imitatio; quam haud raro eſſe fallacem, ne opus probetur intelligentium judicio, experientia loquitur. Non deſunt exempla, quibus quod dictum eſt, confirmari poterat; ſed noſtrum jam non eſt perſtringere ea, quæ ab aliis minus recte facta ſunt, cum jam docere id unice intendamus, quomodo tractandum ſit ſtudium architectonicum, ut recte fiant omnia. Induſtriam præterea ſuam exercere debeant in delineationibus architectonicis, quicunque Artem exercere decreverunt, & quæ paulo ante de delineationibus munimentorum annotavimus (§. 335), ea quoque hic notanda veniunt. Ex elegantia delineationum vulgo judicium fertur de peritia Architecti; etſi male, ac ſubinde non ſine damno fundatoris. Quamobrem cum dandum non modo ſit aliquid opinioni, ſed & qui in Arte quadam excellit, ea negligere non debeat, quæ ad ornatum faciunt; nemo erit, qui ab Architecto elegantiam in delineandis ædificiis, aliiſque operibus architectonicis, jure non deſideret; quamvis non probemus contemni propterea Artem in eo, qui eadem excellit, quia elegantiam in delineando non poſſidet. Qui enim hoc faciunt, ſuo, & aliorum, quibus a conſilio eſſe debebant, hoc faciunt damno. Immo ſi quis deſideret delineationes elegantes; aliorum opera eædem perfici poterunt; modo, qui in Arte excellit, ea ſuppeditet, quæ ad eas perficiendas neceſſaria ſunt.

§. 339. Qui denique ad tertium cognitionis gradum adſpirant, eos quoque juvabit Architectura civilis. In Architectura civili, regulæ omnes deducuntur ex fine, quem loquitur definitio ejuſdem. Finis hic in eo conſiſtit, quod ideam ædificii animo concipere, & juxta eam ipſum extruere debeamus, ita ut ſcopo fundatoris ex aſſe ſatisfaciat. Quamobrem huc potiſſimum animum advertere tenetur, qui tertium cognitionis gradum intendit, quomodo ex hoc fine deriventur regulæ omnes, ita ut rationes earundem tandem in hanc rationem ultimam reſolvantur. Monuit jam VITRUVIUS, & nos in Elementis noſtris a priori ex ipſo fine Architecturæ, oſtendimus, regulas Architecturæ omnes redire ad firmitatem, utilitatem ſeu commoditatem, & venuſtatem atque ornatum ædificii, vel alterius operis architectonici cujuſcunque. Quamobrem regulæ omnes rationem ſufficientem, vel in firmitate, vel in utilitate, vel in venuſtate atque ornatu, vel hiſce binis, aut omnibus ſimul ſumtis agnoſcunt. Sufficit itaque inquirere, quomodo ex hiſce fontibus, vel immediate, vel mediate fuerint deductæ. Cum pauciſſimæ ſint, quæ Geometriæ auxilium poſtulant; hæc diſquiſitio plurimum proderit ei, qui in diſciplinas practicas a Matheſi ſejunctas accurata metho-

methodo pertractare voluerit. Notandum præterea, ſi quis ideam ædificii animo concipit, dato fundatoris ſcopo, eum inventorem agere, ac regulis Architecturæ civilis uti, tanquam principiis in ratiocinando. Quamobrem qui ad modum, quo hoc facit, animum attendit; is hinc addiſcere valet, quomodo theoriæ ad tractanda negotia, quæ levi brachio tractari minime poſſunt, dextre ac rite applicentur. Suademus ergo ut ædificiorum, ſuppoſito fundatoris ſcopo, inveniatur conſtructio etiam ab iis, qui Artem exercere non intendunt: quod ut facilius ſuccedat, ante in examinandis ædificiis juxta regulas architectonicas non inutiliter verſabitur, quam ad telam iſtam pertexendam ſe accingit. Non adeo levem, nec contemnendæ utilitatis deprehendet demonſtrationem, qui ædificium, dato fundatoris ſcopo, conſtruendum ſibi tanquam problema proponit, veluti *conſtruere in data area, datoque loco, ædificium, quod huic fundatoris ſcopo ex aſſe ſatisfacit;* deinde quomodo extruendum ſit eodem modo exponat, quo reſolutiones problematum per univerſam Matheſin exhibuimus, & tandem demonſtret pro datis circumſtantiis ſcopo fundatoris ex aſſe ſatisfieri, ſiquidem hoc modo exſtruatur. Etenim qui in expediendis negotiis, tam privatis, quam publicis, eam certitudinem conſequi voluerit, quam conſequi datur; plurimum hinc lucis fœnerabitur, quam aliunde vix ac ne vix quidem adeo commode expectet. Non igitur erubeſcimus ſtudium Architecturæ civilis, hoc modo inſtituendum, commendare iis, qui ad negotia publica gerenda ſeſe præparant; ut eorum rite tractandorum ideam quandam exemplarem animo inſinuent. Plura addere poſſem, quomodo prudentia Architecti prodeſſe poſſit in gerendis negotiis; niſi principiis, quæ in Philoſophia practica tradimus, imbutus per ſe hoc videre poſſit, ubi ea, quæ hic commendamus, exercitia non neglexerit.

§. 340. Atque ita tandem nos ſatis docuiſſe confidimus, quomodo ſtudium mathematicum tractandum ſit, ut omnem conſequamur uſum, qui ab eo expectari poteſt. Non loquor niſi experta; ac ingenue profiteor, me nunquam ea, quæ hactenus in Philoſophia conſcripſi, & in poſterum, ſi Deo ita viſum fuerit, additurus ſum, daturum fuiſſe, niſi adminiculis iſtis adjutus fuiſſem. Eadem experientia fretus docere quoque poteram, quomodo Matheſi uti poſſimus ad diſtinctas, & fœcundas, in Philoſophia prima, notiones venandas; & quomodo ſtudio mathematico perfici poſſit etiam appetitus; ſed cum hoc a præſenti inſtituto alienum ſit, quæ hic dici poterant, alii occaſioni reſervamus. Ne tamen dixiſſe videamur, quæ abſona ſunt, unum ſaltem alterumque exemplum in medium afferre lubet. Poteramus hic tantummodo provocare ad ea, quæ alibi jam tradidimus, veluti quod notio generum, & ſpecierum (*not.* §. 72, 73 *Log.*) atque individui,

ex

ex formulis algebraicis derivari poſſit (*not.* §. 74 *Log.*); & ipſe modus, quo Deus univerſalia, eorundemque nexum, in ſingularibus intuetur, ex iiſdem formulis eliciatur (*not.* §. 275 *part.* 1. *Theol. nat.*); ſed ne lectorem ablegemus ad alibi quærenda, nec hic repetamus alibi dicta, conſultius viſum fuit, exempli loco, alia quædam proferre. Inter notiones difficiles referri ſolet notio determinati & indeterminati. Enimvero nos eandem derivavimus ex exemplis mathematicis: qua etiam de cauſa, ſingula quæ, in Ontologia, de determinato & indeterminato docuimus, exemplis mathematicis illuſtramus. Neque enim dantur alia hiſce clariora, & notionem in Philoſophia longe utiliſſimam felicius illuſtrantia. In formula algebraica quacunque, veluti ſi $\frac{a+b}{2}$ dicatur numerus major, ſumma exiſtente *a*, & differentia *b*; numeri *a* & *b* dicuntur indeterminati; quia tam *a*, quam *b* explicari poteſt per numeros infinitos; conſequenter de *a* affirmari poteſt, tum quod ſit 6, tum quod ſit 12, tum quod ſit 19, & ita porro in infinitum, & de *b* affirmari poteſt, tum quod ſit 2, tum quod ſit 4, tum quod ſit 5 & ita porro in infinitum. Indeterminata igitur dicitur ſumma, quatenus conſideratur ut id, de quo affirmari poteſt numerus, 6, 12, 19 &c. nullus tamen adhuc de eadem affirmatur: quæ eſt ipſa notio indeterminati (§. 105 *Ontol.*). Aſt ſi ſumma dicatur 6, determinata dicitur; quia jam conſtat, quinam numerus de ea ſit affirmandus: quæ eſt ipſa notio determinati (§. 112 *Ontol.*). Idem patet de differentia *b*. Ordinis quoque notio diſtincta inter eas refertur, quæ difficiles ſunt: ſed ex ſeriebus infinitis, quarum termini ordine dicuntur progredi, haud difficulter eruitur. Ex. gr. in ſerie $\frac{1}{1 \cdot 2} v^2 - \frac{1}{3 \cdot 4} Av^2 + \frac{1}{5 \cdot 6} Bv^2 - \frac{1}{7 \cdot 8} Cv^2$, &c. in infinitum, ubi *A* terminum primum, *B* ſecundum, *C* tertium denotat; terminus ſequens determinatur ex præcedente eodem modo, ac ideo ordo in progreſſu terminorum adeſſe dicitur. Ex identitate determinationis naſcitur ſimilitudo (§. 217 *Ontol.*). Ordo igitur hic eſt ſimilitudo obvia in modo, quo termini ſe invicem conſequuntur; quemadmodum vult definitio noſtra ordinis (§. 472 *Ontol.*). Sed pauca hæc ſufficiant.

Finis Commentationis de Studio Matheſeos recte inſtituendo.

INDICES
IN
TOMOS QUINQUE
ELEMENTORUM
MATHESEOS UNIVERSÆ.

I.

CONSPECTUS ELEMENTORUM MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS I.

I. De Methodo mathematica brevis commentatio, pag. 1
II. Elementa Arithmeticæ, 15
III. Geometriæ, 95
IV. Trigonometriæ planæ, 211
V. Analyſeos finitorum, 233
VI. infinitorum, 417

TOMUS II.

VII. Elementa Mechanicæ & Staticæ, 1
VIII. Hydroſtaticæ, 253
IX. Aërometriæ, 279
X. Hydraulicæ, 331

TOMUS III.

XI. Elementa Opticæ, 1
XII. Perſpectivæ, 77
XIII. Catoptricæ, 103
XIV. Dioptricæ, 171
XV. Sphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ, 291
XVI. Aſtronomiæ, 341

TOMUS IV.

XVII. Elementa Geographiæ & Hydrographiæ, 1
XVIII. Chronologiæ, 85

XIX. Elementa Gnomonicæ, pag. 151
XX. Pyrotechniæ, 197
XXI. Architecturæ militaris, 237
XXII. Architecturæ civilis, 287

TOMUS V.

XXIII. De præcipuis ſcriptis mathematicis brevis Commentatio. 1

Cap. I. *De Curſibus, Operibus atque Lexicis mathematicis*, 3
Cap. II. *De Arithmetica*, 21
Cap. III. *De Geometria*, 24
Cap. IV. *De Scriptis analyticis*, 38
Cap. V. *De Trigonometria*, 55
Cap. VI. *De Statica & Mechanica*, 60
Cap. VII. *De Hydroſtatica, Aërometria & Hydraulica*, 68
Cap. VIII. *De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perſpectiva*, 73
Cap. IX. *De Aſtronomia*, 79
Cap. X. *De Chronologia, Geographia & Gnomonica*, 99
Cap. XI. *De Architectura civili*, 109
Cap. XII. *De Pyrotechnia*, 118
Cap. XIII. *De Architectura militari*, 120

XXIV. Commentatio de ſtudio mathematico recte inſtituendo, 129

Cap. I. *De diverſis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur*, 131
Cap. II. *De modo inſtituendi ſtudium Matheſeos intellectus perficiendi cauſa*, 190
Cap. III. *De Studio Arithmeticæ, Geometriæ & Trigonometriæ planæ in ſpecie*, 200
Cap. IV. *De Studio Algebræ ſeu Analyſeos mathematicæ in ſpecie*, 209
Cap. V. *De Studio Mechanicæ*, 317
Cap. VI. *De Studio Hydroſtaticæ, Aërometriæ & Hydraulicæ*, 326
Cap. VII. *De Studio Opticæ, Perſpectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ*, 333
Cap. VIII. *De Studio Sphæricorum & Trigonometriæ ſphæricæ*, 346
Cap. IX. *De Studio Aſtronomiæ*, 350
Cap. X. *De Studio Geographiæ, Chronologiæ & Gnomonicæ*, 389
Cap. XI. *De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris & Architecturæ civilis*, 399

FINIS TOTIUS CONSPECTUS.

II.

INDEX

Oſtendens paragraphos, in quibus definitiones & propoſitiones Elementorum Euclidis continentur.

Notes velim, Ar. deſignare Arithmeticam, G. Geometriam, An. Analyſin finitorum.

Elementi I.

Def. 1.	G. §. 6. 8. 9.	Def. 22.	G. §. 104.	Ax. 3.	Ar. 91.
2.	10. 12.	23.	88.	4.	90.
3.	11.	24.	89.	5.	91. 92.
4.	17.	25.	90.	6.	93.
5.	28.	26.	91.	7.	94.
6.	29.	27.	92.	8.	G. §. 161.
7.	36.	28.	93.	9.	Ar. §. 84.
8.	54.	29.	98.	10.	G. §. 250.
9.	54.	30.	100.	11.	50.
10.	65. 78.	31.	99.	12.	145.
11.	66.	32.	101.	13.	262.
12.	66.	33.	103.	14.	170.
14.	32.	34.	81.	Prop. 1.	198.
15.	37.	35.	102.	4.	179.
16.	37.	36.	111.	5.	184.
17.	39.	Poſt. 1.	20.	6.	253.
18.	135.	2.	21.	7.	202.
19.	34.	3.	131.	8.	204.
20.	87.	Ax. 1.	Ar. 87. 89.	9.	209.
21.	97.	2.	88.	10.	210.

Pr. 11. G. §. 212.
12. 216.
13. 147.
14. 147.
15. 156.
16. 188.
17. 247.
18. 189.
19. 189.
20. 190.
21. 300.
22. 205.
23. 208.
26. 251.
27. 255.
28. 255.
29. 233.
30. 232.
31. 258.
32. 239.240.
33. 257.
34. 335.337.
35. 383.
36. 383.
37. 385.
38. 385.
41. 386.
44. 391.
45. 391.
46. 338.
47. 417.
48. 417.

Elem. II.

Pr. 1. An. 91.
2. 93.
3. 86.
4. Ar. 261.
An. 95.
Pr. 5. An. §. 88.
6. 94.
7. 90.
8. 90.
9. 89.
11. 258.

Elem. III.

Def. 1. G. 171.
2. 47.
3. 47.
4. 225.
5. 225.
6. 45.
7. 77.
8. 70.
9. 56.
10. 46.
Pr. 1. 295.
3. 291.
4. 332.
5. 288.
6. 287.
7. 303.
8. 302.
9. 173.
10. 203.
14. 298.
15. 299.301.
16. 304.305.
17. An. 291.
18. G. 308.
19. 309.
20. 313.
21. 315.
22. 350.
25. 295.
26. 315.
27. 315.
Pr. 28. G. §. 289.
29. 289.
30. 293.
31. 317.
318.
319.
32. 323.
35. 381.
36. 379.
37. 380.

Elem. IV.

Def. 3. G. §. 116.
6. 117.
Pr. 5. 294.
297.
6. 353.
7. 351.
11. An. 279.
12. G. 355.
15. 357.

Elem. V.

Def. 1. Ar. 30.
2. 142.
3. 126.
4. 131.
5. 219.
6. 155.
7. 158.
8. 155.
9. 156.
10. 159.216.
11. 159.216.
13. 173.
14. 169.
15. 190.
16. 193.
17. 193.
18. 194.195.

Def.

Def. 19. Ar. §. 194.
20. 195.
Pr. 4. 185.
5. 188.
6. 188.
7. 168.
8. 203. 205.
9. 177.
10. 204. 206.
11. 167.
12. 155.
15. 178.
16. 173.
17. 193.
18. 190.
19. 188.
22. 194.
23. 198.
Elem. VI.
Def. 1. G. 175.
2. An. 261.
3. 258.
4. G. 227.
5. Ar. 159.
Pr. 1. G. 389.
2. 268.
3. 269.
4. 267.
5. 207.
6. 183.
8. 329.
9. 274.
10. 275.
12. 271.
13. 327.
16. 378.
17. 377.
18. 360.

Pr. 19. G. §. 398.
20. 403.
23. 376. 388.
30. An. 258.
33. G. 314.
Elem. VII.
Def. 1. Ar. §. 3. 4.
2. 10.
3. 30.
4. 30.
5. 142.
6. 72.
7. 73.
11. 75.
12. 79.
13. 76.
14. 80.
15. 66. 69.
18. 246.
19. 248.
20. 155.
22. An. 248.
23. Ar. 74.
24. 126.
26. 159.
27. 217.
Ax. 7. 210.
9. 212.
Pr. 1. 230.
2. 228.
11. 188.
12. 187.
13. 173.
14. 194.
16. 207.
17. 178.
18. 178.
19. 297. 299.

Pr. 20. Ar. §. 298.
22. 198.
Elem. VIII.
Pr. 11. Ar. §. 259.
12. 259.
13. 260.
Elem. IX.
Pr. 21. An. §. 72.
22. 75.
23. 75.
24. 72.
25. 73.
26. 74.
27. 73.
28. 72.
29. 74.
30. 79.
35. 119.
36. 248.
Elem. X.
Def. 1. Ar. §. 31.
2. 31.
6. 39.
7. 43.
Pr. 3. 230.
5. 163.
6. 160.
7. 163.
8. 164.
117. G. 421.
Elem. XI.
Def. 1. G. §. 444.
3. 486.
4. 494.
6. 476.
8. 498.
9. 564.
11. 445.

Def. 12.

Def. 12. G. §. 472.
13. 456.
14. 470.
15. 470.
16. 470.
17. 470.
18. 467.
19. 467.
20. 468.
27. 475.
28. 475.
29. 475.
30. 462.
Pr. 1. 478.
2. 480. 481.
3. 482.
4. 484.
5. 491.
6. 492.
7. 483.
8. 492.
9. 495.
10. 496.

Pr. 11. G. §. 505.
12. 502.
13. 488.
14. 497.
15. 500.
16. 499.
17. 501.
18. 506.
19. 508.
21. 452.
28. 537.
29. 535.
30. 535.
31. 535.
32. 573.
33. 578.
34. 580.

Elem. XII.

Pr. 1. G. 408.
2. 408.
5. 573.
6. 573.
7. 543.

Pr. 8. G. §. 578.
9. 580.
10. 547.
11. 573.
12. 578.
14. 573.
15. 580.
18. 579.

Elem. XIII.

Pr. 8. An. 294.
9. 275.
10. 279.
12. 268.
13. 299.
14. 305.
15. 302.
16. 311. & ſeqq.
17. 308. & ſeqq.
18. 301. 304. 307. 310. 311.

FINIS INDICIS SECUNDI.

III.

INDEX AUTORUM,

Qui in Commentatione de præcipuis ſcriptis mathematicis recenſentur.

Notes velim Numerum Romanum Caput, ceteros vero §§. ejuſdem deſignare.

A.

ABalphatus Aſphahamenſis, III. 13.
Albategnius, IX. 2. 12.
Alberti, Andreas, VIII. 21.
de *Albertis*, Leo Baptiſta, XI.1.2.3.
Alexander, Dominicus Jacobus, VI.27.31.
Alhazen, VIII.2.3.31.
Alimarus, Dorotheus, X. 20.
Alingham, Wilhelmus, I. 8.
Alphonſus IX. IX. 25.
S. Andreas Hieroſolymitanus, X. 2.
Anonymi, VI. 26. VII. 8. IX. 2. 57. XI. 15. 26. 30. XIII. 17. 27.
Apollonius Pergæus, I. 1. 24. III. 11. 13. 25. 28. 29. IV. 1. VII. 14.
Aratus, X. 2.
Archimedes, I. 24. 34. III. 11. 12. 13. 29. VI. 1. VII. 1. 14.
Ardûſer, Joannes, III. 34.
des *Argues*, XI. 24.
Ariſtæus, III. 13. IV. 1.
Ariſtarchus Samius, I. 34. VII. 14.
Athenæus, I. 30.
Auzout, I. 31. 37.
BAchetus, Caſparus, IV. 2.
Bacon, Rogerius, VIII. 5.
Baker, Thomas, IV. 8.
Baldus, Bernhardinus, I. 30. XI. 1.
Balianus, Johannes Baptiſta, VI. 5. VII. 10.
Bara, J. VIII. 20.
Baratteri, Johannes Baptiſta, XI. 26.
Barlaamus Monachus, II. 5.
Barrowius, Iſaacus, III. 2. 11. 19. 29. IV. 8. 23. VIII. 14.
Bartholinus, Eraſmus, IV. 6.
Bartſchius, Jacobus, V. 10.
Bayerus, Johannes, IX. 35.
Johannes Hartmannus, II. 16.
Johannes Matthias, VI. 22.
de *Beaune*, Florimundus, IV. 6.
Bedford, Arturus, X. 6.
Beeren, Thomas Leonhardus, XII. 1.
Behr, Johannes Henricus, XIII. 25.
de *Belidor*, VII. 18. XII. 8. XIII. 34.
Berger, Chriſtianus Philippus, VI. 27. IX. 36.
Bernoulli, Daniel, VII. 12.
Jacobus, IV. 18. 21. IX. 39.
Johannes, IV. 14. 18. 19. 31. 33. 35. 36. X. 21.
Nicolaus, IV. 14. X. 21.
Beroaldus, Franciſcus, VI. 20.
Beſſon, Jacobus, VI. 20.

Beveregius, Guilielmus, X. 5.
Beyerus, Johannes Hartmannus, III. 31.
de *Beze*, I. 37.
Bierum, Henricus, X. 33.
de *Billy*, Jacobus, III. 26.
Bion, Joannes Theobaldus, I. 13.
Nicolaus, IX. 35. X. 35. 38.
de *Birac*, XIII. 37.
Biton, I. 30.
Blanchini, Franciſcus, IX. 8. 39. X. 7.
Bleau, Guilielmus, IX. 35. X. 39.
le *Blond*, XI. 9.
Blondel, Franciſcus, I. 37. X. 7. XI. 10. XII. 8. XIII. 427.
Bœckler, Georgius Andreas, VII. 16. XI. 5. XII. 7. XIII. 36.
Bœcklerus, Joannes, III. 31.
Boëthius, Anitius Manlius Severinus, II. 1.
Bombelle, XIII. 27.
Bombelli, Raphaël, IV. 3.
Bonannus, Philippus, VIII. 19.
Bone, Edmundus, III. 39.
Bonjour, Guilielmus, X. 7.
Borellus, Johannes Alphonſus, III. 13. VI. 3.
de *Borgsdorf*, Erneſtus Fridericus, XIII. 9.
Borromini, Franciſcus, XI. 19.
Boſe, Georgius Matthias, IX. 43.
Boſſe, Abrahamus, VIII. 20.
Boyle, Robertus, VII. 3.
Braikenridge, Guilielmus, IV. 37.
Branca, XI. 9.
Brand, Auguſtinus, XII. 6. 7.
Braunius, Erneſtus, XII. 1.
Bremond, I. 36.
Briennius, Manuel, I. 34.
Briggius, Henricus, V. 11.
Browne, Wilhelmus, VIII. 15.
Brunetti, Franciſcus Xaverius, IV. 39.
Buchnerus, Joannes Sigiſmundus, XII. 1.
de *Buffon*, IV. 27.
Bullet, XI. 29.
Bullialdus, Iſmaël, III. 23. IV. 17. V. 16. IX. 3. 18. 20. 28. 41.
Buonaroti, Michaël Angelus, XI. 7.
Byrgius, Juſtus, III. 39. IV. 38. V. 10. 14. IX. 2.

C.

Calviſius, Sethus, X. 3. 7.
de *Camus*, VI. 19.
Cantzlerus, Bernhardus, III. 32.
Capellus, Angelus, IX. 44.
Carré, IV. 20.
Carteſius, Renatus, IV. 6. 20. VIII. 7.
Caſatus, Paulus, VI. 2.
Caſſini, Johannes Dominicus, I. 37. IX. 6. 30. 53. X. 7. 24.
Jacobus, IX. 6. 30.
Caſtellus, Robertus, XI. 17.
Caſtronius, Benedictus Maria, X. 37.
Caſwellus, Johannes, I. 34.
Cataneo, Petrus, XI. 9.
Cavalerius, Bonaventura, III. 12. 24. IV. 17. V. 15.
Ceva, Joannes, VII. 9.
Thomas, I. 35.
Chamberus, Joannes, II. 5.
de *Chambray*, Roland Freard, XI. 9.
Chambers, E. I. 19.
Chamberus, Johannes, II. 5.
de *Champdoré*, Duræus, XI. 7.
Cherubim, VIII. 10.
Cheynæus, Georgius, IV. 22.
Chriſtmannus, Jacobus, X. 8.
Claramontius, Scipio, IX. 39.
Clarke, Joannes, IV. 39. VI. 16.
Samuel, VIII. 12.
Clavius, Chriſtophorus, I. 24. II. 12. III. 33. IX. 24. 38. X. 7. 9. 26.
du *Clos*, I. 37.
Coehorn, XII. 4. 7. 27. XIII. 6. 26. 27.
Coetſius, Henricus, X. 32.
Collins, Joannes, I. 34. IV. 34.
Colombonus, Angelus Maria, X. 38.
Colſon, Joannes, IV. 27.
Combachius, Johannes, VIII. 5.
Commandinus, Fridericus, III. 8. VII. 16.
Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ, I. 39.

Com-

Commentarii de Bononienſi Scientiarum & Artium Inſtituto atque Academia, I. 40.
Conradi, Johannes Michaël, VIII. 17.
Copernicus, Nicolaus, IX. 2. 13. 26. 39.
Cotes, Rogerus, IV. 30. VI. 13.
Crabtrius, Guilielmus, IX. 4.
Craige, Johannes, IV. 23.
de *Crouzas*, IV. 13. 19.
Cunitia, Maria, IX. 27.
Cunn, Samuel, II. 17. III. 39.
Curio, Jacobus, IX. 25.

D.

DAſypodius, Conradus, I. 15. III. 4.
Dechales, Claudius Franciſcus Milliet, I. 4. II. 12. III. 2. 29. V. 20. VI. 11. VII. 5. 15. X. 11. 14. XI. 23. XII. 1. XIII. 15.
Deidier, XIII. 27.
Demontioſius, Ludovicus, XI. 1.
Deran, Philippus, XI. 24.
Derham, Wilhelmus, VI. 26. IX. 39.
Deſaguliers, J. Theoph. VIII. 15.
Deſargues, VIII. 20.
Desgodetz, Antonius, XI. 13.
Detonvillæus, III. 14.
Dieuſſart, Carolus Philippus, XI. 9.
Dilichius, Wilhelmus, XIII. 15.
Diophantus Alexandrinus, I. 23. 27. IV. 2. 9.
Ditton, Henricus, VI. 15.
Humphredus, IV. 39.
Dodartus, I. 37.
Doegen, Matthias, XIII. 18.
Domckey, VI. 16.
Doppelmeyer, J. Gabriel, IX. 20. X. 31. 35.

E.

ECchellenſis Maronita, Abrahamus, III. 13.
Eiſenſchmid, Joannes Caſparus, V. 10.
Elrich, Daniel, XII. 1.
Eratoſthenes, IV. 1.
Errardus, XIII. 27.
Eslerus, Joannes, IX. 24.
Euclides, I. 1. 2. 4. 7. 23. 24. 29. 32. 34. II. 6. 4. III. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 10. IV. 1. VII. 14. VIII. 1. X. 15.
Eulerus, Leonhardus, VI. 18. VII. 12.
Euſtachius de Divinis, I. 35.
Eutocius, I. 34.

F.

FAber Stapulenſis, Jacobus, II. 3.
Fabry, Honoratus, IV. 37. VIII. 26.
Fâſch, Joannes Ludolphus, I. 22.
Faulhaber, Joannes, IV. 38. XIII. 30.
du *Fay*, Abbas, XIII. 5.
Fermatius, I. 31. IV. 8.
Feuillée, Franciſcus, X. 22.
Ludovicus, IX. 9.
Finæus, Orontius, III. 2.
Fiſcher ab Erlachen, Johannes Bernhardus, XI. 18.
Flamſtædius, Joannes, I. 34. IX. 7. 28. 33. 34.
von Flemming, Joannes Fridericus, XIII. 37.
Fluſſates Candalla, Franciſcus, III. 2.
de *Fontenelle*, Bernhardus, I. 37. IV. 33.
Fournier, Georgius, X. 14.
Frenicle de Beſſy, I. 31. 37.
Freytag, Adamus, XIII. 1.
Frezier, XI. 25.
Friſius, Gemma, II. 14.
Frontinus, *Sextus Julius*, VII. 13.

G.

GAlilæus Galilæi, III. 39. VI. 4. VIII. 6. IX. 39. 41.
Gallonus, IV. 25.
Gaubil, IX. 9.
Gauppe, Johannes, X. 33.
Gauricus, Lucas, IX. 10. XI. 1.
Gautier, Henricus, XI. 27.
Gaza, Theodorus, X. 2.
Gellibrand, Henricus, V. 12.
Gemma Friſius, II. 14.
Germanus, Georgius, I. 24.
Ghetaldus, Marinus, I. 1. IV. 6. 9. VII. 1.
Ghislerius, Antonius, IX. 56.
Girardus, Albertus, I. 23.
Glaſer, Johannes Chriſtophorus, XIII. 35.
Goldmann, Nicolaus, III. 39. XI. 11.

Gooden, Jacobus, V. 19.
Gordonius, Georgius, X. 18.
de *Gottignes*, Ægidius Franciſcus, IV. 15
Goulon, XIII. 31.
de *Graaf*, Abrahamus, I. 6. IV. 12.
Grandus, Guido, I. 35. III. 16.
s'Graveſand, G. J. IV. 12. VIII. 25.
Gray, Joannes, I. 36.
Gregorius à S. Vincentio, I. 35. III. 14.
Jacobus, IV. 22. VIII. 14. 15.
David, III. 2. IV. 22. VIII. 15. IX. 22. 40.
Griendel von Aach, Johannes Franciſcus, VIII. 19. XIII. 14. 21.
de *Grotte*, Alexander, XIII. 7.
Gruber, Bernhardus, X. 37. 38.
Sebaſtianus, XIII. 25.
Guarinus, X. 17.
Guiſnée, IV. 11.
Guldinus, Paulus, III. 18. IV. 8.
Gulielminus, Dominicus, I. 40. VII. 11. 15. XI. 26.

H.

Hadley, J. VIII. 15.
Halſpenny, Guilielmus, XI. 22.
Halley, Edmundus, III. 13. 28. IV. 12. IX. 3. 7.
du *Hamel*, Johannes Baptiſta, IX. 39.
Hanke, Johannes, IX. 43.
Hartmannus, XIII. 16.
Harriot, Thomas, IV. 5.
Harris, J. I. 18. IV. 6.
Harsdœrffer, Philippus, I. 42.
Hartſœker, Nicolaus, VIII. 9.
Haſius, Johannes Matthias, III. 37. XIII. 33.
Hauſen, Chriſtianus Auguſtus, III. 16.
Hawney, Wilhelmus, V. 18.
Hayes, Carolus, IV. 24.
Hazan, Iſaacus, IX. 25.
Heer, Chriſtophorus, XIII. 14. 30.
Heidenmann, Chriſtophorus, XIII. 14.
Heniſchius, Georgius, II. 10. IV. 3.
ab *Heberſtein*, Ferdinandus Erneſtus Comes, III. 26.
Herigonius, Petrus, I. 1. II. 12. III. 2. VIII. 1.
Herlinus, Chriſtianus, III. 4.
Ludovicus Andreas, XIII. 11.
Hermannus, Jacobus, IV. 33. VI. 17. VII. 11. 15.
Heron Alexandrinus, I. 30. VII. 16.
Hertel, Chriſtianus Gottlieb, VIII. 18.
Herward ab Hohenburg, Johannes Georgius, II. 18.
Hevelius, Johannes, XI. 3. 31. 35. 39.
Hipparchus, IX. 2. 32. X. 2.
de la *Hire*, Philippus, III. 14. 15. 33. IV. 11. VI. 10. VII. 19. IX. 6. 30. 43. 44. X. 28.
Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences, I. 37.
Hodgſon, Jacobus, X. 15.
Hooke, Robertus, VIII. 19. IX. 3.
Horoccius, Jeremias, IX. 4. 17. 39.
Horrebowius, Petrus, IX. 41. 50. 51. 54.
Hortenſius, Martinus, V. 6.
de l'*Hoſpital*, Marchio, IV. 11. 19. 20. 23. 39. VI. 12.
Hoſtus, I. 29.
Hugenius, Chriſtianus, I. 31. 35. III. 14. 20. 25. IV. 6. 14. VI. 5. 7. 8. 12. 24. VIII. 8. 13. 18. IX. 39. 48. X. 21.
Hulſius, Levinus, III. 39.
Hyde, Thomas, IX. 32.

I.

Jacquier, Franciſcus, VI. 16.
Intieri, Bartholomæus, IV. 37.
Joannes de Sacro Boſco, I. 24. IX. 24. X. 9.
Joannes Peccamus, VIII. 4.
Jones, Wilhelmus, IV. 21. 30. 32. 34.
Jordanus, II. 3.
Iſaacus Monachus, X. 2.
Julius Africanus, I. 30.
Jungenickel, Andreas, VI. 2.
Jurin, Jacobus, X. 12.

K.

Keill, Joannes, III. 8. IV. 34. 35. 36. VI. 9. 12. 23. X. 18.
Kepplerus, Joannes, III. 12. V. 10. VII. 3. VIII. 6. IX. 16. 17. 18. 27. 32. 39. 40. 55.
Kerſey, Joannes, IV. 9.

Kinck-

Kinckhuyſen, Gerhardus, IV. 12.
Kircherus, Athanaſius, I. 2. III. 40. VIII. 16.
Klimmius, Johannes Albertus, IX. 44.
Kolhans, Johannes Chriſtophorus, VIII. 17.
Kreſa, Jacobus, V. 22.

L.

de *Lagny*, I. 37.
Lalovera, Antonius, III. 26.
Lambion, Lambertus, XIII. 30.
Lamy, Bernhardus, III. 6. IV. 10. VI. 2. VII. 5. VIII. 21.
Landsbergius, J. H. XIII. 12.
Langhanſen, Chriſtophorus, IX. 43.
Langley, Batty, III. 36. XI. 29.
de *Lanis*, Franciſcus Tertius, VII. 4.
Lansbergius, Philippus, I. 26. V. 7. IX. 13. 16. 17. 28.
Lauterbach, Johannes Balthaſar, XI. 14.
van Leeuwenhoek, Antonius, VIII. 19.
Leibnitius, Godofredus Guilielmus, I. 11. 12. 21. 34. II. 15. IV. 10. 20. 22. 23. 31. 33. 34. 35. IX. 16.
Leotaudus, Vincentius, II. 12.
Leupoldus, Jacobus, VI. 10. VII. 19.
Leutmannus, Joannes Georgius, IV. 26. VIII. 18.
Leyborn, Wilhelmus, I. 5.
Liebknecht, J. G. X. 13.
Limpergh, Petrus, VI. 33.
Longomontanus, Chriſtianus Severinus, IV. 14. 16. 27.
Lorenzini, Laurentius, III. 22.
Lorinus, Bonajutus, XIII. 19.
de *Lorme*, Philibertus, XI. 24.
Lowthorp, Joannes, I. 36.
Lucas Paciolus de Burgo S. Sepulchri, II. 6. IV. 3.
Ludovicus, Ferrarienſis, IV. 3.
Ludolphus à Ceulen, III. 21.

M.

Mac Laurin, Colinus, IV. 37.
Maffejus, Scipio, XI. 17.
Maginus, Joannes Antonius, IX. 55.
le *Maître*, Alexander Chriſtianus, XIII. 20.
de *Maleſieux*, III. 6.
Mallet, Allain Maneſſon, III. 30. XIII. 28.
Manfredi, Euſtachius, I. 40. IX. 52. 53. 56. X. 7.
Gabriel, I. 40. IV. 20.
Maphæus, Thomas Pius, X. 7.
Maraldus, IX. 6.
de *Marchettis*, Angelus, III. 7. 27.
Marinonius, Joannes Jacobus, VIII. 13.
Mariottus, I. 31. VI. 11. VII. 2. 10. 19. VIII. 13.
Marolois, XIII. 27.
de *Martino*, Nicolaus, III. 16.
Martius, Georgius Conradus, XIII. 25.
Maurolycus, Franciſcus, I. 32. II. 9. VII. 14.
de *Maupertuis*, IX. 25. 39.
S. *Maximus* Martyr, X. 2.
de *Medrano*, Don Sebaſtian Fernandez, XIII. 24.
Megerlinus, Petrus, IX. 41.
Melder, Gerhardus, XIII. 1.
Menechmus, IV. 8.
Menelaus, VII. 14.
Mercator, Nicolaus, I. 5. IV. 21. IX. 23. 27.
Merſennus, Marinus, I. 31. 37. VII. 14.
Metius, Adrianus, II. 14. III. 34. X. 39.
Meyer, Cornelius, XI. 26.
Mezzavacca, IX. 56.
Michaëlis, Georgius, X. 32.
Mieth, Michael, XII. 2.
Milnes, Jacobus, III. 14.
Miſcellanea Berolinenſia, I. 38.
Mœſtlinus, Michaël, IX. 2. 24.
de *Moivre*, Abrahamus, IV. 14. 29.
Molerus, Elias, IX. 43.
Molyneux, Wilhelmus, VIII. 8.
de *Monmort*, Remundus, IV. 14.
Moore, Jonas, I. 3.
Morinus, Johannes Baptiſta, IX. 27. 58.
Morlandus, Samuel, II. 15.
Motte, Benjaminus, I. 36.
Muet, XI. 15.
Müller, Johannes Ulricus, X. 32.
Münſterus, Sebaſtianus, X. 8. 29.
Muhammedes, Tixinus, IX. 32.
van *Muſſchenbroek*, Petrus, X. 23.

Mydorgius, Claudius, III.14.VII.14.

N.

N*Eperus*, Joannes, II.18.V.8.14.
Neubauer, Chriſtianus, XIII.8.
Newton, Joannes, V.13.IX.20.28.
Newton, Iſaacus, I.34.IV.12.16.18.20.21.22.23.26.27.30.35.VI.13.VII.6.11.VIII.12.15.IX.16.40.X.6.
Niceron, Joannes Franciſcus, VIII.22.
Nicomachus, II.1.6.
Nieuwentyt, Bernhardus, IV.33.
Noël, Franciſcus, IX.9.22.
Norwood, Richardus, V.17.

O.

de O*Merique*, Hugo, IV.16.
Ori, Rabbi, X.8.
Origanus, David, IX.55.
de l'*Orme*, Philibertus, XI.2.6.
Oſwaldus, Eraſmus, IX.10.
Otho, L. Valentinus, V.4.
Oughtredus, Guilielmus, I.27.IV.4.V.16.VI.2.26.VII.1.
Ozanam, I.7.17.33.43.III.15.39.33.IV.10.11.V.20.21.XIII.24.

P.

de P*Agan*, Comes, III.23.IX.19.28.XIII.2.17.27.
Palladius, Andreas, XI.4.5.9.10.
Palma, Johannes Baptiſta, III.26.
Pappus Alexandrinus, I.34.III.13.17.28.29.IV.1.VI.1.VII.14.
Pardies, Ignatius Gaſton, III.6.VI.2.11.X.36.
Parent, VI.11.
Paſcal, III.14.IV.14.
Paſchalius, Julius, VI.20.
Patoun, Archibaldus, X.17.
Peletarius, Jacobus, III.2.
Pemberton, Henricus, IV.16.27.30.
Pena, Joannes, VIII.1.6.
Perrault, I.37.VI.3.6.24.XI.2.
Petavius, Dionyſius, X.2.5.
Philander, Guilielmus, XI.1.
Philo, I.30.
Philoſophical Tranſactions, I.36.
Picardus, I.31.VII.10.19.X.24.28.
Pitiſcus, Bartholomæus, V.3.5.
Pitot, X.21.
Polenus, Joannes, II.15.VII.13.IX.40.
Polynier, Petrus, III.7.
Porphyrius, I.34.
Porta, Joannes Baptiſta, VIII.6.
Portius, Lucas Antonius, VII.16.
Poſt, Petrus, XI.16.
Preſtet, Joannes, IV.9.10.
Pſellus, II.2.
Ptolomæus, Claudius, I.34.V.1.IX.2.10.11.32.58.X.9.
Purbachius, Georgius, V.7.IX.2.11.24.25.
Puzzo, Andreas, VIII.24.

Q.

Q*Uadrus*, Joannes Ludovicus, X.38.
Quartaironius, Dominicus, X.7.

R.

R*Abuel*, Claudius, IV.7.
de *Ramellis*, Auguſtinus, VI.2.
Ramus, Petrus, III.5.VII.14.
Ranzovius, Henricus, IX.58.
Raphſon, Joſephus, IV.12.35.
de *Rees*, K. F. II.14.
Regiomontanus, Joannes, V.2.14.IX.2.11.24.25.
Reidius, I.36.
Reinholdus, Eraſmus, III.38.IX.26.
Rembold, Johannes Chriſtophorus, VIII.23.
Renau, X.21.
Reyherus, Samuel, II.18.
Reyneau, Carolus, IV.25.
Rheticus, Georgius Joachimus, V.3.IX.39.
Rhodius, Ambroſius, VIII.4.
Riccatus, Jacobus, I.40.
Ricciolus, Johannes Baptiſta, IX.5.22.28.32.39.X.4.10.11.
Riccius, Michaël Angelus, IV.21.
Richardus, Claudius, III.13.
Richerus, I.37.
Rimpler, Georgius, XIII.10.& ſeqq.
Riſnerus, Fridericus, VIII.2.3.
Rivius, Gualterus H. XI.2.
Rizettus, Joannes, I.40.

Robervallius, Ægidius Perſonerus, I. 31. 37. IV. 8.
Robins, Benjamin, VII. 12.
Rœmerus, Olaus, I. 37. VII. 10. IX. 50. 51. 54.
Rohault, Jacobus, VI. 2.
Rolle, IV. 13.
Romanus, Adrianus, I. 25.
Ronayne, IV. 32.
Rondelii, Geminianus, V. 15.
Roſetti, Donatus, XIII. 7. 20.
de *Roſſi*, Dominicus, XI. 12.
Roſtius, Joannes Ludovicus, IX. 45.
Rothmannus. Chriſtophorus, IX 2.
Rozard, XIII. 23.
Rudolphus, Chriſtophorus, IV. 3.
Ruggieri, Ferdinandus, XI. 20.
de *Ruſenſtein*, Henricus Ruſius Baro, XIII. 3.

S.

SAccherius, Hieronymus, III. 9.
de *Saint Julien*, Chevalier, XII. 5. 7. XIII. 24. 27.
Salmaſius, Claudius, XI. 1.
Santini, Vincentius, III. 16.
Sardius, XIII. 27.
Scaliger, Joſephus, I. 24. X. 1.
Scamozzi, Vincentius, XI. 8. 9.
Scarlet, Eduardus, VIII. 15.
Scheffelt, Michaël, III. 39.
Scheinerus, Chriſtophorus, VIII. 11. IX. 39.
Scheiter, Joannes Bernhardus, XIII. 8. 27.
Scheubelius, Joannes, III. 3.
Scheubler, Joannes Jacobus, X. 34.
Schickardus, Wilhelmus, IX. 2. 35.
Schildknecht, Wendelinus, XIII. 16.
Schmidius, Joannes Andreas, III. 6.
Schonerus, Joannes, III. 5. V. 2. IX. 25. 35. 37. 46. 58.
Andreas, IX. 46.
à *Schooten*, Franciſcus, III. 25. IV. 6. 7. 14.
Schottus, Caſparus, I. 2. 41. II. 12. III. 40. VI. 28. 29. VII. 16. IX. 48.
Schreckenfuchſius, Eraſmus Oſwaldus, IX. 24.
Schvventerus, Daniel, I. 42. III. 31.
Schyrlæus de Rheita, Antonius Maria, IX. 42.
Scipio Ferreus, IV. 3.
Serenus, III. 13.
Sererius, Joſephus, I. 13. 20.
Serlius, Sebaſtianus, XI. 4.
le *Seur*, Thomas, VI. 16.
Seyler, Joannes Chriſtianus, XI. 9.
Sharpius, Abrahamus, III. 35. IX 7.
Simienovvitz, Caſimirus, XII. 1.
Sluſius, Renatus, IV. 8.
Smith, Jabobus, XI. 1. 3.
Robertus, IV. 30. VIII. 26.
Snellius, Willebrordus, I. 1. III. 21. V. 6. VIII. 7. IX. 2. 19. 23.
Speckle, Daniel, XIII. 12.
Stadius, Joannes, IX. 55.
Stengel, Johannes Peterſon, X. 32.
Stephanus de Angelis, III. 24.
Stevinus, Simon, I. 23. VI. 2. 3. VII. 14.
Stifelius, Michaël, II. 7. IV. 3. V. 14.
Stirling, Jacobus, IV. 26. 28.
Stone, Edmondus, IV. 19.
Strada, Jacobus, VI. 20. XI. 4.
Strauchius, Ægidius, IX. 35. X. 5.
Streete, Carolns, IX. 28.
Thomas, IX. 20.
Sturmius, Joannes Chriſtophorus, I. 9. III. 11. X. 30. XIII. 22.
Sturmius, Leonhardus Chriſtophorus, I. 10. III. 38. VII. 19. X. 13. XI. 7. 11. 21. XIII. 5. 10. 27.
Sully, Henricus, VI. 27.
Surirey de St. Remy, XII. 3.
Sutherland, Wilhelmus, XI. 28.
Süttinger, Daniel, XIII. 10.
Swizer, Stephanus, VII. 16.

T.

TAcquet, Andreas, I. 28. II. 11. III. 2. 11. 33. VIII. 14. IX. 15. 38.
Tartaglia, Nicolaus, II. 8. III. 2.
Tatius, Achilles, X. 2.
Taylor, Jacobus, I. 8.
Brook, IV. 31.
Teyler, Joannes, XIII. 33.

Theo-

Theodoſius, I. 1. 4. 24. III. 11. 29. VII. 14.
Torricellius, Evangeliſta, I. 31. 37. III. 12. VI. 5.
Traberus, Zacharias, VIII. 16.
Trapezuntinus, Georgius, IX. 16.
Trevigar, L. IV. 39.
Trevv, Abdias, III. 32.
de *Tſchirnhauſen*, Ehrenfried Waltherus, IV. 12.
Tycho de Brahe, IX. 2. 27. 32. 47.

V.

V*Alck*, Gerardus, IX. 37.
Varcinus, Amatus, I. 4.
Varenius, Bernhardus, X. 12.
Varignonius, IV. 19. VI. 3. 4. 14. VII. 11.
de *Vauban*, Comes, XIII. 5. 17. 23. 26. 27. 32.
Ubaldus, Guidus, VI. 2. VII. 14.
de la Vergne, Jacobus, XIII. 21.
Veteranus, Simon Laurentius, I. 28.
Victoria, X. 2.
Vieta, Franciſcus, I. 1. 24. 25. IV. 4. 9. X. 7.
Vignola, Jacobus Barozzius, XI. 7. 9. 10.
de *Ville*, Antonius, XIII. 17. 27.
Villemot, Philippus, IX. 16.
Vingboon, Philippus, XI. 16.
Virdungus, Joannes, IX. 25.
Vitalis, Hieronymus, I. 16.
Vitellio, I. 31. VIII. 3.
Vitruvius, XI. 1. 10.
Viviani, Vincentius, I. 33. III. 13. 22. 26.
Vlacq, Adrianus, V. 11. 21.
Ulugh Beigh, IX. 32.
Vogel, Johannes, XI. 23.
Voigtel, Nicolaus, III. 38.
Urſinus, Benjamin, V. 9.
Uttenhoeffer, Caſparus, X. 34.

W.

W*Aller*, Richardus, X. 24.
Walliſius, Joannes, I. 34. II. 12. IV. 17. 18. VI. 7. 8. VII. 5.
Waltherus, Bernhardus, IX. 2. 25.
Wardus, Joannes, X. 18.
Sethus, V. 16. IX. 18. 19. 20.
Warnerus, Waltherus, IV. 5.
Weidlerus, Joannes Fridericus, III. 38.
Weigelius, Erhardus, X. 7. 10.
Weinig, Joannes Chriſtophorus, VII. 2.
Wells, Eduardus, II. 12.
Welperus, Eberhardus, X. 29. 30.
Wernerus, Joannes, IX. 2. 25.
Wertmüller, Johannes Jacobus, XIII. 29.
Whiſton, Guilielmus, III. 2. IV. 12. IX. 23. 28.
Wideburgius, Joannes Bernhardus, IX. 43.
Wilhelm, Joannes, XI. 23.
Wilhelmus, Landgravius Haſſiæ, IX. 2.
Willichius, Jodocus, II. 2.
Wilſon, Henricus, III. 33. V. 16. X. 16.
Wing, Vincentius, IX. 2. 20.
de *Witt*, Joannes, IV. 6. IX. 38.
Wolfius, Chriſtianus, I. 11. II. 13. III. 10. VII. 7.
Jeremias, XI. 21.
Wormbſer, David, XIII. 19.
Wotton, Henricus, XI. 1.
Wren, Chriſtophorus, VI. 7.
Wurſtiſius, Chriſtianus, IX. 24.
a *Wurtzelbauer*, Joannes Philippus, IX. 49.

X.

X*Ylander*, Guilielmus, II. 2. IV. 2. 3.

Z.

Z*Ahn*, Joannes, VIII. 16.
Zanottus, Franciſcus Maria, I. 40.
a *Zeſen*, Philippus, XIII. 28.
Zimmermann, Joannes Jacobus, IX. 29. 41. 43.
Zumbach de Kœsfeld, Lotharius, IX. 36.
van Zyl, Joannes, IV. 23.

FINIS INDICIS TERTII.

IV. IN-

IV.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO I.

CONTENTORUM.

Notes velim, literam *c.* Commentationem de methodo mathematica, *a.* Arithmeticam, *g.* Geometriam, *t.* Trigonometriam planam, *f.* Analyſin finitorum, *i.* Analyſin infinitorum; & numeros §§. deſignare: ubi vero nulla numeris adſcribitur litera, eos referri ad proxime præcedentem.

A.

Abaci Pythagorici conſtructio, *a.* 109. neceſſitas, 110.

Abſciſſa, *f.* 37.

Additio. Definitio, *a.* 61. quomodo abſolvatur, 96. 98. in numeris concretis, 99. examen, 101. 107. hujus fundamentum, 103. ſignum, 63. quomodo addiſcatur, 97.

Additio iterata ejuſdem numeri quid ſit, *a.* 62.

Æqualitas. Definitio, *a.* 15. ſignum, 18. 19. unde colligatur, 87. 88. 91. 93. 94. 175. 176. 177.

Æqualitas angulorum unde colligatur, *g.* 167.

Æquatio. Definitio, *f.* 133. natura explicata, 329. reductio per analogias, 259. 266. 268. 289. transformatio in aliam, 354. in locales reſolutio, 620.

Æquatio algebraica quænam dicatur, *f.* 378.

Æquatio biquadratica quomodo conſtruatur, 616. *& ſeqq.* 622. quomodo reſolvatur, 362. quomodo ad cubicam reducatur, 361.

Æquatio Circulorum ſuperiorum generalis, 517.

Æquatio Ciſſoidis, 548.

Conchoidis, 538.

Æquatio cubica. Definitio, 139. quomodo reſolvatur, 358. quomodo conſtruatur, 607. *& ſeqq.* 622.

Æquatio Ellipſis, 420. 431. 432. 454.

evolutæ quomodo inveniatur, *i.* 321.

exponentialis. Definitio, 270.

Æquatio hyperbolæ reſpectu axis, *f.* 459. *& ſeqq.* 534. intra aſymptotos, 488. 490. reſpectu diametri, 500. 501.

Æquatio hyperbolarum infinitarum, *f.* 425.
Æquatio parabolæ externæ, 419. internæ reſpectu axis, 388. reſpectu diametri, 416.
Æquatio parabolarum infinitarum, 519.
Æquatio ſimplex. Definitio, 138. conſtructio geometrica, 252.
Æquatio quadratica. Definitio, 139. conſtructio geometrica, 253. reductio ad inventionem linearum reciprocarum, 263. 265.
Æquationum ſuperiorum conſtructio geometrica, 605. *& ſeqq.*
Æquemultiplicium proportio, *a.* 219.
ex *Æquo proportionalia*, 194. 198.
Aggregatum. Definitio, 61.
Algebra. Definitio, *f.* 132. applicatio ad problemata arithmetica determinata, 144. *& ſeqq.* indeterminata, 223. *& ſeqq.* ad Geometriam elementarem, 250. *& ſeqq.* ſublimiorem, 367. *& ſeqq.* Trigonometriam planam, 316.
Alternatio rationum, *a.* 173.
Altitudo figuræ. Definitio, *g.* 115. qualis linea ſit, 227.
Altitudo oblongi, 229.
quadrati, 229.
Altitudo trianguli quomodo inveniatur, 394. quomodo ex lateribus computetur, 287.
Altitudo trianguli rectanguli, 228.
Altitudines, quomodo metiamur, *g.* 284. *& ſeqq.* *t.* 75. 83.
Anagrammata omnia poſſibilia detegendi modus, *f.* 131.
Analyſis mathematica. Definitio, *f.* 1.
Analyſeos perfectæ exemplum, *a.* 84. 85.
Angulus. Definitio, *g.* 54. quomodo denominetur, 55. deſcribatur, 155. alteri æqualis conſtruatur, 208. metiendi modus, 152. biſectio 209. 269. 270. triſectio, *f.* 629. quantitas a cruribus independens, *g.* 140. quomodo hæc æſtimetur, 58. 59.
Anguli quomodo diſtinguantur, *g.* 58.
quomodo in figura rectilinea per calculum eruantur, *t.* 54.
Angulorum æqualitas unde colligatur, *g.* 141. 142.
Angulorum æqualium quales ſint menſuræ, *ibid.*
Angulorum circa idem punctum conſtitutorum ratio ad rectum, 159. 160.
Angulorum congruentia, 166.
ſimilium ratio, 174.
Angulus acutus. Definitio, *g.* 66. relatio ad rectum, 146.
Anguli alterni. Definitio, *g.* 68. ratio intra parallelas, 233.
Anguli contigui. Definitio, *g.* 60.
Angulus contactus. Definitio, 76. qualis ſit, 305. 306.
Angulus deinceps poſitus. Definitio, 62. qualis ſit, 63. 64. quando in campo eum metiri teneamur, 150. 151.
Angulorum deinceps poſitorum ratio ad rectum, 147. quot iidem ſint graduum, 148.
Angulus ad centrum. Definitio, *g.* 72. qualis ſit, 73. ratio ad angulum ad peripheriam, 313.
Angulus extra centrum. Definitio, 74. 75. menſura, 315.
Anguli homologii. Definitio, *g.* 110.
Angulus obliquus. Definitio, 66.
Angulus obtuſus. Definitio, 66. relatio ad rectum, 146.
Angulorum obtuſorum ſinus, *t.* 6.
Anguli oppoſiti. Definitio, *g.* 69.
oppoſitus externus, ibid.
internus, ibid.
Angulus ad peripheriam. Definitio, *g.* 70. Menſura, 314.
Anguli ad peripheriam quando æquales, 315.
Angulorum in polygono ſumma quomodo inveniatur, 343.
Angulorum in polygono regulari quantitates, 345. quomodo inveniantur, 344. 349.
Angulus ſegmenti. Definitio, *g.* 77.
Anguli majoris ſegmenti menſura, 323.

Anguli minoris ſegmenti menſura, *g.* 322.
Angulus in ſegmento. Definitio, *g.* 70.
Angulus in majore ſegmento qualis, 318. ratio ad angulum majoris ſegmenti, 323.
Angulus in minore ſegmento qualis, 319. ratio ad angulum minoris ſegmenti, 323.
Angulus in ſemicirculo qualis, 317.
Angulus rectus. Definitio, *g.* 65. menſura qualis, 143. 144.
Anguli recti quando æquales, 145.
Angulus ſolidus. Definitio, 445. 448. proprietates, 446. *& ſeqq.* æqualitas, 449. ſimilitudo, 451. magnitudo, 452.
Anguli verticales. Definitio, *g.* 67. ratio ad ſe invicem, 156.
Annuli area quomodo inveniatur, 433.
Antecedens rationis, *a.* 126.
Antilogarithmus, *t.* 31.
Arcus. Definitio, *g.* 41. quomodo biſecetur, 293. perficiatur, 295. triſecetur, *f.* 629. per datum numerum multiplicetur, 326. in communi menſura per calculum inveniatur, *t.* 49.
Arearum ichnographiæ quomodo perficiendæ, *g.* 363. *& ſeqq.*
Areæ curvæ elementum, *i.* 99.
Arithmetica. Definitio, *a.* 1.
Arithmetica practica. Definitio, *a.* 1. an ſit methodus inveniendi, 2.
Arithmetica infinitorum. Definitio, *i.* 333. uſus in Geometria, 348. *& ſeqq.*
Arithmetica irrationalium. f. 59. *& ſeqq.*
Arithmetica ſpecioſa. Definitio, *f.* 2.
Arithmetice proportionalia. Definitio, *a.* 323. proprietates, 324. *& ſeqq.*
Artis characteriſticæ præſtantia, *a.* 52.
Artis inveniendi regulæ ab Algorithmo abſtractæ, *a.* 125.
Aſymptotus Ciſſoidis, *f.* 549.
Conchoidis, 537.
Aſymptoti Hyperbolæ. Definitio, 474.
Aſymptoti curvarum algebraicarum quomodo determinentur, *t.* 46.
Atramentum in Geometria practica quale commendandum, *g.* 164.
Axioma. Definitio, *c.* 30. quænam propoſitiones in hunc numerum referantur, 31. abuſus circa ea vitandus, 32. quomodo numerus minuatur, 33. quænam cum axiomatis confundantur, 34.
Axiomata mathematica, *a.* 81.
Axis conjugatus. Definitio, *f.* 461.
Axis ſphæræ, *g.* 470.
Axis tranſverſus. Definitio, *f.* 459.

B.

BAculi quomodo in linea recta terræ infigantur, *g.* 125.
Baſis figuræ. Definitio, 112. 113.
Binomium quomodo ad dignitatem quamcunque evehendum, *f.* 95. *& ſeqq.*
Biquadratum. Definitio, *a.* 252.

C.

CAlculus differentialis. Definitio, *i.* 1. regulæ, 10. *& ſeqq.* uſus in determinandis tangentibus, 20. *& ſeqq.* in determinandis maximis & minimis, 61. *& ſeqq.*
Calculus differentio-differentialis. Definitio, *i.* 293. uſus in determinandis evolutis curvarum & radio oſculi, 313. *& ſeqq.* item puncto flexus contrarii, 301. *& ſeqq.*
Calculus exponentialis. Definitio, *i.* 263. regulæ, 266. 267. uſus, 271. *& ſeqq.*
Calculus integralis. Definitio, *i.* 91. uſus in quadrandis curvis, 97. *& ſeqq.* in rectificatione curvarum, 143. *& ſeqq.* in cubandis ſolidis, 196. *& ſeqq.* in doctrina Logarithmorum, 255. in methodo tangentium inverſa, 72. *& ſeqq.*
Calculus literalis in integris, *f.* 27. *& ſeqq.* in fractis, 41. *& ſeqq.* pro potentiis, 54. *& ſeqq.* uſus in inveniendis theorematis, 72. *& ſeqq.*
Calculus potentiarum, *f.* 54. *& ſeqq.*
Calculus ſummatorius. Definitio, *i.* 91.
Calculi univerſalis idea, *a.* 95.
Cathetus. Definitio, *g.* 96.
Centrum. Definitio, *g.* 37.
Centrum Hyperbolæ. Definitio, *f.* 461.

Centrum ſphæræ, *g.* 470.
Chorda. Definitio, *g.* 38. quænam maxima, 299. quomodo ex arcu inveniatur, 171. quomodo ex alia Chorda data, *i.* 184.
Chordarum proprietates, *f.* 310. & *ſeqq.* relatio ad ſe invicem, *g.* 301. in circulo ductarum proprietates & ſymptomata, 289. 290. 291. 292. 298. 312. ſe mutuo ſecantium proprietates, 334. 381.
Chorda arcus dimidii quomodo inveniatur, *g.* 423.
Chordæ arcuum multiplorum quomodo inveniantur, *f.* 326.
Circinus qualis eſſe debeat, *g.* 133.
Circulus. Definitio, *g.* 37. deſcriptio, 131. 132. 294. per quæ determinetur, 294. quando alterum ſecet, 197.
Circuli ad triangulum ſibi æquale reductio, *g.* 410. ſubtangens, *i.* 23. ſubnormalis quomodo determinetur, 38. rectificatio, 153. 157. 158. quadratura, 124. area quomodo inveniatur, *g.* 429. & *ſeqq.*
Circulo quomodo quadratum circumſcribatur, *g.* 351. quomodo polygonum regulare, 335.
Circuli concentrici. Definitio, *g.* 44. ſymptomata, 137.
Circuli eccentrici. Definitio, *g.* 44. quinam ſint, 49. 287. 288.
Circuli ſe extus tangentes quales ſint, *g.* 49.
Circuli ſe intus tangentes quales ſint, 287.
Circuli ſe mutuo ſecantes quales ſint, 288.
Circuli ſuperiorum generum. Definitio, *f.* 516. æquatio, 517.
Circulorum æqualitas unde colligatur, *g.* 171.
Circulorum congruentia unde colligatur, *g.* 164. 296.
Circulorum ratio ad ſe invicem, 409. 412.
Circulorum ſectio, 203.
ſymptomata, 287. & *ſeqq.*
Circulorum infinitorum maxima applicata, *i.* 65. ſubtangens, 24. ſubnormalis, 39.
Ciſſois DIOCLIS. Definitio, *f.* 544. æquatio, 548. genus, 550. proprietates, 545. & *ſeqq.* ſubtangens, *i.* 31. ſubnormalis, 43. quadratura, 133.
Citationum uſus in demonſtrando, *c.* 44.
Combinationes omnes poſſibiles quomodo inveniantur, *f.* 220.
Combinationum numerus quomodo inveniatur, 219.
Commenſurabilia. Definitio, *a.* 31. quænam ſint, 160. ratio ad ſe invicem, 163. 164. rationis exponens, 166.
Communicantia irrationalia, *f.* 63.
Complementum ad totum quid dicatur, *a.* 9.
Compoſitio rationum, 190.
Compræſentia quid ſignificet, 27.
Conchilis, *f.* 535.
Conchois NICOMEDIS *prima* & *ſecunda.* Definitio, *f.* 535. æquatio, 538. proprietates, 536. 537. punctum flexus contrarii, *i.* 310. quadratura, 138. ſubtangens, 49. ſubnormalis, 49.
Conchoidum ſpecies, *f.* 540. 543.
Conchoides infinitæ, 541.
Congruentia. Definitio, *g.* 3. quid ſit, 161.
Congruentia angulorum, 166. linearum, 163. magnitudinum, 162.
Conoides parabolicum quomodo cubetur, *i.* 202. 214. 352. quomodo ſuperficies ejus complanetur, 223.
Conoidis hyperbolici cubatio, *i.* 208. 209.
Conus. Definitio, *g.* 467. proprietas, 468. conſtructio, 523. ad priſma reductio, 547. quomodo ſoliditas inveniatur & ſuperficies, *g.* 548. *i.* 199. 220. 351. quomodo ſuperficies ad triangulum, *g.* 519. ad ſectorem reducatur, 520.
Conus rectus. Definitio, *g.* 467.
ſcalenus. Definitio, *g.* ibid.
Coni truncati conſtructio, 524. ſoliditas & ſuperficies computanda, 549.
Coni ſuperiorum generum. Definitio, *f.* 527.
Conorum æqualitas unde colligatur, *g.* 542. ratio ad ſe invicem, 572. & *ſeqq.*

Cono-

Conorum æqualium proprietas, *g.* 580. quinam maximam ſuperficiem habeat, *i.* 87.
Conorum ſimilium ratio, 570. 578.
Conſequens rationis terminus, *a.* 126.
Contraharmonice proportionalium inventio, *f.* 194. 195.
Convergentia linearum. Definitio, *g.* 83. proprietas, 262.
Converſio rationum, *a.* 193.
Corollarium. Definitio, *c.* 49. quando demonſtratione indigeat, 50.
Corpora Platonica, *g.* 454.
Corpus. Definitio, *g.* 444. quomodo conſtruatur, 529. quomodo ſoliditas inveniatur, 559.
Corporis cavi ſoliditas quomodo inveniatur, *g.* 563.
Corpus irregulare. Definitio, 453. quomodo ſoliditas inveniatur, 559. 561.
Corpus regulare. Definitio, 453. proprietas, 455. quomodo ſoliditas ac ſuperficies inveniatur, 558. *& ſeqq.* quomodo hæc corpora conſtruantur, 525. *& ſeqq.* quot eorum ſint, 530.
Corporum ſimilium proprietates, *g.* 565. *& ſeqq.* ratio inter ſe, 578. *f.* 128.
Coſecans. Definitio, *t.* 11.
Coſinus Definitio, *t.* 11. quomodo inveniatur, 16. angulorum multiplorum quomodo inveniatur, *f.* 325.
Cotangens. Definitio, *t.* 11.
Crus anguli. Definitio, *g.* 54.
Cubatio ſolidorum rotatione genitorum, *i.* 197.
Cubus, *cubicus numerus.* Definitio, *a.* 248. logarithmus qualis, 339. quomodo in progreſſionem arithmeticam reſolvatur, *f.* 171.
Cubicorum numerorum in ſerie naturali progredientium differentiæ, *f.* 84. ſummatio, 200.
Cubocubus, *a.* 252.
Cubus cubi, ibid.
Cubocubocubus, ibid.
Cubus, ſolidum. Definitio, *g.* 459. proprietates, *g.* 460. 461. quale corpus, 530. conſtructio, 513. quomodo ſuperficies & ſoliditas inveniatur, 531. 532. quomodo dato corpori æqualis inveniatur, 576. parallelepipedo æqualis conſtruatur, *f.* 628.
Cubi duplicatio, *f.* 625.
Cuborum ratio inter ſe qualis, *g.* 534.
Cubi diametri ad ſphæram ratio, 552.
Curva. Definitio, *g.* 22. quadratura, *i.* 100. *& ſeqq.*
Curva algebraica. Definitio, *f.* 377. diviſio, 381. 382. quomodo natura inveſtigetur, 579. *& ſeqq.* puncta quotcunque inveniantur, 631.
Curvarum algebraicarum æquatio generalis, *f.* 385. ſubtangens, *i.* 32.
Curva primi, *ſecundi*, *tertii* &c. *generis.* Definitio, *f.* 381.
Curva ex evolutione deſcripta, *i.* 313.
Curva exponentialis. Definitio, *i.* 269. conſtructio, 268. quadratura, 285. ſubtangens, 271. *& ſeqq.* ſubnormalis quomodo inveniatur, 283.
Curva mechanica. Definitio, *f.* 381.
Curva normalis conſtantis, *i.* 235.
ſubnormalis conſtantis, 227.
ſubtangentis conſtantis, 242.
tangentis conſtantis, 250.
Curva tranſcendens. Definitio, *f.* 380.
Cyclois. Definitio, *f.* 573. proprietates, 574. *& ſeqq.* quadratura, *i.* 131. 132. 182. rectificatio, 168. ſubtangens, 52. circulus eam oſculans, 328. ſui evolutione ſeipſam deſcribit, 330.
Cyclois punctum flexus contrarii habens, 304.
Cylindrus. Definitio, *g.* 465. conſtructio, 518. quomodo ſuperficies & ſoliditas inveniatur, 541. ſuperficiei ad parallelogrammum reductio, 516.
Cylindrorum æqualitas unde colligatur, 535. ratio inter ſe, 572. *& ſeqq.*
Cylindrorum æqualium proprietas, 580.
ſimilium ratio, 570. 578.

Cylindrus rectus, *g.* 465.
ſcalenus, 465.

D.

D*Ecagoni regularis* circulo inſcribendi latus quomodo inveniatur, *f.* 275.
Definitio quid ſit, *c.* 13. quomodo dividatur, 16. quotuplici modo conſideretur, 30.
Definitiones ſuperfluæ num dentur in Matheſi, 56.
Definitio nominalis quænam ſit, *c.* 17. quomodo ad eam perveniatur, 19. & *ſeqq.* quomodo realitas demonſtretur, 23. 24.
Definitio realis quænam ſit, 18. quomodo inveniatur, 25. & *ſeqq.* quomodo poſſibilitas demonſtretur, 29.
Demonſtratio quam habere debeat formam, *c.* 46. 47. quænam circa eam obſervanda, 39. & *ſeqq.*
Demonſtrationes quomodo tyronibus facilitentur, *g.* 158. num ſuperfluæ dentur in Matheſi, *c.* 56.
Denominator rationis. Definitio, *a.* 36. *f.* 113. num. 117. & quando cum exponente idem, 115.
Determinari eodem modo quænam dicantur, *g.* 119.
Diagonalis. Definitio, *g.* 111. in quadrato quomodo ſe habeat ad latus, 421. in polygono quocunque quomodo omnis inveniatur per calculum, *t.* 51. 53.
Diameter circuli. Definitio, *g.* 39. quomodo circulum dividat, 135. quomodo inveniatur, 328. 434. quam rationem ad peripheriam habeat, 413. 414. quomodo inveniatur, 425. quanta ſit, 426. 427.
Diameter curvæ. Definitio, *f.* 368. quomodo in Parabola, 414. 415. in Ellipſi, 449. 450. 452. in Hyperbola determinetur, 492. 493.
Diameter conjugata. Definitio, *f.* 374.
tranſverſa. Definitio, *f.* 373.
Differentia. Definitio, *a.* 64.
Differentiales, *t.* 31.
Differentiale. Definitio, *i.* 6. ſignum, 8. gradus, 296. quomodo integretur, 95. quomodo denuo differentietur, 267. & *ſeqq.*
Differentiale areæ. Definitio, *i.* 97. arcus, 144.
Differentiale exponentiale quomodo integretur, *i.* 267.
Digitus. Definitio, *g.* 25.
cubicus. Definitio, *g.* 477.
quadratus. Definitio, *g.* 118.
Dignitas. Definitio, *a.* 250. gradus, 252. ſigna, 254.
Diſſimilitudo. Definitio, *a.* 24.
Diſtantia. Definitio, *g.* 15. exemplum, 16. puncti a linea & plano, 225. puncti a puncto in plano 192. punctorum peripheriæ a centro circuli, 193.
Diſtantiæ locorum quomodo inveniantur, *g.* 194. 195. 228. & *ſeqq.* *t.* 56. 65. 74.
Divergentia linearum. Definitio, *g.* 83. proprietas, 261.
Dividendus. Definitio, *a.* 69.
Diviſio. Definitio, *a.* 69. ſignum, 71. examen, 124. regulæ, 117. 119. 120.
Diviſio ejuſdem per majus & minus, 202. majoris & minoris per idem, 182.
Diviſio rationum, 193.
Diviſor. Definitio, 69.
Dodecaëdrum. Definitio, *g.* 475. conſtructio, 528. quale corpus, 530. quomodo ſphæræ inſcribatur, *f.* 310. quomodo latus ſphæræ inſcribendi inveniatur, 308. hujus ratio ad radium, 314.
Dolii ſoliditatem in menſura fluidorum reperire, *g.* 588. & *ſeqq.*
Dureri *curva fornicum* qualis ſit, *f.* 601.

E.

E*Fficientes.* Definitio, *a.* 66.
Elementum areæ, *i.* 98.
lineæ curvæ, 144.
ſolidi rotatione geniti, 197.
ſuperficiei ejuſdem, 219.
Ellipſis. Definitio, *f.* 420. deſcriptio, 426. 435. 436. 515. 594. 598. 600. proprietates,

tates, *f.* 421. & *ſeqq.* quod ſit ſectio conica, 512. maxima applicata, *i.* 66. oſculator circulus, 325. quadratura, 126. & *ſeqq.* rectificatio, 172. ſubtangens, 25.
Ellipſis Apolloniana, *f.* 522.
Ellipſes infinitæ. Definitio, *f.* 522. maxima applicata, *i.* 66. ſubnormalis, 40. ſubtangens, 26.
Elliptoides. Definitio, *f.* 522.
cubicales, ibid.
biquadraticæ, ibid.
Epicyclois. Definitio, *f.* 576.
ſuperior, ibid.
inferior, ibid.
Error in metiendis altitudinibus admiſſus quomodo æſtimetur, *t.* 76. & *ſeqq.* in metiendis diſtantiis admiſſus quomodo æſtimandus, 58. & *ſeqq.* 66. & *ſeqq.*
Evoluta, *i.* 313.
Examen quomodo differat a demonſtratione, *a.* 102.
Examen additionis, *a.* 101. & *ſeqq.*
ſubtractionis, 106. 107.
multiplicationis, 122.
diviſionis, 124.
extractionis radicum, 289.
angulorum rite dimenſorum, *g.* 151.
Experientia quid ſit, *c.* 34. ejus objectum, 35. quomodo Mathematici circa eam verſentur, 36. 37.
Exponens dignitatis. Definitio, *a.* 251.
Exponens rationis. Definitio, *a.* 136. quando ſit terminus primus, 138. quomodo ſe habeat ad unitatem, 140. quomodo exprimatur, 141.
Exponens rationis potentiarum qualis ſit, 290.
Extenſionis notio, *g.* 2.
Extractio radicis quadratæ, *a.* 269. & *ſeqq.*
Extractio radicis cubicæ, *a.* 282. & *ſeqq.*
Extractio radicis ex dignitate. Definitio, 256.
Extractio radicis ex linea recta, *g.* 331.
Extractio radicis ex æquatione quadratica, *f.* 143. cubica, 358. biquadratica, 362. quacunque per approximationem, 363. & *ſeqq.* ex ſerie infinita, 366.
Extractio radicis indeterminatæ, 98. & *ſeqq.*

F.

F*Actum.* Definitio, *a.* 66. ex quoto in diviſorem, 212.
Facta quales numeri, 211.
æqualium factorum, 201. 208.
Facti Logarithmus, 337.
Factores. Definitio, 66.
Factorum & efficientium quando eadem ratio, 178.
Familia curvarum. Definitio, *f.* 383.
Figura. Definitio, *g.* 32. 33. in campo deſignatio, 369.
Figura æquiangula, 105.
æquilatera, 88.
circulo inſcripta, 116.
circulo circumſcripta, 117.
curvilinea, 37.
Figura irregularis. Definitio, 106. conſtructio, 359. 360. 361.
Figura mixtilinea, 34.
multilatera, 104.
obliquangula, 97.
plana, 36.
Figura polygona, 104.
quadrilatera, 97.
Figura rectilinea. Definitio, 34. diviſio in partes æquales, 441.
Figura regularis. Definitio, 106. proprietates, 348. 401. quomodo circulo inſcribatur, 342.
Figura rectangula, 97.
Figuræ congruentes quales ſint, 177.
Figuræ inter ſe æquiangulæ, 109.
æquilateræ, 108.
Figuræ ſimiles quales ſint, 175. 176. earum ratio, 406. circulo inſcriptarum & circumſcriptarum ratio, 408.
Fluidi quantitatem in dolio non pleno determinare, 600.
Fluxio. Definitio, *i.* 6. ſignum, 9.
Focus. Definitio, *f.* 395.

Focus parabolæ, quomodo inveniatur, *f.* 396. *& ſeqq.* proprietates, 418.
Focus Ellipſis quomodo inveniatur, 463. proprietates, 434. 457. 458.
Focus Hyperbolæ quomodo inveniatur, 463. proprietates, 464. 465. 470. 503. 504.
Fractio. Definitio, *a.* 38. ſcriptio, 59. 60. quando integro major, minor, eidem æqualis, 221. quænam major, minor altera, 225. quomodo ad minores terminos reducatur, 231. *& ſeqq.* quomodo ad eandem denominationem, 235. quomodo in aliam datæ donominationis convertatur, 303.
Fractionis Logarithmus quomodo inveniatur, 351. *& ſeqq.* quomodo valor ad communem menſuram reducatur, 304.
Fractiones quænam æquales, *a.* 225. quod ſint rationes, 129.
Fractionum algorithmus, 236. 237. 239. *& ſeqq.* 243. identitas unde colligatur, 226. reductio ad alias æquales, 227. in infinitum certa lege decreſcentium ſumma quomodo inveniatur, *i.* 334.
Fractio decimalis. Definitio, *a.* 361. ſcriptio, 306. 364. 365. logarithmus quomodo inveniatur, 366. 368. quomodo alia ad eam reducatur, 305.
Fractio decimalis exacta. Definitio, 370.
Fractio decimalis approximans. Definitio, 370.
Fractionum decimalium algorithmus, 373. *& ſeqq.*
Fractiones ſexageſimales. Definitio, 385. algorithmus, 391. *& ſeqq.* quomodo ſcribantur, 387.
Fractio ſpuria quænam dicatur, 222. quomodo ad integra reducatur, 223.

G.

GEometria. Definitio, *g.* 1.
— *ſublimior.* Definitio, *f.* 367.
Geometrice proportionalia quænam dicantur, *a.* 323.
Gradus. Definitio, *g.* 41. inæqualitas, in circulis inæqualibus, 42.

H.

HArmonica proportio. Definitio, *f.* 186.
Harmonice proportionalium inventio, 187. *& ſeqq.*
Helix, *f.* 569.
Heptagonum. Definitio, *g.* 104.
Heterogenea quænam ſint, *a.* 32.
Hexaëdrum. Definitio, *g.* 475. quomodo ſphæræ inſcribatur, *f.* 304. ſphæræ inſcribendi latus quomodo inveniatur, 302. hujus ad ſphæræ ſemidiametrum ratio, 314.
Hexagonum. Definitio, *g.* 104.
Hexagonum regulare quomodo conſtruatur, 358. quomodo circulo inſcribatur, 357.
Homogenea quænam ſint, *a.* 32.
Hyperbola. Definitio, *f.* 459. deſcriptio, 471. 472. quod ſit ſectio conica, 513. quadratura, *i.* 120. 123. rectificatio, 175. 179. ſubtangens, 27. circulus eam oſculans, 327. recta ad eam perpendicularis, 74. 75.
Hyperbolæ intra aſymptotos conſtructio, *f.* 489. proprietates, 475. *& ſeqq.* ſubtangens, *i.* 29. ſubnormalis, 42. quadratura, 123.
Hyperbola æquilatera. Definitio, *f.* 505. proprietates, 506. *& ſeqq.* deſcriptio, 531. 532.
Hyperbola Apolloniana quænam dicatur, 425.
Hyberbolæ infinitæ. Definitio, *f.* 425. ſubtangens, *i.* 28. quadratura, 118.
Hyperboloides. Definitio, *f.* 425.
Hypothenuſa. Definitio, *g.* 95.

I.

IChnographia arearum quomodo perficienda, *g.* 363. *& ſeqq.*
Icoſaëdrum. Definitio, *g.* 475. conſtructio, 527. quale corpus, 530. quomodo ſphæræ inſcribatur, *f.* 311. ſphæræ inſcribendi latus quomodo inveniatur, 311. hujus ad ſemidiametrum ſphæræ ratio, 314.

Inæqualia. Definitio, *a.* 15. eorum ad ſe invicem relatio, 16. 17. 21.
Inclinatio plani ad planum. Definitio, *g.* 476.
Incommenſurabilia. Definitio, *a.* 31. ratio ad ſe invicem, 163. 164. quod dentur, *g.* 421.
In directum ſitum quid ſignificet, *g.* 61.
Infiniteſima. Definitio, *i.* 2.
Infinitinomium quomodo ad dignitatem quamcunque elevetur, *f.* 102. 103. 104.
Inſiſtere quando angulus dicatur, *g.* 56.
Inſtrumentum transportatorium quodnam & quale ſit, *g.* 153. 154.
Inſtrumenti tranſportatorii rectilinei conſtructio, *t.* 42. uſus, 43. 44.
Integrorum per fractiones diviſio, *a.* 245. ad fractiones reductio, 224.
Inverſio rationum, 169.
Irrationalium ad eandem denominationem, *f.* 59. 146. ad ſimpliciorem expreſſionem reductio, 61. algorithmus, 67. 68. ratio rationalis quomodo inveniatur, 64.
Judicium quando & quomodo acuatur ſtudio Matheſeos, *c.* 53. 54.

L.

Lamellarum Neperianarum conſtructio, *a.* 113. uſus, 115.
Latus Coni. Definitio, *g.* 467.
Latus educere ex dignitate quid ſignificet, *o.* 256.
Latus figuræ. Definitio, *g.* 35. quomodo quodlibet in figura rectilinea per calculum eruatur, *t.* 52.
Latus hexagoni regularis quomodo ſe habeat ad radium circuli circumſcripti, *g.* 356.
Latus numeri polygoni. Definitio, *f.* 208. quomodo inveniatur, 213.
Latus pentagoni regularis quomodo ex data diagonali inveniatur, *f.* 294.
Latus polygoni regularis circumſcripti quomodo ex latere inſcripti inveniatur, *g.* 424.
Latus potentiæ. Definitio, *a.* 252.
Latus quadrati parallelogrammo vel triangulo æqualis quomodo inveniatur, *g.* 395.
Latus rectum. Definitio, *f.* 388.
transverſum. Definitio, 459.
Latera homologa quænam dicantur, *g.* 110.
Latera polygonorum regularium in fractionibus decimalibus radii, *g.* 47.
Limites æquationis quomodo inveniantur, *f.* 356.
Linea. Definitio, *g.* 10. termini, 11. proprietas, 12. 13. uſus, 14. quænam breviſſima inter duo puncta, 191.
Linea, pars digiti, 25.
Linea curva. Definitio, *g.* 22.
Linearum congruentia, 163.
Lineæ convergentes. Definitio, 83. unde convergentia colligatur, 262. 263.
Lineæ divergentes. Definitio, 84. unde divergentia colligatur, 261.
Linea normalis, 78.
obliqua, 80.
Linea parallela. Definitio, *g.* 81. quomodo alteri ducatur, 258.
Linearum parallelarum ſymptomata, 230. *& ſeqq.* 238. *& ſeqq.* 260.
Linea perpendicularis. Definitio, 78. quando ſit, 79. quomodo ducatur.
Linearum proportionalium inventio, *g.* 271. *& ſeqq.* 327. 338. duarum mediarum in continua proportione inventio, *f.* 624. proprietates, *g.* 377. 378.
Lineæ reciprocæ. Definitio, *f.* 261. quomodo inveniantur, 262. *& ſeq.*
Linea recta. Definitio, *g.* 17. differentia ab alia, 18. quomodo gignatur, 19. ducatur, 121. biſecetur, 210. in partes æquales, 274. proportionales dividatur, 275. quomodo media & extrema ratione ſecetur, *f.* 258. quomodo eam metiamur, *g.* 126. *& ſeqq.* quando centro applicata in peripheria terminetur, 173.
Linearum rectarum ſectio qualis ſit, *g.* 250. congruentia, 168. *& ſeqq.*

Linea recta ad planum perpendicularis. Definitio, 486.
Linea ſecantium. Definitio, *f.* 562. proprietates, 563.
Linea ſinuum. Definitio, 560. proprietates, 561.
Linea tangentium. Definitio, 562. proprietates, 563.
Locus geometricus. Definitio, *f.* 584.
  planus, 585.
  ſolidus, 585.
  primi, ſecundi, tertii &c. *ordinis*, 585.
Locus ad circulum. Definitio, 584. conſtructio, 589.
Locus ad rectam. Definitio, 584. conſtructio, 586.
Locus ad ellipſin quomodo conſtruatur, 588.
Locus ad hyperbolam quomodo conſtruatur, 590. 591.
Locus ad parabolam quomodo conſtruatur, 587.
Logarithmica. Definitio, *f.* 552. proprietates, 554. *& ſeqq.* circulus oſculator, *i.* 332. quadratura, 134. *& ſeqq.* 274. *& ſeqq.* rectificatio, 177. ſubnormalis, 280. ſubtangens, 54. 243.
Logarithmi. Definitio, *a.* 334. proprietates, 337. *& ſeqq.* quomodo fuerint computati, 346. quomodo in Logarithmica, *f.* 555. in Hyperbola, *i.* 256. per arcus tractoriæ repræſententur, 253. quomodo inveniantur, 255. quomodo eiſdem reſpondentes numeri inveniantur, 260. differentiale quomodo integretur, 266.
Logarithmorum Canonis conſtructio, *a.* 346.
Logarithmus hyperbolicus binarii, *i.* 257.
Logarithmus ſecantis quomodo inveniatur, *t.* 30.
Logarithmus ſinus quomodo inveniatur, *i.* 261. *t.* 28.
Logarithmus tangentis quomodo inveniatur, *t.* 29. *i.* 262.
Logiſtica ſpecioſa. Definitio, *f.* 2.
Logiſtica linea. Vide *Logorithmica.*
Logiſtici ſolidi cubatio, *i.* 277. *& ſeqq.*
Logiſtica ſpiralis. Definitio, *f.* 557.
Logiſticæ ſpirales infinitæ, 559.

M.

Magnitudo ſcalaris. Definitio, *a.* 250.
Majoritas unde colligatur, 89. 90. ejus ſignum, 22. 23. 204.
Majus. Definitio, *a.* 20.
Matheſis quomodo & quando judicium acuat, *c.* 53. 54.
Maxima chorda in circulo, *i.* 64. *g.* 299.
Maxima vel minima applicata in curvis algebraicis quomodo determinetur, *i.* 63.
Media proportionalis linea quomodo inveniatur, *g.* 327. quomodo inveniantur duæ in proportione continua, *f.* 624.
Medii arithmetici inventio, *a.* 330.
Medius proportionalis numerus quinam dicatur, 156. quomodo inveniatur, 301.
Menſura. Definitio, *g.* 23. 24.
Menſura anguli. Definitio, 57. quo radio deſcribatur, 139.
Menſura anguli ad peripheriam, 314.
  extra centrum, 316.
  figuræ. Definitio, 118.
Menſura linearum. Definitio, 25. diviſio, 26. diverſitas in diverſis locis, 26. unius ad aliam reductio, 130. ex qua materia fieri debeat, 127. *& ſeqq.*
Menſura numeri, communis, maxima, communis maxima. Definitio, *a.* 77. 78. communis maxima quomodo inveniatur, 228. 230.
Menſura ſolidi. Definitio, *g.* 477.
Meſologarithmus, *t.* 31.
Methodus mathematica. Definitio, *c.* 1. cur ita dicatur, 52. forma, 2. 13. 14. 15. ab objectionibus vindicata, 55. *& ſeqq.*
Methodi tangentium inverſæ exempla, 286. *& ſeqq.*
Methodus de maximis & minimis. Definitio, *i.* 61.
Metiri quid ſignificet in Geometria, *g.* 23. quid

quid in Arithmetica, *a.* 74.
Minuendus numerus quinam dicatur, *a.* 64.
Minus. Definitio, *a.* 20. unde colligatur, 89. 90. 206. ſignum, 22. 23.
Minutiæ phyſicales, *a.* 385.
Minutum primum, *ſecundum* &c. Definitio, *a.* 388.
Minutum primum, *ſecundum* &c. *gradus*, *g.* 41. qualis ſit fractio, 43.
Miraculoſa in definitionibus geometricis admittenda, *g.* 469.
Multa. Definitio, *a.* 7.
Multiplicatio. Definitio, *a.* 66. quid ſit, 67. ſignum, 68. regulæ, 111. 112. 115. 116. examen, 122.
Multiplicandus. Definitio, 66.
Multiplicator, 66.
Multitudo. Definitio, 8.

N.

NOmen rationis, *a.* 136.
Normalis linea. Definitio, *g.* 78.
Normæ conſtructio & uſus, 212. 216. examen, 321.
Notæ numericæ, *a.* 49. 51.
Notæ fractionum decimalium. Definitio, 372.
Notio. Definitio, *c.* 4. differentia, 5. & *ſeqq.* qualis in definitionibus mathematicis admittatur, 13. & *ſeqq.*
Notio adæquata. Definitio, *c.* 10. gradus, 11.
Notio clara. Definitio, 6. diviſio, 8. 9.
  confuſa, 9.
  diſtincta. Definitio, 8. diviſio, 10. 12.
  inadæquata, 12.
  obſcura, 7.
Numerare quid in Arithmetica ſignificet, *a.* 74.
Numerandi lex, 44. 46.
Numerus. Definitio, 10. & *ſeqq.* quomodo ſcriptus enuncietur, 55. quomodo occulte ſcribatur, 53. 54.
Numeri compoſiti inter ſe. Definitio, *a.* 80.
Numeri dati cur in diviſione & multiplicatione non debeant eſſe homogenei, 70.
Numeri heterogenei inter ſe, 35. 36.
  homogenei, 36.
Numeri primi inter ſe, *a.* 39.
Numerorum nomina, 45. 47. 48. notæ, 49. 51. progreſſio, 50.
Numerus abſtractus quinam, *a.* 34.
  angulorum. Definitio, *f.* 208. 209.
  compoſitus, *a.* 76.
  concretus, 34.
Numerus cubicus. Definitio, *a.* 248. geneſis, 276. & *ſeqq.* tabulæ horum numerorum quomodo conſtruantur, *f.* 85.
Numerus determinatus, *a.* 13.
  effabilis, 39.
  fractus, 38.
Numerus heptagonus. Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. ſummatio, 212.
Numerus hexagonus. Definitio, 206. quomodo inveniatur, 211. ſummatio, 212.
Numerus indeterminatus, *a.* 13.
  ineffabilis, 43.
Numerus integer. Definitio, 37. quid exprimat, 139. quando radicem perfectam non habeat, 293. 294.
Numerus irrationalis. Definitio, *a.* 43. per lineas expreſſio, *g.* 420. *f.* 630.
Numerus impar. Definitio, *a.* 72. proprietates & ſymptomata, *f.* 72. & *ſeqq.*
Numerus numerans, *a.* 33. 34.
  numeratus, 33.
Numerus octogonus. Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. ſummatio, 212.
Numerus par. Definitio, *a.* 72. proprietates & ſymptomata, *f.* 77. & *ſeqq.*
Numerus pentagonus. Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. ſummatio, 212.
Numerus perfectus quinam ſit & quomodo inveniatur, *f.* 248.
Numerus polygonus. Definitio, 206. quomodo inveniatur, 210. ſummetur, 212.

Numerus primus in ſe, 475.
Numerus pronicus. Definitio, *f.* 196. quomodo inveniatur, 198.
Numerus pyramidalis primus, ſecundus &c. triangularis, pentagonalis &c. Definitio, *f.* 214. ſummatio, 216. 217.
Numerus ſurdus, *a.* 43.
Numerus triangularis. Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. ſummetur, 212.
Numerorum proportionalium ſymptomata analytice inveſtigata, *f.* 173. *& ſeqq.*

O.

OBliqua linea. Definitio, *g.* 80.
Oblongum. Definitio, 100. conſtructio, 339.
Octaëdrum. Definitio, *g.* 475. conſtructio, 526. quale corpus, 530. quomodo ſphæræ inſcribatur, *f.* 307. latus ſphæræ inſcribendi quomodo inveniatur, 305. hujus ad radium ratio, 314.
Octogonum. Definitio, *g.* 104.
Octogoni regularis latus quomodo inveniatur, *f.* 272.
Opponi quænam dicantur, *g.* 85. 86.
Ordinata ratio, *a.* 194.
Ordinatim applicatæ. Definitio, *f.* 370.
Ordo Mathematicorum an jure taxetur, *c.* 57.
Ordo naturæ quinam, 57.
ſcholæ quinam, 57.
Oſculatio curvarum, *i.* 314.

P.

PArabola. Definitio, *f.* 388. conſtructio, 393. 400. 401. proprietates reſpectu axis, 390. *& ſeqq.* reſpectu diametri, 416. 417. quod ſit ſectio conica, 511. circulus oſculator, *i.* 323. ad eam perpendicularis, 72. 78. quadratura, 103. 104. 107. 349. 350. rectificatio, 146. hujus dependentia a quadratura hyperbolæ, 147. ſubnormalis, 36. ſubtangens, 21.
Parabolæ externæ proprietas, *f.* 419.
ſecundi generis rectificatio, *i.* 150.
Parabola Apolloniana quænam dicatur, *f.* 519.
Parabolæ infinitæ ſeu *ſuperiorum generum.* Definitio, *f.* 519. conſtructio, 581. 583. circuli oſculatores, *i.* 323. quadratura, 105. 106. rectificatio, 152. ſubnormalis, 37. ſubtangens, 22. quod ſint ſectiones conorum ſuperiorum, *f.* 528.
Paraboloides cubicales, biquadraticales, ſurdeſolidales &c. Definitio, *f.* 519.
Parallela linea. Definitio, *g.* 81. quomodo ducatur, 258. ſymptomata, 255. *& ſeqq.* 260.
Paralleliſmi conſtructio & uſus, 258. 259.
Parallelogrammum. Definitio, *g.* 102. biſectio, 439. in partes æquales diviſio, 440. proprietates, 335. 337.
Parallelogramma quotnam ſint, 336.
Parallelogrammorum ratio, 388. proprietas, 388. æqualitas unde colligatur, 383. 384. 389. ſimilium proprietates, 396. *& ſeqq.*
Parallelopipedum. Definitio, *g.* 462. proprietates, 463. 464. deſcriptio in plano, 510. conſtructio, 514. biſectio, 537. 111. ſuperficies & ſoliditas quomodo inveniatur, 536.
Parallelopipedorum æqualitas unde colligatur, 535. ratio, 572. *& ſeqq.* æqualium proprietas, 580. ſimilium ratio, 578.
Parameter. Definitio, *f.* 388.
Pars aliquanta. Definitio, *a.* 30.
Pars aliquota. Definitio, *a.* 30.
Partes. Definitio, *a.* 9. quando ſimiles, 170.
Partium ſimilium ratio ad totum, 170. inter ſe, 171.
Pennæ optimæ quænam ſint, *g.* 123.
Pentagonum. Definitio, 104.
Pentagoni regularis latus circulo inſcribendi quomodo inveniatur, *f.* 279.
Perimeter, *g.* 31.
Peripheria circuli, 37. 41.
Permutatio rationum, *a.* 173.

Perpendicularis linea. Definitio, *g.* 78. quomodo dicatur, 210. 212. 216. ſymptomata & proprietates, 213. *& ſeqq.* 217. 224.
Perpendicularis ad curvam quanta ſit, *i.* 76. 85.
Perpendicularis ad parabolam, 72. 78.
Perpendicularis ad hyperbolam æquilateram, 74.
Perpendicularis ad hyperbolam ſcalenam, 75.
Pertica cubica, *g.* 477.
quadrata, 118.
Perturbata ratio, *a.* 198.
Pes, *g.* 25.
cubicus, 477.
quadratus, 118.
Planum, *g.* 36.
Planum plano parallelum, 498.
ad planum perpendiculare, 494.
Plura. Definitio, *a.* 7.
Polus conchoidis, *f.* 535.
Polygonum. Definitio, *g.* 104.
Polygonum regulare quomodo conſtruatur, *g.* 352. *t.* 48. quomodo circulo inſcribatur & circumſcribatur, *g.* 353. 355. *t.* 46. quomodo circulus eidem circumſcribatur, *g.* 347. ejus ad circulum inſcriptum & circumſcriptum relatio, 416. proprietas, 407. area quomodo inveniatur, 402. 416.
Polygonorum ſimilium proprietas, *g.* 403. 406.
Polynomium quomodo ad dignitatem quamcunque evehatur, *f.* 101.
Poſtulatum. Definitio, *c.* 30. quænam propoſitiones huc referantur, 31.
Potentia. Definitio, *a.* 250. ſigna, 254. logarithmus, 339. quomodo prodeat, 341. quomodo ex additione numerorum imparium procreetur, *f.* 170. 171.
Potentiarum proportio, 259. 260.
Potentiæ numerorum naturalium quæcunque quomodo ſummentur, *f.* 203. 205.
Potentia hyperbolæ. Definitio, *f.* 477. quomodo determinetur, 478. *& ſeqq.*
Poteſtas. Definitio, *a.* 250. ſigna, 254.
Practica Italica, *a.* 316. *& ſeqq.*
Priſma, rectum, obliquum, triangulare, quadrangulare &c. Definitio, *g.* 456. proprietates, 457. 458. in plano deſcriptio, 510. conſtructio, 515. ſuperficies & ſoliditas quomodo inveniatur, 539.
Priſmatum ratio, 572. *& ſeqq.* æqualitas unde colligatur, 535.
Priſmatum æqualium proprietas, 580.
ſimilium ratio, 578.
Priſmatis triangularis ad pyramidem reductio, 543. 545. ad parallelopipedum ratio, 538.
Problema quale ſit & quibus conſtet partibus, *c.* 48. quomodo algebraice ſolvatur, *f.* 141.
Problema Deliacum, *f.* 626.
Problemata arithmetica, *f.* 144. *& ſeqq.* arithmetica indeterminata, 223. *& ſeqq.* geometrica, 250. *& ſeqq.* geometrica indeterminata per Algebram ſoluta, 255. *& ſeqq.*
Problematis Keppleriani ſolutio, *i.* 193.
Productum quid dicatur, *a.* 66.
Progreſſio arithmetica. Definitio, *a.* 333. proprietates, *f.* 106. ſumma quomodo inveniatur, 107. 108.
Progreſſionis arithmeticæ problemata per Algebram ſoluta, *f.* 164. *& ſeqq.*
Progreſſio geometrica. Definitio, *a.* 322. proprietates, *f.* 118. *& ſeqq.* ſumma quomodo inveniatur, 120.
Progreſſionis geometricæ problemata per Algebram ſoluta, *f.* 182. *& ſeqq.*
Progreſſionum geometricarum ab unitate incipientium proprietates, *f.* 126.
Proportio. Definitio, *a.* 155.
Proportio æquemultiplicium, 219.
Proportionum regulæ, 301. *& ſeqq.*
Proportio continua. Definitio, *i.* 156.
contraharmonica, *f.* 193.
diſcreta, *a.* 156.
Proportionalitas quid ſit, *a.* 157.

Proportionales quantitates quænam dicantur, 155.
Propoſitionis partes, *c.* 39. 40.
Propoſitiones Elementi II. EUCLIDIS analytice demonſtratæ, *f.* 86. & *ſeqq.*
Punctum. Definitio, *g.* 6. theoria. 7. 8. 9.
Punctum flexus contrarii. Definitio, *i.* 301. quomodo determinetur, 302. 309.
Punctum regreſſus, 301.
Pyramis. Definitio, *g.* 472. proprietates, 473. 474. in plano deſcriptio, 512. conſtructio, 515. 521. ad priſma triangulare reductio, 543. 545. 546. ſuperficies ac ſoliditas quomodo inveniatur, 548. *i.* 351.
Pyramidum æqualitas unde colligatur, *g.* 542. ratio, 572. & *ſeqq.*
Pyramidum æqualium proprietas, 580.
ſimilium ratio, 578.

Q.

QUadratix curvæ, *i.* 234.
Quadratix DINOSTRATIS. Definitio, *f.* 564. ſubtangens, *i.* 55.
Quadratix Tſchirnhuſiana, *f.* 566. 568.
Quadratorum numerorum in ſerie naturali differentiæ, *f.* 81. 83. quomodo ſummentur, 200. quomodo duorum ſumma in duo alia quadrata dividatur, 230. logarithmus, *a.* 338. Vid. numerus quadratus.
Quadratum. Definitio, *g.* 98. conſtructio, 333. area quomodo inveniatur, 370. & *ſeqq.*
Quadratorum ratio ad ſe invicem, 374. additio, 419.
Quadratiquadratum, *a.* 252.
Quadrato-cubus, ibid.
Quadratocubocubus, ibid.
Quadratoquadratum, ibid.
Quadratoquadratocubus, ibid.
Quadratum Cubi, ibid.
Quadratum Surdeſolidi, ibid.
Quadrata reciproca quomodo conſtruantur, *f.* 285. 286.
Quadrilateri circulo inſcripti proprietas, *g.* 350. *f.* 324.
Quadrilaterorum ſimilium proprietas, *g.* 350.
Quantitas quid ſit, *a.* 13. 14. quomodo ad dignitatem evehatur, 255. *f.* 95. quomodo differentietur, *i.* 12. & *ſeqq.*
Quantitatum ſigna, *a.* 57. 58.
Quantitatum permutatio quomodo inveniatur, *f.* 129.
Quantitas affirmativa, *f.* 16.
Quantitas conſtans. Definitio, *f.* 375. ſignum, 376.
Quantitas exponentialis. Definitio, *i.* 264. ſignum, 265. conſtructio, 268.
Quantitas infinite parva. Definitio, 2. quando habeatur pro nulla, 3.
Quantitas nihilo major, *f.* 16.
minor, 16.
Quantitas poſitiva. Definitio, *f.* 17. quomodo prodeat, 17.
Quantitas privativa. Definitio, 16. quomodo prodeat, 17.
Quantitas variabilis. Definitio, 375. ſignum. 376.
Quantitates continue æquidifferentes. Definitio, *a.* 322. proprietates, 334. & *ſeqq.*
Quantitates diſcretim æquidifferentes. Definitio, *a.* 322. proprietates, 324. & *ſeqq.*
Quantitates harmonice proportionales. Definitio, *f.* 186. quomodo inveniantur, 187. & *ſeqq.*
Quantitates incommenſurabiles num dentur, *a.* 165.
Quantitates poſitivæ & *privativæ* quando ſe mutuo deſtruant, *f.* 21. num rationem ad ſe invicem habeant, 24.
Quantitates privativæ quid ſint, 19. 20. num inter ſe homogeneæ, 23. quod poſitivis heterogeneæ, 23.
Quartus æquidifferens numerus quomodo inveniatur, *a.* 331.
Quartus proportionalis numerus quomodo inveniatur, 302.
Quotus. Definitio, *a.* 69. logarithmus, 343.

343. ad dividendum ratio, 174. ex diviſione facti per factorem unum prodiens, 210. quando numerus rationalis, 161. quando irrationalis, 162. ex diviſione radicis per radicem quando numerus integer, 291.

Quoti quando numeris diviſis proportionales, *a.* 181.

R.

R*Adius circuli.* Definitio, *g.* 39. eorum æqualitas, 40.

Radius circuli octogono regulari circumſcribendi quomodo inveniatur, 274.

Radius circuli decagono regulari circumſcribendi quomodo inveniatur, *f.* 278.

Radius circuli parabolam oſculantis quomodo inveniatur, *i.* 322.

Radius curvedinis. Definitio, *i.* 314. quomodo determinetur, 320.

Radius evolutæ. Definitio, *i.* 314.

Radius oſculi. Definitio, *i.* 314. quomodo determinetur, 320.

Radix binomia. Definitio, *a.* 258.

Radix cubica. Definitio, *a.* 248. ratio ad cubum, 249. quomodo extrahatur, 282. *& ſeqq.*

Radix multinomia, 258.

polynomia, ibid.

trinomia, ibid.

Radix quadrata. Definitio, *a.* 246. relatio ad quadratum, 247. quomodo extrahatur, 269. *& ſeqq.*

Radix æquationis. Definitio, *f.* 134. quomodo tranſmutetur, 333. *& ſeqq.* quomodo in falſam mutetur, 332.

Radix æquationis vera, 135.

falſa, 136.

imaginaria, 137.

Radix pronica quomodo extrahatur, 199.

Radix ex æquatione biquadratica quomodo extrahatur, *f.* 362.

Radix ex cubica quomodo extrahatur, 355.

Radix ex quacunque per approximationem quomodo extrahatur, 363. *& ſeqq.*

Radix ex quadratica quomodo extrahatur, 143.

Radix ex dignitate quomodo extrahatur, *a.* 256.

Radix ex ſerie infinita quomodo extrahatur, *f.* 366.

Radix ex quantitate irrationali compoſita quomodo extrahatur, 360.

Radices imaginariæ quænam dicantur, 71.

Radices rationales ex æquatione quomodo extrahantur, *f.* 351. *& ſeqq.*

Radices univerſales quænam dicantur, 70.

Radicum extrahendarum theorema generale, *f.* 98. *& ſeqq.*

Radicum ſignum, *a.* 295.

Radicum imaginariarum algorithmus, *f.* 71.

Radicum quadratarum ſurdorum ratio, *g.* 420.

Radicum univerſalium algorithmus, *f.* 70.

Ratio. Definitio, *a.* 126. termini, 126. 127. genera, 130. uſus, 132.

Rationum ſymptomata demonſtrata, *a.* 169. *& ſeqq.* analytice inveſtigata, *f.* 124.

Rationum identitas. Definitio, *a.* 149. 150. natura, 151. deſignatio, 152. 153. unde colligatur, 168. 177.

Rationum ſimilitudo in quo conſiſtat, 154. unde colligatur, 167.

Ratio æqualitatis. Definitio, 130.

Ratio compoſita. Definitio, *a.* 159. exponens, 214. quando una alteri æqualis, 218.

Ratio dupla, 142.

duplicata, 159. 216.

inæqualitatis, 131.

inæqualitatis majoris, 132.

Ratio inæqualitatis minoris. Definitio, 132. nomina quomodo inveniantur, 147. memoriæ facile mandentur, 148.

Ratio irrationalis, 134. 135.

Ratio major, 158.

minor, ibid.

multiplex, 142.

multiplex ſuperparticularis, 145.

ſuperpartiens, 146.

multiplicata, 159.

Ratio

Ratio quadruplicata, a. 159.
rationalis, 134. 135.
ſeſquialtera, 143.
ſeſquitertia, ibid.
ſubdupla, 142.
ſubduplicata, 159.
ſubmultiplex, 142.
ſubmultiplex ſubſuperparticularis, 145.
ſubmultiplex ſubſuperpartiens, 146.
ſubmultiplicata, 159.
ſubquadruplicata, 159.
ſubſeſquitertia, 143.
ſubſeſquialtera, ibid.
ſubſuperparticularis, ibid.
ſubſuperpartiens, 144.
ſubſuperparticularis, 143.
ſubtripla, 142.
ſubtriplicata, 159.
triplicata, 159. 216.
Ratio ſummæ numerorum in infinitum certa lege decreſcentium ad totidem terminos maximo æquales, *i.* 341. *& ſeqq.*
Recta. Vid. *Linea recta*.
Rectæ in tres partes continue proportionales diviſio, *f.* 603.
Rectangulum. Definitio, *g.* 100. area quomodo inveniatur, 375.
Rectangulorum ratio, 376.
Rectificatio curvæ. Definitio, *i.* 143. methodus, 144.
Regula quale inſtrumentum, *g.* 121. ex qua materia parari debeat, 122.
Regula aurea quænam dicatur, *a.* 307.
Regula centralis BAKERI, *f.* 623.
Regula Conchoïdis, 535.
Regula de quinque, *a.* 311.
Regula Renaldiniana polygonum regulare circulo inſcribendi confutata, *f.* 292.
Regula Societatis, *a.* 314.
Regula trium ſive *de tri* quænam ſit, 307. ubinam locum habeat, 307. uſus in vita communi explicatus, 308. *& ſeqq.*
Regula trium compoſita, 312. 313.
directa, 311.
inverſa, ibid.
Reſiduum. Definitio, *a.* 64.
Rhombus. Definitio, *g.* 99. conſtructio, 340. area quomodo inveniatur, 387.
Rhomboides. Definitio, 101. conſtructio, 341. area quomodo inveniatur, 387.

S.

Scalæ geometricæ conſtructio, *g.* 277. uſus, 278.
Scholion in Matheſi quid ſit, *c.* 51.
Scrupulum primum, ſecundum &c. *g.* 388.
Secans. Definitio, 7. quomodo inveniatur, 26. *i.* 166. arcus multiplex quomodo inveniatur, *f.* 328.
Secantium proprietates, *g.* 302. 303. ex eodem puncto ductarum relatio, 380.
Secans complementi. Definitio, *t.* 11.
Sectio circuli per rectam qualis, *g.* 52. per circulum qualis, 53.
Sectiones conicæ. Definitio, *f.* 386. quænam ſint, 387. *& ſeqq.*
Sectiones conicæ ſuperiorum generum, 528. *& ſeqq.*
Sectio linearum. Definitio, *g.* 50.
Sectio media & extrema ratione facta, *f.* 258.
Sectionis planorum theoria, *g.* 478. *& ſeqq.*
Sectio rectarum mutua, 51.
Sector circuli. Definitio, *g.* 46. ad triangulum reductio, 415. area quomodo inveniatur, 435. *i.* 154. *& ſeqq.*
Sectoris elliptici quadratura, *i.* 186. 192.
hyperbolici quadratura, 189. 194.
Segmentum circuli, *majus*, *minus*. Definitio, *g.* 44. area quomodo inveniatur, 436. *& ſeqq.* *i.* 170.
Segmenti ſphærici ſoliditas quomodo inveniatur, *i.* 199.
Segmentum ſuperficiei ſphæricæ quomodo inveniatur, *i.* 222.
Semicirculorum ſectio, *g.* 202.
Semidiameter. Definitio, 39.
Semiordinata. Definitio, *f.* 370.
Series convergentes. Definitio, *f.* 52.
divergentes, ibid.
Serliana curva fornicum qualis ſit linea, *f.* 598.

Signa exponentium indeterminatorum tam rationum, quam dignitatum, *f.* 13. 14. operationum arithmeticarum, 8. *& ſeqq.*
Signa quantitatum, *f.* 3. *& ſeqq.*
Signa rationum univerſalia, 114.
Similia. Definitio, *a.* 24. qualia ſint, 25. differentia interna, 26. quomodo a LEIBNITIO definita, 27.
Similitudo. Definitio, *a.* 24. ſignum, 28. 29. principium, *g.* 120.
Similitudo corporum, 564. *& ſeqq.* polygonorum regularium ejuſdem ordinis, 404. 405.
Sinus ſive *Sinus rectus.* Definitio, *t.* 2. proprietas, 3. menſura, 13. ex dato arcu quomodo inveniatur, *i.* 160. graduum 18. *f.* 277. gr. 22, min. 30. *f.* 273. gr. 30. *t.* 15. gr. 36. *f.* 281. gr. 45. *f.* 270. arcus dimidii, *t.* 17. duplici, *t.* 18. arcus differentiæ, *t.* 20. angulorum multiplorum, *f.* 325. arcuum exiguæ differentiæ quomodo inveniatur, *t.* 19. *& ſeqq.*
Sinus artificialis, *t.* 31.
Sinuum canon quomodo conſtruatur, *t.* 15. *& ſeqq.*
Sinus complementi. Vide Coſinus.
Sinus totus. Definitio, *t.* 2. proprietas, 4.
Sinus verſus. Definitio, *t.* 2. proprietas, 4. quomodo ex arcu inveniatur, 163.
Situm eundem quænam habeant, *g.* 5.
Situs planorum theoria, 478. *& ſeqq.*
Solidum. Definitio, *g.* 444. quomodo dato æquale inveniatur, 577.
Solidi ciſſoidalis cubatio, *i.* 210.
  hyperbolici, 216. 217.
  logiſtici, 211. 212.
Sphæra. Definitio. *g.* 470. proprietas, 471. ad pyramidem reductio, 550. *i.* 200. ad cylindrum circumſcriptum ratio, *g.* 551. *i.* 201. ſoliditas quomodo inveniatur, *g.* 556. *i.* 199. ſuperficies quomodo inveniatur, *g.* 556. *i.* 221.
Sphærarum ſimilitudo, *g.* 571. ratio, 579.
Sphæroidis elliptici ſoliditas quomodo inveniatur, *i.* 203. *& ſeqq.*
Spiralis ARCHIMEDIS. Definitio, *f.* 569. proprietas, 570. ſubtangens, *i.* 50.
Spiralium quadratura, *i.* 137.
Spirales infinitæ. Definitio, *f.* 572. ſubtangens, *i.* 50. 51.
Spiralis parabolicæ punctum flexus contrarii quomodo determinetur, *i.* 312.
Stereometria doliorum, *g.* 582. *& ſeqq.*
Strues lignorum quomodo metiamur, 382.
Subnormalis. Definitio, *f.* 408. quomodo inveniatur, *i.* 35.
Subnormalis curvæ exponentialis quomodo inveniatur, *i.* 283.
Subnormalis ellipſeos quomodo determinetur, *f.* 440. *i.* 37.
Subnormalis hyperbolæ quomodo determinetur, *f.* 491.
Subnormalis parabolæ quomodo determinetur, *f.* 440. *i.* 36.
Subtangens. Definitio, *f.* 408.
Subtangens curvæ algebraicæ quomodo inveniatur, *i.* 20. *& ſeqq.*
Subtangens curvæ exponentialis quomodo inveniatur, *i.* 271. *& ſeqq.*
Subtangens ellipſeos quomodo determinetur, *f.* 440. 448. *i.* 25.
Subtangens hyperbolæ quomodo determinetur, *f.* 491. *i.* 27.
Subtangens parabolæ quomodo determinetur, *f.* 410. *i.* 21.
Subtractio. Definitio, *a.* 64. ſignum, 65. regulæ, 103. in numeris concretis, 104. examen, 106.
Subtrahendus, 64.
Summa. Definitio, *a.* 61.
Summandi numeri, ibid.
Superficies. Definitio, *g.* 28. termini, 29. 30.
Superficies corporis rotatione geniti quomodo inveniatur, *f.* 219.
Superficiei ſphæræ ad circulum maximum ratio, *g.* 554.
Superficierum corporum ratio analytice inveſtigata, *f.* 128.
Surdeſolidum, *a.* 252.
  ſecundum, ibid.

Surdeſolidum tertium, *a.* 252.
Syllogiſmorum forma an in demonſtrando attendenda, *c.* 47.

T.

TAngere quid ſignificet in Geometria, *g.* 47.
Tangere circulum extus, *intus*, ibid.
Tangens circulum quomodo ducatur, *g.* 311. *f.* 291. ejus ad ſecantem ex eodem puncto ductam relatio, *g.* 379.
Tangens curvam quomodo inveniatur, *i.* 161.
Tangens in Trigonometria. Definitio, *t.* 7. proprietates, 8. *& ſeqq.* quomodo inveniatur, 26. arcus multipli quomodo inveniantur, *f.* 327.
Tangentis 45° magnitudo, *t.* 32.
Tangentium circulum proprietates, *g.* 304. 307. *& ſeqq.* 325. 326.
Tangentium & ſecantium ex eodem puncto ductarum relatio, *g.* 334.
Tangens artificialis, *t.* 31.
complementi, 11.
Tangentium methodus inverſa. Definitio, *i.* 224. in quo conſiſtat, 225. exempla, 226. *& ſeqq.*
Termini rationis, *a.* 126.
Terminorum uſus in rebus diſtincte concipiendis, *a.* 56.
Tetraëdrum. Definitio, *g.* 475. conſtructio, 525. quale ſit corpus, 530. quomodo ſphæræ inſcribatur, *f.* 301. latus ſphæræ inſcribendi quomodo inveniatur, 299. hujus ad radium ratio, 314.
Theorema. Definitio, *c.* 38. quænam in eo conſideranda, 39. *& ſeqq.*
Theorema Newtonianum evehendi binomium ad dignitatem quamcunque, *f.* 95. *& ſeqq.*
Totum. Definitio, *a.* 9. relatio ad partem, 84. 86.
Tractoria, *i.* 250. *& ſeqq.*
Trapezoides. Definitio, *g.* 103.
Trapezium, ibid.
Triangulum. Definitio, *g.* 87. per quæ determinetur, 182. 206. 265. 266. conſtructio, 180. 205. 234. 264. area quomodo inveniatur, 392. *i.* 107. diviſio in partes æquales, *g.* 440. ratio ad parallelogrammum, *g.* 386. 391. *i.* 348.
Triangulorum æqualitas unde colligatur, *g.* 179. 204.
Triangulorum æqualium proprietas, 393.
Triangulorum congruentia, 179. 204. 251.
Triangulorum proprietates, 188. *& ſeqq.* 239. 240. 244. 246. 247. 268. 297. 300. *t.* 33. 35. reſolutio trigonometrica, *t.* 36. *& ſeqq.* ſimilitudo, *g.* 183. 207. 235. 237. 252. 267.
Triangulorum ſimilium proprietates, 396. *& ſeqq.*
Triangulum acutangulum. Definitio, *g.* 93.
Triangulum æquicrurum. Definitio, *g.* 89. conſtructio, 199. per quæ determinetur, 200. proprietates & ſymptomata, 184. 248. 253. ſimilitudo, 201.
Triangulum æquilaterum. Definitio, *g.* 88. conſtructio, 198. proprietates & ſymptomata, 185. 186. 187. 241. 254.
Triangulum obliquangulum. Definitio, *g.* 94.
Triangulum obtuſangulum. Definitio, 92. proprietates, 221. *& ſeqq.* 241.
Triangulum rectangulum. Definitio, 91. proprietates, 218. *& ſeqq.* 241. 244. 329. 417.
Trianguli regularis circulo inſcribendi latus quomodo inveniatur, *f.* 268.
Trigonometria canonica a Tabularum neceſſitate liberata, *i.* 167.
Trigonometria plana. Definitio, *t.* 1.
Trochois. Definitio, *f.* 573.
proprietates, 574. *& ſeqq.*

U.

VAriationes omnes quantitatum combinatarum & permutatarum quomodo inveniantur, *f.* 222.
Vertex anguli, *g.* 54.
curvæ, *f.* 369.
figuræ, *g.* 114.

Unciæ

Unciæ potentiarum quinam numeri dicantur, *f.* 95. quales ſint numeri, 218.
Unitas. Definitio, *a.* 4.
Unitates eædem quænam ſint, *a.* 5. 6.
diverſæ quænam ſint, *ibid.*
Unum. Definitio, *a.* 3.
Virgulæ pithometricæ conſtructio, *g.* 582. & *ſeqq.* 595. 598.

Z.

ZEnſus, *a.* 253.
Zenſicubus, ibid.
Zenſizenſizenſus, ibid.
Zenſizenſus, ibid.
Zenſurdeſolidus, ibid.

FINIS INDICIS QUARTI.

V.

INDEX
RERUM ET VERBORUM
TOMO II.
CONTENTORUM.

Notes velim, literam *m.* Mechanicam, *ſ.* Hydroſtaticam, *a.* Aërometriam *h.* Hydraulicam, & numeros §§. deſignare: ubi vero nulla numeris adſcribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

ACceleratio motus gravium qua lege fiat, *m.* 85. & *ſeqq.*
Acceleratio motus aquæ quomodo fiat, *h.* 249. & *ſeqq.*
Actionis & reactionis æqualitas & contrarietas, *m.* 528. 529.
Æquilibrium in aëre æquiponderantium quomodo tollatur, *a.* 158.
Æquiponderantia in aëre quando non æquiponderent in aliis fluidis, *ſ.* 58.
Æquilibrium fluidorum diverſæ gravitatis ſpecificæ, *ſ.* 36. homogenorum, 34.
Æquiponderatio. Definitio, *m.* 122. theoria, 144. & *ſeqq.*
Aër. Definitio nominalis, *a.* 3. exiſtentia, 13. 14. quod telluri circumfundatur, 44. quod comprimi poſſit, 15. 17. quomodo intra vas comprimatur, 65. quomodo ope antliæ in data ratione dilatetur, 52. num comprimatur in ratione ponderum, 72. & *ſeqq.* quod ſit elaſticus, 18. quod gravis, 21. quod rarefiat, 23. quod condenſetur, 24.
Aër inferior quod ſuperiore denſior, *a.* 154. ſpecifice gravior, 155.
Aëris compreſſi in vaſe ope antliæ ratio ad primitivum, *a.* 66. & *ſeqq.* compreſſi in vaſe in aqua ſubmerſo elater quantus ſit, 108. compreſſi vi elaſtica quomodo aqua moveatur, *h.* 87. 89. & *ſeqq.*
Aëris denſitas ubi eadem, *a.* 46. 47.
Aëris ex vaſe educti per antliam quantitas quomodo inveniatur, 103.
Aëris pes cubicus quantum ponderet, 56. 57.

Aëris rareſactione quomodo aqua expellatur, *h.* 91.
Aëris reſidui in vaſe ope antliæ evacuato ratio ad primitivum, *a.* 50. 51.
Aërometria. Definitio, 1. quænam in ea tradenda, 2.
Alarum molendini ſitus optimus quomodo determinetur, *h.* 316.
Altitudines jactuum ſub diverſis angulis quomodo ſint inter ſe, *m.* 504. 505.
Altitudo aſcenſus ponderis ſuper plano inclinato quomodo ſe habeat, 269. 270.
Altitudo jactus quomodo ſe habeat ad parametrum, 503.
Altitudo maxima, ad quam grave oblique projectum aſcendit, 499. 501. 502.
Altitudo viva fluminis, *h.* 228.
Alveus fluminis. Definitio, *h.* 185.
  artificialis, 186.
  naturalis, ibid.
Amplitudo ſemitæ projectilis. Definitio, *m.* 489. quomodo ſit ad ſemitam, 491. & *ſeqq.* quando ſemiparametro æqualis, 495. quando maxima, 494. quomodo maxima inveniatur, 497. quomodo ceteræ ex ea eruantur, 496.
Anemometrum. Definitio, *a.* 181. conſtructio, 182.
Angulus directionis. Definitio, *m.* 240.
Augulus elevationis in motu projectorum. Definitio, *m.* 478. quomodo determinetur, ut projectile feriat locum datum, 506.
Angulus incidentiæ. Definitio, 550.
Angulus reflexionis. Definitio, 551.
Antliæ attractivæ conſtructio, *h.* 110.
Antliæ Cteſibianæ conſtructio, 113. & *ſeqq.*
Antliæ pneumaticæ. Definitio, *a.* 38. inventor, 39. conſtructio, 40. uſus, 41. & *ſeqq.* capacitas quomodo determinanda, 54. 55.
Antliæ pneumaticæ quomodo inter ſe comparandæ, 53.
Aqua quomodo vires ad agitandas machinas concipiat, *m.* 900. per exiguum orificium in vas immittatur, *a.* 149. per ſectionem canalis horizontalis fluat, *h.* 235. & *ſeqq.* quo derivari poſſit, 9. quomodo ex loco uno in alterum derivetur, 13. & *ſeqq.* in locum excelſiorem deducatur, 126. 127. per ſiphonem aſcendat, 66. ope catenarum ſitulis inſtructarum elevetur, 116.
Aqua proſiliens quantum aſcendat, *h.* 49. & *ſeqq.* 56. 57.
Aquæ gravitas ſpecifica, *ſ.* 77.
Aquæ libere fluentis in alveo qua de cauſa acceleretur, *h.* 200. quantum acceleretur, 201. & *ſeqq.*
Aquæ quantitas in vas inverſum aſcendens, dum eidem immergitur, quomodo determinetur, *a.* 109. & *ſeqq.*
Aquæ ſaltus per lumen horizontale, *h.* 58. & *ſeqq.* per verticale, 49. & *ſeqq.*
Aquarum quantitates per tubos effluentes, *h.* 20. & *ſeqq.*
Arcus circuli centrum gravitatis, *m.* 165.
Ars libellandi. Definitio, 904. regulæ, 911.
Aſcenſus aquæ proſilientis, *h.* 49. & *ſeqq.* 56. 57.
Aſcenſus celeritate per deſcenſum acquiſita factus quomodo ſe habeat, *m.* 339.
Aſcenſus in lineis curvis demonſtratus, *m.* 334. & *ſeqq.*
Aſſarium. Definitio, *h.* 104. conſtructio, 106.
Axis quid ſignificet in Mechanica, *m.* 756. 757.
Axis in peritrochio. Definitio, 756. theoria & praxis, 792. & *ſeqq.*
Axis oſcillationis. Definitio, 379.

B.

Barometrum. Definitio, *a.* 89. theoria, 124. & *ſeqq.* conſtructio, 131.
Baroſcopium. Definitio, 89. ſenſibilioris conſtructio, 136. & *ſeqq.*
Baroſcopii compoſiti conſtructio, 134.
  inclinati theoria, 141. & *ſeqq.*
Baſis corporis gravis quid ſit, *m.* 221.

C.

C.

Calcando quomodo machina moveatur, *m.* 886. 888.
Calcatio quid ſit, 874.
Canalis quid dicatur, *h.* 3.
Cavitas corporis ſpecifice gravioris quanta eſſe debeat, ne fluido leviori ſupernatet, *ſ.* 111.
Celeritas. Definitio, *m.* 13. quod tempori proportionalis, 14. 15. quid proprie ſit, 16. quomodo a Mathematicis conſideretur, 114. quando eadem ex ictu corporum reſultet, 534. quando in conflictu non mutetur, 590. quando mutetur, 560. 562. 576. quanta aquæ per foramen vaſis erumpentis, *h.* 48.
Celeritas abſoluta. Definitio, *h.* 305.
Celeritas acquiſita per deſcenſum perpendicularem, *m.* 92. in plano inclinato, 29. 192. 303. *& ſeqq.* in curva, 308.
Celeritas aquæ in alveo an major in fundo, quam ſuperficie, *h.* 206. per canalem declivem fluentis num augeatur ob preſſionem a ſuperiori, 243. *& ſeqq.*
Celeritas corporum elaſticorum in concurſu quomodo determinetur, *m.* 571.
Celeritas fluidi per ſiphonem effluentis, *h.* 81. *& ſeqq.* vi aëris compreſſi ejecti, 92. *& ſeqq.*
Celeritas in motu compoſito quomodo inveniatur, *m.* 252.
Celeritas media in fluminibus quomodo inveniatur, *h.* 238. *& ſeqq.* aquæ per canalem horizontalem fluentis, 263. *& ſeqq.*
Celeritas penduli in puncto infimo qualis ſit, *m.* 401.
Celeritas projectilis quomodo inveniatur, 514.
Celeritas reſpectiva. Definitio, *h.* 305.
Celeritates quando in conflictu corporum permutentur, *m.* 563. 565.
Celeritates acquiſitæ in conflictu corporum elaſticorum quomodo ſe habeant, *m.* 603. *& ſeqq.* in diverſis planis inclinatis eodem tempore quomodo ſe habeant, 301. 302.
Celeritates amiſſæ in conflictu corporum elaſticorum quomodo ſe habeant, *m.* 603.
Celeritates aquarum per tubos effluentium, *h.* 36. *& ſeqq.*
Celeritas terminalis in motu corporum quænam dicatur, *m.* 727. quomodo determinetur, 728. *& ſeqq.*
Celeritates terminales in fluminibus. Definitio, *h.* 237. quomodo inveniantur, 239.
Celeritatum locus in motu gravium quænam ſit curva, *m.* 99.
Celeritatum quadratorum ſumma in conflictu corporum elaſticorum quod conſervetur, 593.
Centrum gravitatis. Definitio, *m.* 122. cur pro gravi corpore ſumi poſſit, 125. quando idem cum centro magnitudinis, 121. quomodo determinetur, 157. quomodo mechanice determinetur, 186. quomodo ſe habeat ante & poſt conflictum, 598. 560.
Centrum gravitatis arcus circuli, *m.* 165. coni, 174. coni truncati, 184. conoidis hyperbolici, 179. parabolici, 175. 176. truncati, 185. corporis humani, 187. cylindri, 143. lineæ rectæ, 142. lunulæ HIPPOCRATIS, 169. parabolæ, 159. 162. parabolæ truncatæ, 170. parabolarum infinitarum, 160. 161. 163. parabolici mixtilinei ſpatii, 189. parallepipedi, 172. parallelogrammi, 172. perimetri trianguli, 190. perimetri figuræ irregularis cujuſcunque, 191. pyramidis truncatæ, 184. pyramidis, 174. ſectoris circuli, 166. ſegmenti circuli, 168. ſegmenti ſphæræ, 177. ſegmenti ſphæroidis elliptici, 180. ſemicirculi, 167. ſphæræ, 178. ſphæroidis truncati, 185. ſphæroidis elliptici, 181. dimidii, 182. trianguli, 158.

Centri gravitatis ſtatus num mutetur ab actione corporum in ſe invicem, *m.* 602.
Centrum gravitatis commune duorum corporum ſeu ponderum quomodo determinetur, 144. 149. quomodo plurium, 151. 192. ponderum æqualium, 145.
Centrum magnitudinis. Definitio, *m.* 132.
Centrum motus. Definitio, *m.* 228.
Centrum oſcillationis. Definitio, *m.* 423. quomodo determinetur, 426. 429. 432. quomodo in figuris in latus agitatis, 445. *&* *ſeqq.*
Centrum oſcillationis coni, *m.* 459. 466. conoidis parabolici, 462. hyperbolici, 464. infinitorum parabolicorum, 463. cylindri, 457. hemiſphærii, 461. 467. lineæ rectæ, 433. parabolæ, 440. 441. 451. 453. parabolarum infinitarum & curvarum agnatarum, 440. 442. 452. rectanguli, 435. 448. ſolidorum rotatione genitorum, 454. ſphæræ, 460. ſphæroidis elliptici, 465. trianguli æquicruri, 436. 437. 438. 449. 450.
Centrum percuſſionis. Definitio, *m.* 527. quando cum centro oſcillationis idem, 547. quando idem cum centro gravitatis, 549.
Centrum velocitatis, *h.* 268.
virium. Definitio, *m.* 654.
Ceræ gravitas ſpecifica, *ſ.* 77.
Circuli area quomodo inveniatur, *m.* 198.
Clavicula. Definitio, *h.* 5. conſtructio, 7. 8.
Clepſidræ diviſio, 45. *&* *ſeqq.*
Cochlea. Definitio, *m.* 760. theoria, 847. *&* *ſeqq.* praxis, 852. *&* *ſeqq.*
Cochlea mas, *m.* 760.
fœmina, *ibid.*
Cochlea Archimedis quomodo conſtruatur, *h.* 122. *&* *ſeqq.*
Cochlea infinita ſeu *perpetua.* Definitio, *m.* 855. theoria, 856. 858. *&* *ſeqq.* praxis, 862. *&* *ſeqq.*
Compreſſio. Definitio, *a.* 5.
Compreſſio aëris in vaſe ſub aqua detento, *a.* 106.
Conatus. Definitio, *m.* 18.
Condenſatio. Definitio, 6.
Condenſatio aëris quomodo æſtimanda, 114. *&* *ſeqq.*
Coni centrum gravitatis, *m.* 184. centrum oſcillationis, 459. 466. ſoliditas quomodo inveniatur, 202. 204. 205. quomodo ſuperficies, 202. 203.
Conoidis hyperbolici centrum gravitatis, *m.* 179. centrum oſcillationis, *m.* 464.
Conoidis parabolici centrum gravitatis, 175. 176. centrum oſcillationis, 462.
Conoidis truncati centrum gravitatis, 185.
Conoidum parabolicorum infinitorum centrum oſcillationis, *m.* 463.
Corpora æqualium baſium quantum ab aëre premantur, *a.* 45.
Corpora gravia num eadem celeritate deſcendant, *m.* 133. 134.
Corporis humani centrum gravitatis, 187.
Corporis pars immergenda in fluido quando inveniatur, *ſ.* 105.
Corporis ſpecifice gravioris gravitatio in fluido ſpecifice leviori, *ſ.* 55. *&* *ſeqq.*
Corporum in aëre æquilibratorum æquilibrium quando tollatur, *a.* 158.
Corpus motu reflexo qua via ab uno termino ad alterum accedat, *m.* 558.
Corpus aſperum. Definitio, *m.* 935.
Corpus durum, 520.
elaſticum, 521.
fluidum, *ſ.* 3.
molle, *m.* 521.
ſolidum, *ſ.* 4.
Cunei theoria, *m.* 865.
Currus onuſtus cur difficilius trahatur ſuper plano inclinato, quam horizontali, 277.
Curva, in qua grave deſcendens eam conſtanter ei ponderi abſoluto æquali premit, 672.
Curva in qua grave deſcendens eam conſtanter eadem vi, ſed non ponderi abſoluto

luto æquali premit, 673. quæ a pondere deſcendente premitur in ratione dignitatum altitudinum, 675.

Curva acceſſus & receſſus æquabilis. Definitio, 347. quomodo inveniatur, 349.

Curva æquilibrationis. Definitio, 369. quomodo inveniatur, 371. quomodo deſcribatur, 373.

Curva brachyſtochrona. Definitio, 355. quomodo inveniatur, 357.

Curva celerrimi deſcenſus. Definitio, 355. quænam ſit, 357.

Curva elaſtica BERNOULLI, 675.

Curva iſochrona. Definitio, 331. quomodo inveniatur in hypotheſi Galilæana, 334. in hypotheſi directionum convergentium, 336. hujus rectificatio, 338. quadratura, 339. quomodo inveniatur in quacunque accelerationis hypotheſi, 343.

Curva iſochrona paracentrica. Definitio, *m.* 347. quomodo inveniatur, 349.

Curva oligochrona. Definitio, 355. quomodo inveniatur, 357.

Curva reſiſtentiæ in motu gravium, 708.
inſtantaneæ, 682.
totalis, ibid.

Curva ſynchrona. Definitio, 366. quomodo conſtruatur, 368.

Curva tautochrona. Definitio, 351. quænam ſit, 352.

Cycloidis proprietates mechanicæ, *m.* 352. 357. 675. proprietates ſingulares, 311. 388. quomodo per data tria puncta deſcribatur, 361.

Cyclois externa circularium ſegmentorum repræſentatrix, 358.

Cylindri centrum gravitatis, 143. oſcillationis, 457. ſoliditas, 197. 200. 201. ſuperficies quomodo inveniatur, 200.

D.

D*Enſitates* quando ſunt ut maſſæ, *ſ.* 14. quando ut gravitates, 16. quando reciproce ut volumina, 23.

Denſitatum ratio, 24. 25.

Denſitates fluidorum quomodo ſe habeant, *ſ.* 39. quomodo inveniantur, 67. reſpectivæ quando determinentur, 40.

Denſitas aëris ubi eadem, *a.* 46. 47. quomodo creſcat, 153. num inferioris ponderi atmoſphærico proportionalis, 156.

Denſius. Definitio, 8.

Deprimendo movere quid ſit, *m.* 871.

Deſcenſus gravium intra minutum ſecundum quomodo determinetur, 472. quantus ſit, 473.

Deſcenſus gravium in cycloide quomodo ſe habeat, *m.* 311. in lineis curvis demonſtratus, 334. *& ſeqq.* in plano inclinato cum deſcenſu per verticale collatus, 293. *& ſeqq.* cum deſcenſu perpendiculari iiſdem legibus adſtrictus, 289.

Deſcenſus ſpecifice gravioris in fluido leviori, *ſ.* 88. *& ſeqq.*

Diabetis conſtructio, 72. phænomena, 73. *& ſeqq.*

Diagonalis parallelogrammi quando motu compoſito deſcribatur, *m.* 241. quo tempore deſcribatur, 244.

Diameter gravitatis. Definitio, *m.* 126.

Dilatatio. Definitio, *a.* 7.

Directiones quomodo opponantur, 21.

Diſtantiæ ponderum a centro gravitatis communi quomodo ſe habeant, 144.

Diſtantiæ a centro gravitatis & centro motus qualis ſit linea, 229.

E.

E*Ffectus aëris compreſſi* quomodo computentur, *a.* 83. *& ſeqq.*

Effectus pleni quomodo ſe habeant, *m.* 530.

Elateris æſtimatio, *m.* 553.

Elateris vi quomodo machina moveatur, 897.

Elater aëris. Definitio, *a.* 9. quando non mutetur, 12. quando creſcat & decreſcat,

ſcat, 12. exiſtentia, 18. menſura, 30. *& ſeqq.* quod calore intendatur, 146. frigore minuatur, 147.
Elateris aëris directio, 25. 26. menſura ejus, quo rarefiens expanditur, 148.
Elater aëris compreſſi quomodo ſe habeat ad elaterem dilatati, 78. quando fortior, 79. quomodo determinetur, 81. magis compreſſi ad elaterem minus compreſſi quomodo ſe habeat, 80.
Elevatio quid ſit, *m.* 873.
Ellipſeos æquatio abſciſſis a foco computatis, *m.* 667.
Epiſtomium. Definitio, *h.* 5. conſtructio, 7. 8.
Ergata qualis machina, *m.* 877.

F.

F*Iguræ ſuperficialis & ſolidæ magnitudo* ex centro gravitatis determinata, *m.* 192.
Figurarum per planum deorſum latum deſcriptarum ſoliditas quomodo inveniatur, 196.
Fluida homogenea quando in æquilibrio, *ſ.* 34. quodnam præponderet, 35.
Fluida heterogenea quando in æquilibrio, 36.
Fluidi ex vaſe inverſo exigui orificii effluentis quantitas quomodo determinetur, *a.* 100. *& ſeqq.*
Fluidi gravioris in ſpecifice leviori ponderatio, *ſ.* 87. *& ſeqq.*
Fluidi pondus quomodo inveniatur, 62. 63.
Fluidi partes inferiores num comprimantur a ſuperioribus, 71. 72.
Fluidi per ſiphonem effluentis acceleratio, *h.* 81. *& ſeqq.*
Fluidorum diverſæ gravitatis ſpecificæ æquilibrium, 36.
Fluidorum denſitates quomodo inveniantur, 67.
Fluidorum diverſæ gravitates ſpecificæ quomodo inveniantur, 66. 70. quomodo ſe habeant, 95.
Fluidorum indirecte ac directe impingentium juxta lineas parallelas theoria, *h.* 367. *& ſeqq.*
Fluidorum variorum gravitas in pollice cubico Pariſino, *ſ.* 69.
Flumen detumeſcere quando dicatur, *h.* 199.
Flumen intumeſcere quando dicatur, *ibid.*
Fluminum curſus theoria, *h.* 185. *& ſeqq.*
Fons naturalis quomodo arte conſtruatur, *h.* 18.
Fontis intermittentis conſtructio, *h.* 143. 152.
Fontium ſalientium conſtructio, 128. *& ſeqq.* 152. *& ſeqq.*
Frictio. Definitio, *m.* 933. quomodo æſtimanda, 940. *& ſeqq.* quomodo minuatur, 943. *& ſeqq.* 956. *& ſeqq.*
Fulcra quomodo corpori ſupponenda, ut in data ratione premantur, *m.* 234.
Funis canabini contractio ob humiditatem aëris, *a.* 215. 216.

G.

G*Rave* quando quieſcat, *m.* 123. 124. 222. quando firmiter inſiſtat, 223. quando cadat, 222. num ſit a lapſu immune quomodo inveniatur, 224. quo motu deſcendat, 79. 85. *& ſeqq.* quomodo in plano inclinato deſcendat, 261. *& ſeqq.*
Gravium linea directionis, 212. *& ſeqq.*
Gravia heterogenea. Definitio, *m.* 131.
Gravia homogenea, 130.
Gravitas. Definitio, *m.* 4. quomodo ſpectetur a Mathematicis in motu gravium, 114. num in omni diſtantia eadem, 78. quod a polis verſus æquatorem continuo decreſcat, 390.
Gravitates quando ſunt ut volumina, *ſ.* 18.
Gravitatis actio diverſa quomodo ex motu pendulorum colligatur, *m.* 389.
Gravitatis planum. Definitio, 128.
Gravitas abſoluta. Definitio, *m.* 259. ad reſpectivam ponderis ſuper plano inclinato quomodo ſeſe habeat, 261. 263.

Gravitates abſolutæ quomodo ſe habeant, *ſ.* 31.
Gravitas aëris evicta, *a.* 20. quod ſit variabilis, 121. *& ſeqq.*
Gravitas ſpecifica determinata, 27. *& ſeqq.*
Gravitas reſpectiva. Definitio, *m.* 260. quando in abſolutam degeneret, 266. quando nulla, *ibid.* ſuper plano inclinato quomodo creſcat & decreſcat, 265.
Gravitates reſpectivæ ponderum ſuper diverſis planis inclinatis quomodo ſint ad ſe invicem, 264.
Gravitas ſolidi quomodo inveniatur, *ſ.* 78. 79.
Gravitas ſpecifica corporum quando eadem, 19. 30. quando diverſa, 20.
Gravitates ſpecificæ quomodo ſe habeant, 32. 33. 65. quando ſint ut volumina reciproce, 29. quando ut maſſæ, 28. quando ut abſolutæ, 26.
Gravitas ſpecifica fluidorum quomodo inveniatur, *ſ.* 37. 66. 70. quod æſtate ac hieme non eadem, 69.
Gravitates ſpecificæ fluidorum quomodo ſe habeant, 95.
Gravitatis ſpecificæ fluidi ad gravitatem ſpecificam ſolidi gravioris ratio quomodo determinetur, 93.
Gravitas ſpecifica ſolidi quomodo determinetur, *ſ.* 75. 76. quomodo ſe habeat ad gravitatem fluidi, 101.
Gravitates ſpecificæ ſolidorum æqualium quomodo ſe habeant, 103.
Gravitatio. Definitio, *m.* 5. in fulcra, a quibus ſuſtentatur, 231. ſuper plano inclinato qualis ſit, 261.
Gravitatio corporum ſpecifice leviorum in fluido graviori, *ſ.* 94. *& ſeqq.*
Gravitatio ſpecifice graviorum in fluido leviori, 34.

H.

Hemiſphæria evacuata quanta vi comprimantur, *a.* 59. *& ſeqq.*
Hemiſphærii centrum oſcillationis, *m.* 461. 467.
Horologii oſcillatorii conſtructio, *m.* 994.
Hydracontiſterii conſtructio, *h.* 168.
Hydraulica. Definitio, 1.
Hydroſtatica. Definitio, *ſ.* 1.
Hygrometrum. Definitio, *a.* 197.
Hygroſcopium. Definitio, 197. conſtructio, 220.
Hyperbolæ æquatio abſciſſis a foco computatis, *m.* 668.
Hypomochlium. Definitio, *m.* 753.
Hypotheſis Galilæana de motu gravium, *m.* 89. *& ſeqq.*
Hypotheſis BALIANI de motu gravium, 102. ejus impoſſibilitas demonſtrata, 115.

I.

Ictus quomodo ſe habeant in conflictu corporum, *m.* 567.
Ictus perpendicularis ad obliquum ratio, 552.
Ignis vi quomodo machinæ agitentur, 931.
Impactus directus corporis unius in alterum. Definitio, 523.
Impactus indirectus ſive obliquus. Definitio, 526.
Impetus. Definitio, 543.
Inceſſus hominum quomodo fiat, 226.
Incurſus fluidorum eodem modo fieri quando dicatur, *h.* 276.
Inſtrumenta quænam ad vectem revocabilia, *m.* 750.
Inſtrumenti conſtructio, quo quantitas ſalis in aqua ſalſa exploratur, *ſ.* 108. *& ſeqq.*

L.

Lampadis conſtructio, quæ eandem quantitatem olei ellychnio affundit, *h.* 155.
Lapidis gravitas ſpecifica, *ſ.* 77.
Lapſus. Definitio, *m.* 211.
Lapſus gravium unde pendeat, 222.
Lex motus, 71.
Libella. Definitio, *m.* 906. conſtructio, 907. *& ſeqq.* rectificatio, 910.
Libellatio aquarum quomodo inſtituenda, 911.

Libræ theoria, *m.* 779. *& ſeqq.* conſtructio, 782. *& ſeqq.* examen, 787. uſus, 788. *& ſeqq.*
Linea directionis. Definitio, *m.* 17.
Linea directionis gravium, 212. *& ſeqq.*
Linea horizontalis vera. Definitio, 207. qualis ſit, 208.
Linea horizontalis apparens. Definitio, *m.* 209. qualis ſit, 210. quando pro vera aſſumi poſſit, 218. quomodo ad veram reducatur, 216.
Lineæ rectæ centrum gravitatis, 142. centrum oſcillationis, 433.
Logarithmicæ proprietas, 682.
Lumen tubi quid ſit, *h.* 4.
Lunulæ HIPPOCRATIS centrum gravitatis, *m.* 169.

M.

M*Achina.* Definitio, *m.* 745.
Machina ingenti ponderi elevando apta, *m.* 969. ad conterendam materiam pulveris pyrii ſerviens, 989. *& ſeqq.* qua aqua inſigni cum impetu elevatur, *h.* 166.
Machinæ, quibus aqua elevatur, *h.* 107. *& ſeqq.*
Machinæ compoſitæ. Definitio, *m.* 966. earum numerus, 967. quomodo inveniantur, 968.
Machinamenta hydraulica, *h.* 161. *& ſeqq.*
Magnetis gravitas ſpecifica, *ſ.* 77.
Malluvii cum fonticulo ſaliente conſtructio, *h.* 145.
Manometri theoria, *a.* 151.
Manoſcopium. Definitio, *a.* 160. conſtructio, 161. *& ſeqq.*
Marmoris gravitas ſpecifica, *ſ.* 77.
Maſſa. Definitio, *m.* 6. quomodo æſtimanda, 138. quorumnam corporum æqualis, *ſ.* 12.
Maſſæ corporum quomodo ſe habeant, *ſ.* 21. 22. quando ſint ut volumina, 17.
Maſſæ bonæ ab adulteratis quomodo diſtinguantur, 83. *& ſeqq.*
Materia quænam cum corpore gravitet, *m.* 136.
Mechanica. Definitio, *m.* 1.
Mechanice philoſophari quid ſignificet, *m.* 746.
Metallorum gravitates ſpecificæ, *ſ.* 77.
Methodus centrobaryca GULDINI, *m.* 208.
Miſcibilium quantitas in mixto quomodo inveniatur, *ſ.* 81.
Mobile quando in curva ea lege incedat, ut radius vector verrat areas tempori proportionales, *m.* 652.
Molæ alatæ, *m.* 982. frumentariæ, 975. *& ſeqq.* jumentariæ, 981. manuariæ, 979. oleariæ, 983. *& ſeqq.* ſerrariæ conſtructio, 992.
Moles. Definitio, 7. quomodo inveniatur, 8.
Momentum gravium quid dicatur, *m.* 147.
Momenta corporum extra centrum gravitatis ſuſpenſorum, 153.
Momenta ponderum ſuper plano inclinato ſpectatorum, 271.
Motus. Definitio, *m.* 2. quando acceleretur, 76. quando in medio reſiſtente nunquam extinguatur, 690. retardetur, 77. quando nullus ſequatur, 75. cur naturalis rectilineus, 73. ſuper plano inclinato deſcendentis qualis ſit, 284. *& ſeqq.* quando per reflexionem non mutetur, 555.
Motus æquabilis. Definitio, *m.* 24. theoria, 27. *& ſeqq.* 31.
Motus acceleratus. Definitio, 67. theoria, 101. *& ſeqq.*
Motus animalium explicandi principium, 216.
Motus compoſitus. Definitio, 238. theoria, 241. *& ſeqq.*
Motus corporis impingentis quando ceſſet, 544.
Motus in conflictu amiſſus quomodo determinetur, 541.
Motus ex percuſſione demonſtratus, 530. *& ſeqq.*
Motus perfecte durorum, 532. *& ſeqq.*
Motus elaſticorum, 560. *& ſeqq.*

Motus

Motus oblique impingentium quomodo determinetur, *m.* 616.
Motus curvilineus qualis, 239. quænam ejus cauſa, 74.
Motus fluminum theoria, *h.* 210. & *ſeqq.*
Motus gravis aſcendentis qualis ſit, *m.* 317. quibus legibus adſtringatur, 318. & *ſeqq.*
Motus gravium, qua lege acceleretur, 86. 87. in medio reſiſtente, 708. & *ſeqq.*
Motus pendulorum demonſtratus, 380. & *ſeqq.*
Motus projectorum demonſtratus, 479. & *ſeqq.*
Motus rectilinei in compoſitum reſolutio, 245. 246.
Motus retardatus. Definitio, *m.* 70.
Motus ſimplex. Definitio, 237.
Motus uniformiter acceleratus. Definitio, 67. ejus ratio, 80. & *ſeqq.*
Motus uniformiter retardati ratio, 97. & *ſeq.*
Moveri quando dicatur corpus, 3.

N.

N*Ervi fidium* mutatio quoad longitudinem ob humiditatem aëris, *a.* 218.

O.

O*Nus ferendum* quomodo in data ratione diſtribuatur, *m.* 235.
Oſcillatio. Definitio, 376.
Oſcillatio penduli in cycloide quomodo determinetur, 337. quomodo efficiantur iſochronæ, 382. & *ſeqq.*
Oſcillationes pendulorum inter ſe comparatæ, 392. & *ſeqq.*

P.

P*Arabola* curva temporis in motu gravium, *m.* 100. locus celeritatum in motu gravium, 99. via corporis projecti, 480. 482. quomodo deſcribatur, 486.
Parabolæ æquatio abciſſis a foco computatis, *m.* 666. centrum gravitatis, 159. 162. centrum oſcillationis, 451. 453. uſus in motu fluminum explicando, *h.* 229. & *ſeq.*
Parabolæ truncatæ centrum gravitatis, *m.* 170.
Parabolarum infinitarum centrum gravitatis, *m.* 160. 161. 163. centrum oſcillationis, 440. 442. 452.
Parallelogrammi centrum gravitatis, 172. area quomodo inveniatur, 194.
Parallelopipedi centrum gravitatis, 172.
Pendulum. Definitio, *m.* 376. cur oſcilletur, 380.
Penduli agitatio in latus, 444.
in planum, ibid.
Pendulorum intra cycloides ſuſpenſorum longitudines quomodo ſe habeant, 396. & *ſeqq.*
Pendulum ſimplex. Definitio, 377.
Compoſitum, 378.
Percuſſio fluidi. Definitio, *h.* 269. qualis ſit, 270. 271. quænam in ea æſtimanda reſpicienda, 272. 273. 274. theoria, 280. & *ſeq.*
Perimetri figuræ irregularis cujuſcunque centrum gravitatis, *m.* 191.
Perimetri trianguli centrum gravitatis, 191.
Peritrochium quid dicatur, 756.
Pes horarius. Definitio, *m.* 425. quantitas, 470. quomodo determinetur, 469. num ſit menſura univerſalis, 471.
Plana diverſa quomodo ab aëre premantur, *a.* 61.
Plana ſimiliter inclinata quænam ſint, *m.* 312.
Plani horizontalis determinatio, 219.
Plani inclinati longitudinis ad altitudinem ratio quomodo in praxi facile determinetur, *m.* 277. theoria & praxis, 261. & *ſeq.*
Planum inclinatum. Definitio, 258. quomodo determinetur, ſuper quo datum pondus data vi ſuſtentetur, 268.
Poculi conſtructio, quo bibenti illuditur, *h.* 74.
Polyſpaſti theoria & praxis, *m.* 833. & *ſeqq.*
Pondus. Definitio, *m.* 248. quomodo hydroſtatice inveniatur, *ſ.* 104. quando in aëre minuatur, & augeatur, *a.* 157. ejus vi quomodo machina moveatur, *m.* 890. & *ſeqq.* potentia adjuvetur, 896.
Pondus columnæ atmoſphæricæ quomodo inveniatur, *a.* 59.

Pondus corporis in vacuo quomodo inveniatur, *a.* 58.
Pondus appenſum quando corpus in plano horizontali poſitum e ſitu horizontali dimovere nequeat, *m.* 233.
Pondera ſuper curvis æquiponderantia, *m.* 347.
Ponderum ſuper planis inclinatis æquiponderantium ratio ad ſe invicem, 281. 283.
Ponderis aeris incrementum ob variatum pondus atmoſphæricum quomodo determinetur, *a.* 159.
Potentia. Definitio, 747. cuinam ſit æqualis, 763.
Potentia animata, 869.
inanimata, 869.
movens, 747.
reſiſtens, ibid.
Præponderatio corporum duorum extra centrum gravitatis commune ſuſpenſorum quomodo determinetur, *m.* 152. quomodo plurium, 155.
Præponderatio fluidi homogenei, *ſ.* 35.
Preſſio fundi vaſorum a fluidis, *ſ.* 41. & *ſeqq.* quando eadem, 42. 43. 47. 200. quomodo decreſcat, 44. 45. ſi baſes vaſis fuerint inæquales, 48.
Preſſiones fundi vaſorum a fluidis quam habeant rationem, 46.
Principium rationis ſufficientis, *m.* 25. 26.
Priſmatis ſoliditas quomodo inveniatur, 197.
Problema Archimedæum de corona ex auro & argento mixta quomodo ſolvatur, *ſ.* 82.
Problema de curva iſochrona ad omnem univerſalitatem revocatum, *m.* 345.
Projectilis motus per ſpatia horizontalia qualis, 490.
Projectum horizontaliter vel oblique qualem lineam deſcribat, 480. 482.
Projectio horizontalis. Definitio, *m.* 476. qualis hinc oriatur motus, 480.
Projectio obliqua. Definitio, 477. qualis hinc oriatur motus, 488.
Projectio perpendicularis. Definitio, *m.* 475. quinam hinc oriatur motus, 479.
Projectionis curva quomodo inveniatur directionibus gravium ſuppoſitis parallelis, 516. iiſdem ſuppoſitis convergentibus in centro Telluris, 518.
Pyramidis truncatæ centrum gravitatis, 184.

Q.

Quantitas materiæ in diverſis corporibus quomodo per pendula definiatur, *m.* 406. & *ſeqq.* quod ponderi proportionalis, 412.
Quantitas motionis. Definitio, 22. 23.
Quantitas motus. Definitio, *m.* 22. 23. quando ante & poſt conflictum eadem, 581. 585. quando non, 582. & *ſeqq.* quando augeatur, 588. quando minuatur, 589. in corporibus homogeneis quomodo ſe habeat, 139.
Quies, Definitio, *m.* 2.
Quies ex ictu corporum reſultans, 533. 538. gravium unde pendeat, 222.

R.

Radius vector. Definitio, *m.* 655.
Rarefactio. Definitio, *a.* 8.
Rarefactio aëris evicta, *a.* 23. quomodo eadem aqua expellatur, *h.* 91.
Rarius. Definitio, *ſ.* 10. quod ſpecifice levius denſiori, 11.
Rectanguli centrum oſcillationis, *m.* 435. 448.
Reflexio corporis oblique impingentis qualis ſit, *m.* 556.
Reflexionis lex analytice inveſtigata, 557.
Reſiſtentia, quam patiuntur corpora per fluida mota, *h.* 301. & *ſeqq.*
Reſiſtentia medii. Definitio, *m.* 677. quomodo determinetur, 679. & *ſeqq.*
Roſarii conſtructio, *h.* 118. 119.
Rota directa. Definitio, *m.* 899. conſtructio, 923. quomodo vi aquæ agitetur, 920.
Rota retrograda. Definitio, 899. quomodo vi aquæ agitetur, 924. & *ſeqq.*
Rota ſitulis inſtructa quomodo conſtruatur, *h.* 120.

Rotarum dentatarum & radiatarum lignearum conſtructio, *m.* 997.

S.

Salis quantitas in aqua ſalſa quomodo determinetur, *ſ.* 108. *& ſeqq.*

Saltus aquæ per lumen horizontale, *h.* 58. *& ſeqq.* per verticale, 49. *& ſeqq.* vi aëris compreſſi factus quantus ſit, 96. *& ſeqq.* 101. vi rarefacti factus quantus, 102.

Scytalæ quænam vocentur, *m.* 757.

Sectio alvei. Definitio, *h.* 188.

Sectio alvei naturalis, 190. qualis figura, 192.

Sectio alvei artificialis, 190. qualis figura, 193.

Sectio alvei tardior, 196.

velocior, ibid.

Sectiones æquiveloces. Definitio, *h.* 195. 209.

Sectio fluminis. Definitio, *m.* 39. quomodo inveniatur, 914. 915.

Sectiones diverſæ fluminis quam habeant rationem, 916.

Sectoris circuli centrum gravitatis, 166.

Segmenti circuli centrum gravitatis, *m.* 168.

Segmenti ſphæræ centrum gravitatis, 177.

Segmentorum circuli ratio, 364.

Segmentorum curvarum ſimilium ratio, 364.

Semicirculi centrum gravitatis, 167.

Semita projectilis. Definitio, *m.* 488. quomodo deſcribatur, 510. parameter quomodo inveniatur, 491.

Similitudinis principiorum in Geometria fœcunditas, 365.

Sipho anatomicus, *ſ.* 52. uſus, *ibid.*

Siphonis interrupti conſtructio & uſus, *h.* 77. *& ſeqq.*

Siphonum conſtructio, 64. 66.

Situla baculo ſupra menſam poſito appenſa quando non decidat, *m.* 233.

Solidum quanta ſui parte mergatur, *ſ.* 94. quando profundius mergatur, 96. 97. quando datum intra fluidum locum ſervet, 98.

Solidum minimæ reſiſtentiæ quomodo inveniatur, *h.* 319.

Solidorum æquiponderantium in partes fluido ſubmerſæ quando æquales, *ſ.* 101.

Sollicitatio ad motum. Definitio, *m.* 110. quomodo determinetur ex lege accelerationis, 112. in motu compoſito quomodo ſe habeat, 253.

Spatium motus. Definitio, *m.* 12.

Spatii parabolici mixtilinei centrum gravitatis, *m.* 189.

Specifice gravius. Definitio, *ſ.* 6. quod ſit denſius, 9.

Specifice levius. Definitio, 5. quod rarius, 11. quando fundo vaſis incumbens a fluido non attollatur, 100. quando ſpecifice graviori connexum in fluido non aſcendat, 118. 122. *& ſeqq.* 127.

Sphæræ centrum gravitatis, *m.* 178. centrum oſcillationis, 460.

Sphæroidis elliptici centrum gravitatis, 181. 182. centrum oſcillationis, 465.

Sphæroidis elliptici ſegmenti centrum gravitatis, 180.

Sphæroidis truncati centrum gravitatis, 185.

Spiritus vini quantum rarefiat, *a.* 152.

Statica. Definitio, *m.* 1.

Stateræ conſtructio, 774. *& ſeqq.*

Sulphuris gravitas ſpecifica, *ſ.* 77.

Superinceſſus radens, *m.* 936.

volvens, 937.

mixtus, 938.

Symmetriæ corporis humani ratio, 227.

Syrinx quomodo conſtituatur, *h.* 107. quo impetu aqua expellatur, 108.

T.

Tempus motus, Definitio, *m.* 11.

Tempus deſcenſus per planum inclinatum, 309. *& ſeqq.* per curvam quomodo determinetur, 353. quomodo per convexitatem curvæ, 354.

Tempora deſcenſus per plana ſimiliter inclinata, 314. *& ſeqq.* per curvas ſimiles & ſimiliter poſitas, 316.

Tempora, quib. vaſa deplentur, *h.* 41. *& ſeqq.*

Temporis curva in motu gravium, *m.* 100.
Tendentia. Definitio, 255.
Tendentia media. Definitio, 255. quomodo inveniatur, 256.
Thermometrum. Definitio, *a.* 196.
Thermoſcopium. Definitio, 196. conſtructio, 198. 202. *& ſeqq.* in uſu notanda, 214.
Tractio. Definitio, *m.* 872.
Trahendo quomodo machina moveatur, 878. 879. 887.
Trahendo & deprimendo ſimul quomodo machina moveatur, 882.
Trahendo & protrudendo ſimul quomodo machina moveatur, 884.
Trajectoria quænam linea dicatur, *m.* 519. quomodo inveniatur ex lege virium centripetarum, 664.
Trajectoria quomodo inveniatur ſi vis centripeta fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris, 669. quomodo hujus æquatio inveniatur, 670.
Trianguli centrum gravitatis, 158.
Trianguli æquicruri centrum oſcillationis, 436. *& ſeqq.* 449. 450.
Trochlea. Definitio, *m.* 759. theoria & praxis, 826. *& ſeqq.*
Trudendo movere quid ſit, 870.
Trudendo quomodo machina moveatur, 870.
Tubus in Hydraulica quid dicatur, *h.* 3.
Tubus Torricellianus. Definitio, *a.* 87. ſymptomata, 91. *& ſeqq.* 120. *& ſeqq.*
Turres Bononienſis & Piſana inclinatæ cur a lapſu immunes, *m.* 225.
Tympani conſtructio, quo aqua elevatur, *h.* 120.

U.

VAlvula. Definitio, *h.* 104. conſtructio, 106.
Vas ad hortos irrigandos aptum quomodo conſtruatur, 163.
Vaſa concordiæ quomodo conſtruantur, 180.
Vectis. Definitio, *m.* 749. uſus in explicandis inſtrumentis & motibus animalium, *m.* 751. theoria in hypotheſi directionum perpendicularium, 765. in hypotheſi obliquarum, 272. *& ſeqq.* praxis, 768.
Vectis heterodromus. Definitio, 755.
homodromus, 754.
Velocitas. Definitio, *m.* 13. quid proprie ſit, 16. qua diagonalis in motu compoſito deſcribitur, quanta ſit, 247. 247.
Velocitas in motu compoſito quantitas ab angulo directionis dependens, 251.
Velocitates aquarum per tubos fluentium quomodo ſint inter ſe, *h.* 11.
Velocitas media aquæ in fluminibus, 208.
Ventus. Definitio, *a.* 166. celeritas quomodo determinetur, 167. *& ſeqq.* quomodo oriatur, 185. *& ſeqq.* ex baroſcopio prædicatur, 188. 189.
Venti vi quomodo machina agitetur, *m.* 929.
Venti artificialis excitatio, *a.* 194. 195. ad flammam conſervandam, *h.* 176. *& ſeqq.*
Verſando movere quid ſit, *m.* 875.
Verſando quomodo machina moveatur, 880.
Vis requiſita ad corpus in ſitu horizontali ſuſtentandum, *m.* 230. ad grave ſuper plano inclinato retinendum, 262. ad motum gravis impediendum, 267. ad ſolidum ſubmerſum attollendum, *ſ.* 92. ad ſpecifice levius a fluido graviori ad aſcenſum urgendum, 99. ad ſolidum in fluido ſpecifice leviori ſuſtentandum, 126. ad vas vacuum in aquam immergendum, 113. ad ſpecifice levius ſub fluido graviori detinendum, 114. 120. 121. ad ſolidum in fluido demergendum, 106. qua ſolidum in fluido aſcendit, 107.
Vis ulla num perdatur, 116.
Vires æquales quænam ſint, *m.* 275.
Vires æquiponderantium quomodo æſtimandæ, 146. 273. 274.

Vis

Vis centralis in omni curva quomodo ſe habeat, *m.* 657. in circulo, 658. & *ſeqq.* ſectione conica quavis, 660. curva qualibet quomodo inveniatur, 662.
Vires centrales in circulo quomodo ſeſe habeant, 623. & *ſeqq.*
Vis centrifuga. Definitio, *m.* 617.
Vis centripeta. Definitio, 619. quando urgeat corpus in linea curva motum verſus aliquod punctum, 65.
Vires conſpirantes quænam ſint, *m.* 238.
Vires fluidi in percuſſione quomodo ſeſe habeant, 280. & *ſeqq.*
Vis mortua. Definitio, 910. quomodo æſtimanda, 278.
Vires mortuæ quando ſicut velocitates, *m.* 280.
Vis motrix. Definitio, 9.
Vires percutientes aquarum rotas molares agitantium quomodo ad menſuram revocentur, *h.* 286. & *ſeqq.*
Vis reſiſtendi. Definitio, *m.* 20.
Vis venti, qua alas molendini convertit, *h.* 315.
Vis viva. Definitio, *m.* 9. 10.
Vires vivæ corporum quomodo æſtimandæ, 325. & *ſeqq.*
Volumen. Definitio, *m.* 7.
Volumen ſolidi pondere alteri æqualis quomodo inveniatur, *ſ.* 80.

FINIS INDICIS QUINTI.

VI.

INDEX RERUM ET VERBORUM

TOMO III.

CONTENTORUM.

Notes velim, literam *o.* Opticam, *c.* Catoptricam, *d.* Dioptricam, *p.* Perſpectivam, *ſ.* Sphærica & Trigonometricam ſphæricam, *a.* Aſtronomiam, numeros vero §§. deſignare: ubi autem nulli numeri adſcribuntur, eoſdem referri ad literam præcedentem.

A.

ADnata quid ſit, *o.* 23. ejus uſus, 23.
Adſpectus. Definitio, *a.* 926. ſigna, 929. momentum, quo celebratur, quomodo inveniatur, 936.
Æquatio centri. Definitio, *a.* 652. quomodo inveniatur, 687.
Æquationis pars phyſica, *a.* 688.
optica, ibid.
Æquationum Tabulæ quomodo conſtruantur, *a.* 688.
Æquatio luminis, quid dicatur in theoria Lunæ, *a.* 857.
Æquatio menſtrua Lunæ. Definitio, *a.* 844. quomodo inveniatur, 851.
Æquatio temporis. Definitio, *a.* 714. quomodo inveniatur, 715.
Æquationum temporis Tabulæ quomodo conſtruantur, *a.* 726.
Æquator. Definitio, *a.* 48. proprietates, 49. 50. quomodo ab horizonte dividatur, 83. quomodo a meridiano, 84.

Æquatoris

Æquatoris & horizontis interſectio qualis ſit, *a.* 88.
Æquatoris arcus inter horizontem & meridianum interceptus quantus ſit, 89.
Æquinoctium. Definitio, *a.* 158. quomodo obſervetur, 653.
Aër num intenſitatem luminis minuat, *o.* 90. 92.
Aëris altitudo quomodo inveniatur, *a.* 405.
Algebræ uſus in Catoptrica, *c.* 312. *& ſeqq.* in Dioptrica, *d.* 487. *& ſeqq.*
Altitudo apparens ſideris. Definitio, *a.* 73. quomodo obſervetur, 109.
Altitudo luminoſi. Definitio, *o.* 145.
Altitudo meridiana quomodo obſervetur, *a.* 129. 137. 142. Solis quomodo computetur, 202.
Altitudinis meridianæ menſura, 95.
Altitudo minor quantum officiat viſioni remotioris, *o.* 255. *& ſeqq.*
Altitudo nonageſimi. Definitio, *a.* 220. cuinam æqualis, 221. quomodo inveniatur, 222.
Altitudinis nonageſimi Tabulæ quomodo computentur, *a.* 223.
Altitudo objectiva quomodo ſe habeat ad perſpectivam, *p.* 54. quomodo exhibeatur, 55.
Altitudo oculi. Definitio, *p.* 21.
Altitudo poli quomodo inveniatur, *a.* 147. 154. ejus menſura, 96.
Altitudo puncti apparentis in tabula quomodo ſe habeat ad altitudinem oculi, *p.* 32.
Altitudo Solis quomodo ex umbra corporis inveniatur, *o.* 147. quomodo computetur, 215.
Altitudo ſtellæ. Definitio, *a.* 73. menſura, 94. quomodo ad datum tempus inveniatur, 300.
Altitudo vera. Definitio, *a.* 73.
Altitudines quomodo ex umbra reperiantur, *o.* 153. *& ſeqq.* quomodo ope quadrati geometrici inveſtigentur, 174. *& ſeqq.* quomodo mediante ſpeculo, *c.* 64. quando appareant inclinatæ, *c.* 326. 327. quando erectæ, 328.
Altitudines apparentes quando æquales, *a.* 104.
Altitudines meridianæ quomodo obſerventur, *a.* 129. 137. 142.
Altitudinum differentiæ quænam viſu non dignoſcantur, *o.* 250.
Altitudinum meridianarum obſervatarum utilitas in Aſtronomia, *a.* 130.
Amphibleſtroides. Definitio, *o.* 30.
Amphora ſive *Aquarius*, *a.* 160.
Amplitudo occidua. Definitio, *a.* 195. menſura, 196. quomodo ope globi inveniatur, 320. 322.
Amplitudo ortiva. Definitio, *a.* 195. menſura, 196. fixæ quomodo computetur, 265. quomodo ope globi inveniatur, 322. Solis quomodo computetur, 206. quomodo ope globi inveniatur, 318.
Amplitudinum ortivarum Tabulæ quomodo condantur, 207.
Anaclaſtica. Definitio, *d.* 1.
Anamorphoſis. Definitio, *p.* 105. quomodo fiat, 106. *& ſeqq.* in ſuperficie coni convexa, 111. in concava, 113. in pyramide multilatera, 112. pro polyedro, *d.* 277.
Anamorphoſis mechanica, *p.* 109. 115.
Anamorphoſes quomodo adſpiciendæ, 114.
Anamorphoſes quomodo fiant pro ſpeculo cylindrico, *c.* 290. pro conico, 301. pro pyramidali, 304.
Anamorphoſium pro ſpeculo cylindrico perficiendarum theoria, 254. *& ſeqq.*
Anguloſa quando appareant rotunda, *o.* 280. 281.
Anguli ſpecies in Triangulo rectangulo ſphærico quomodo determinetur, *ſ.* 133.
Angulus ad nodum orbitæ Cometæ quomodo inveniatur, *a.* 1138.
Angulus ad Solem. Definitio, *a.* 650. *ad Terram*, 762.

Angulus circuli latitudinis cum via penumbræ quomodo inveniatur, *a.* 1067.
Angulus commutationis. Definitio, *a.* 760. quomodo inveniatur, 761.
Angulus eclipticæ cum meridiano quomodo in dato puncto computetur, 204.
Anguli eclipticæ cum meridiano Tabulæ quomodo condantur, 205.
Angulus elongationis. Definitio, *a.* 762. quomodo ſupputetur, 792.
Angulus incidentiæ. Definitio, *c.* 19. *d.* 11.
Angulus inclinationis. Definitio, *d.* 12.
Angulus opticus, ſeu *viſorius.* Definitio, *o.* 207.
Angulus orientis quomodo computetur, *a.* 218.
Angulus parallacticus. Definitio, *a.* 370. menſura, 371.
Angulus reflexionis. Definitio, *c.* 21.
refractionis. Definitio, *d.* 13.
Angulus refractus. Definitio, *d.* 14. quomodo computetur, 30.
Angulorum refractorum & refractionis Tabulæ, *d.* 32.
Angulus ſphæricus. Definitio, *ſ.* 5. menſura, 31.
Angulorum ſphæricorum ratio, 43.
Animalia num dentur in Luna, *a.* 488. num in planetis, 526.
Anni ſolaris magnitudo quomodo inveniatur, 669. quanta ſit, 671.
Annulus circa Lunam in eclipſi Solis totali apparens, *a.* 454.
Annulus Saturni, *a.* 516. 517.
Anomalia. Definitio, *a.* 646.
Anomaliæ motus annuus quomodo inveniatur, 706.
Anomalia coæquata. Definitio, *a.* 650. quid ſit, 651. quomodo inveniatur, 686. 690. 697.
Anomalia eccentri. Definitio, *a.* 649. quomodo inveniatur, 690.
Anomalia media ſ. *ſimplex.* Definitio, *a.* 647. menſura, 648. quomodo inveniatur, 648.
Anomalia media ſecundo coæquatæ reſpondens pro Luna quomodo inveniatur, *a.* 852.
Anomaliarum Solis Tabulæ quomodo conſtruantur, 707.
Anomalia ſecundo æquata pro Luna quomodo inveniatur, *a.* 854.
Anomalia vera. Definitio, *a.* 650.
Aphelium. Definitio, 636.
Aphelii locus quomodo inveniatur pro planetis ſuperioribus, 734. pro inferioribus, 743. pro Tellure, 674. 810. ubinam ſit ad A. 1700. in planetis ſuperioribus, 739. in inferioribus, 745.
Aphelii motus annuus quomodo inveniatur in planetis ſuperioribus, 737. in inferioribus, 746. quantus ſit in ſuperioribus, 739. in inferioribus, 747.
Apogæum. Definitio, *a.* 636.
Apogæi ſolaris motus annuus quomodo inveniatur, 702.
Apogæi ſolaris motuum Tabulæ quomodo conſtruantur, *a.* 703.
Apogæi Lunæ locus ad An. 1700. 835.
Apparentia. Definitio, *p.* 22.
Apparentia lineæ, ibid.
plani, ibid.
ſolidi, ibid.
Arachnoides, *o.* 34.
Aranea, 34.
Arcitenens, *a.* 160.
Arcus quando inſtar rectæ appareat, *o.* 275. 276.
Arcus æquatoris datus quo tempore per meridianum tranſeat quomodo computetur, *a.* 211.
Arcus inter centra. Definitio, *a.* 945. quomodo inveniatur, 946. *& ſeqq.*
Arcus latitudinarius in eclipſi terreſtri. Definitio, 1069. 1070. quomodo inveniatur, 1083.
Arcus viſionis. Definitio, *a.* 281. quomodo determinetur, 286. quantus ſit, 288.
Argumentum latitudinis. Definitio, *a.* 769.
Argumentum latitudinis menſtruæ. Definitio, 843. quomodo inveniatur, 846.

Argumentum menſtruum latitudinis. Definitio, *a.* 870.
Aries, 160.
Aſcenſio obliqua. Definitio, *a.* 191.
Aſcenſio obliqua Solis quomodo inveniatur, 208. 209. quomodo ope globi reperiatur, 318.
Aſcenſio obliqua ſtellæ fixæ quomodo inveniatur, 266. 267. quomodo ope globi inveniatur, 322.
Aſcenſionum obliquarum Tabulæ quomodo condantur, 210.
Aſcenſio recta. Definitio, 190.
Aſcenſio recta fixæ quomodo obſervetur, 228. quomodo computetur, 260. 261, 264. quod ſit mutabilis, 235.
Aſcenſio recta puncti dati eclipticæ quomodo computetur, *a.* 204.
Aſcenſio recta Solis quomodo inveniatur ope globi, 313.
Aſcenſionum rectarum ſingulorum graduum eclipticæ Tabulæ quomodo condantur, 205.
Aſcenſionum rectarum duarum fixarum differentia quomodo inveniatur, 226. 227.
Aſteriſmi qui ſint, 245. eorum nomina, ibid.
Aſtrognoſia quibus adminiculis juvetur, 248.
Aſtronomia. Definitio, 1.
Aſtronomia ſphærica. Definitio, 2.
theorica. Definitio, 3.
Atmoſphæra Solis ſtabilita, 419. 444. 446. figura ejus, 447.
Atmoſphæra lunaris ſtabilita, 486.
Aurora. Definitio, *d.* 393.
Axis incidentiæ. Definitio, *d.* 9.
lentis. Definitio, 21.
mundi. Definitio, 44.
opticus. Definitio, *o.* 340.
partis coni umbroſi quomodo reperiatur, *a.* 1049.
refractionis. Definitio, *d.* 10.
ſphæræ. Definitio, *ſ.* 9.
Azimuthum. Definitio, *a.* 194. ejus menſura, 197.
Azimuthum ſolis quomodo inveniatur, 206. quomodo ope globi, 318.
Azimuthum ſtellæ quomodo inveniatur, 302. quomodo ope globi, 320. 322.

B.

BAſis Tabulæ quid in Perſpectiva dicatur, *p.* 12.
Biceps quando quis appareat in ſpeculo plano, *c.* 113.
Biquintilis quinam adſpectus ſit, *a.* 931.

C.

CAlor quomodo ope ſpeculorum concavorum intendatur, *c.* 226. 227.
Camera obſcura quid ſit, *o.* 79. 80. effectus ejus demonſtratus, 119. *& ſeqq.* quomodo accuratior conſtruatur, *d.* 236.
Cancer quid ſignificet in Aſtronomia, *a.* 160.
Caper ſive *Capricornus* quid ſignificet in Aſtronomia, 160.
Capite ad pedes alterius jacentem quando quis ſe videat in ſpeculo plano, *c.* 115.
Capite truncatum quando quis ſe videat in ſpeculo plano, *c.* 113.
Caput Draconis, *a.* 819.
Cardines mundi. Definitio, *a.* 80.
Cardo meridiei. Definitio, *ibid.*
Cardo occidentis. Definitio, 80. quomodo inveniatur, 126.
Cardo orientis. Definitio, 80. quomodo inveniatur, 126.
Cardo orientis & occidentis quomodo ſibi invicem opponantur, 102.
Cardo ſeptentrionalis. Definitio, 130.
Catalogus fixarum quomodo conſtruatur, 244. a quibusnam conſtructus, *ibid.*
Cathetus incidentiæ. Definitio, *c.* 16. in quonam ſit plano, 39.
Cathetus obliquationis. Definitio, *c.* 18.
Cathetus reflexionis. Definitio, 17. in quonam ſit plano, 39.
Catini ad polienda vitra commodi quomodo parentur, *d.* 527. *& ſeqq.*

Catop-

Catoptrica. Definitio, *c.* 1. principia, 24. *& ſeqq.*
Catoptrica analytica, 312. *& ſeqq.*
Cauda Draconis, *a.* 819.
Celeritatum apparentium ratio, *c.* 359. *& ſeqq.*
Centrum mediorum motuum ubinam ſit, *a.* 680.
Centrum penumbræ ubi ſit, *a.* 1050.
Choroides, *o.* 27.
Ciliare ligamentum, 29.
Ciliares proceſſus, 29.
Circulorum maximorum ſphæræ proprietates, *ſ.* 15. *& ſeqq.* 25. *& ſeqq.*
Circulorum minorum ſphæræ proprietates, 36. *& ſeqq.*
Circulorum ſphæræ in planum projectio quando recta, quando circulus, 152.
Circuli excurſuum. Definitio, *a.* 187.
Circuli polares. Definitio, 184. quales ſint circuli, 185.
Circuli ſphæræ mundanæ ſive cœleſtis. Definitio, 41. quomodo optime dignoſcantur, 189.
Circulus quomodo projiciatur, *p.* 47.
Circulus æquinoctialis. Definitio, *a.* 53. quod vulgo cum æquatore confundatur, 55.
Circulus declinationis. Definitio, 78. proprietas, 79.
Circulus diurnus. Definitio, *a.* 56.
eccentricus. Definitio, 641. 642.
latitudinis. Definitio, *a.* 239.
immotus. Definitio, 43.
mobilis. Definitio, 42.
polaris arcticus, ibid.
antarcticus, 184.
Circulus verticalis. Definitio, 93. quomodo horizontem ſenſibilem interſecet, 93.
Ciſtula catoptrica, in qua objecta alia videntur, ſi per aliud foramen inſpexeris, *c.* 119. in qua objecta videntur ciſtula majora, 259.
Cœli figura apparens, *a.* 10. motus apparens, 11. *& ſeqq.*
Cognitio rerum naturalium quotuplex, *a.* 627.
Colorum theoria optica, *o.* 183. *& ſeqq.*
Columnarum ſcenographia, *p.* 71.
Coluri. Definitio, *a.* 186.
Colurus æquinoctiorum, ibid.
ſolſtitiorum, ibid.
Cometæ. Definitio, *a.* 1131. qualia ſint corpora, 1168. num mundo coæva corpora, 1158. an ſint ſupra Solem, 1171. an ſupra Lunam, 1151. *& ſeqq.* num habeant parallaxin ſenſibilem, 1148.
Cometarum phænomena, 1167. motus qualis appareat, 1161. caudæ quid ſint, 1173. longitudo & latitudo quomodo inveniatur, 1132. aſcenſio recta & declinatio quomodo inveniatur, 1134. quomodo diſtantia a Sole, 1135. motus proprius, 1136. diſtantia a Terra quænam requiratur, ut datum tempus ſuper horizonte conſumant, 1150.
Conclave ſpeculare quomodo conſtruatur, *c.* 138. 139.
Coni ſcenographia, *p.* 64.
Conjunctio planetarum. Definitio, *a.* 535. 928. ſignum, 929.
Conjunctio corporalis, 935.
centralis, 935.
magna, 933.
maxima, 933.
platica, 935.
Conjunctionis Lunæ cum Sole viſæ momentum quomodo inveniatur, 999.
Conjunctiones planetarum inferiorum cum Sole quomodo obſerventur, 728.
Conſpicilla. Definitio, *d.* 478.
Contigua & continua quando videantur viſibilia, *o.* 69.
Conus penumbroſus. Definitio, *a.* 1040. quid proprie ſit, 1044. quouſque exporrigatur, 1042.
Coni penumbroſi angulus quantus ſit, 1045. 1048. ſimilitudo cum cono umbroſo, 1047.

Conus umbroſus quem ſitum habeat reſpectu penumbroſi, *a.* 1043.
Coni umbroſi Lunæ axis quomodo inveniatur, 1025.
Coni umbroſi Terræ longitudo quomodo inveniatur, 939.
Coni umbroſi Terræ & Lunæ quales ſint eodem tempore, 1024.
Cornea tunica. Definitio, *o.* 18. proprietas, 19. cur ſit tenax, 22.
Corpus quando inſtar ſuperficiei appareat, 274.
Corpus diaphanum. Definitio, 11.
  illuminatum, 10.
  lucidum, 9.
  luminoſum. ibid.
Corpus opacum. Definitio, *o.* 12. quando tegat oculo viſibilia, 411. *& ſeqq.*
Corpus pellucidum. Definitio, 11.
  perſpicuum, ibid.
Coſecantes quando ad cotangentes prope accedant, *d.* 51. quando ſint ut cotangentes quam proxime, 52.
Craticula ectypi in anamorphoſibus, *p.* 106. *c.* 292.
Craticula prototypi in anamorphoſibus, *p.* 106. *c.* 292.
Crepuſculum. Definitio, *a.* 393. cauſa, 395. quando per integram noctem duret, 400. quo tempore hoc fiat quomodo inveniatur, 401.
Crepuſculum matutinum. Definitio, *a.* 393. quando incipiat, 394. initium quomodo inveniatur calculo, 402. quomodo ope globi, 404.
Crepuſculum Solis ſecundum quomodo obſervatum, *a.* 440. undenam ſit, 443. 444.
Cubi ex angulo viſi ſcenographia, *p.* 58.
Culminare quando ſtella dicatur, *a.* 133.
Culminatio ſtellæ. Definitio, 133. quomodo obſervetur, 134. quomodo computetur, 269.
Curtatio. Definitio, 772.
Curtationum Tabulæ quomodo conſtruantur, 790.
Curvarum verſus eandem partem cavarum quænam major, *ſ.* 48.
Curvilineæ figuræ projectio, *p.* 48.
Cylindri ſcenographia, 60.

D.

Decilis, *a.* 931.
Declinatio. Definitio, 75. qualis ſit, 76. 77.
Declinatio eclipticæ quomodo obſervetur, *a.* 183. quomodo computetur, 198.
Declinatio maxima eclipticæ quomodo obſervetur, 163. 168. quanta obſervata fuerit, 165. an ſit mutabilis, 166. 167.
Declinatio Solis quando ſenſibiliter non mutetur, 117. 118. quomodo ope globi inveniatur, 313.
Declinationum Solis circa ſolſtitium differentiæ quomodo ope gnomonis præalti determinentur, 664.
Declinationum Solis a maxima paulo ante & poſt ſolſtitium differentiæ quomodo ſe habeant, 661. *& ſeqq.*
Declinatio ſtellæ fixæ quomodo computetur, *a.* 260. 263. quomodo ope globi inveniatur, 311. an ſit mutabilis, 233. 234. num in eadem rotatione mutetur, 115.
Delineatio accurata objecti cujuſcunque quomodo fieri poſſit, *p.* 3.
Deſcenſio obliqua. Definitio, *a.* 192. quomodo computetur, 207. quomodo inveniatur ope globi, 320. 322.
Diameter apparens Lunæ quomodo mutetur, 555. in Sole inſenſibilis, 1019.
Diameter apparens Planetarum quomodo obſervetur, *a.* 548. quantæ ſingulorum obſervatæ fuerint, 557.
Diameter apparens Solis quomodo obſervetur, 547. 548. quanta obſervata, 553.
Diametri apparentis Solis, Lunæ & planetarum magnitudo variabilis, 549.
Diameter penumbræ. Definitio, *a.* 1050.
Diameter ſphæræ. Definitio, *ſ.* 9.
Diameter vera ſideris quomodo inveniatur, *a.* 912. ejus ratio ad diametrum Solis quomodo inveniatur, 909. quanta ſit, 911.

Diameter vera planetarum in ſemidiametris Terræ quomodo inveniatur, *a.* 919. quanta ſit uniuſcujuſque, 920. *& ſeqq.*
Diameter umbræ Lunæ, 1029.
Diei longitudo quomodo computetur, *a.* 213. quomodo ope globi inveniatur, 321.
Dies ſolares quod ſint inæquales, 709.
Dierum ſolarium æquatio quomodo inveniatur, 715. æqualium & inæqualium differentia, 711.
Differentia aſcenſionalis. Definitio, *a.* 193. quomodo computetur, 206. 265.
Differentia aſcenſionalium Tabulæ quomodo condantur. 207.
Differentia deſcenſionalis. Definitio, 193.
Differentiarum horariarum meridianorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 980.
Digiti ecliptici. Definitio, 950. quomodo inveniantur in Lunæ eclipſi, 951.
Digiti ecliptici Solis quomodo inveniantur, *a.* 1001. quomodo in eclipſi terreſtri inveniantur, 1097.
Dioptra objectiva, *a.* 106.
ocularis, 106.
Dioptræ teleſcopicæ cur adhibeantur, 108.
Dioptrarum teleſcopicarum poſitio quomodo examinetur, 131.
Dioptrica. Definitio, *d.* 1.
Dioptrica analytica, 487. *& ſeqq.*
Directio planetæ. Definitio, *a.* 531.
Diſcus Terræ. Definitio, 1013.
Disjuncta quando contigua videantur, *o.* 308. quando continua, 309. 310.
Diſtantia duorum punctorum in ſuperficie ſphæræ, *ſ.* 54.
Diſtantiarum differentiæ quænam viſu non dignoſcantur, *o.* 250.
Diſtantia Cometæ a Terra quomodo inveniatur, *a.* 1147.
Diſtantia curtata. Definitio, 771. quomodo inveniatur, 789.
Diſtantia Lunæ a Terra quomodo variet, 556.
Diſtantia planetæ a Sole quomodo inveniatur, 812.
Diſtantia planetæ a Terra quomodo ſupputetur, *a.* 792.
Diſtantia Solis vera a Terra quomodo inveniatur, 894. *& ſeqq.*
Diſtantia Solis maxima & minima a Terra ubinam ſit, 554.
Diſtantia Solis a nodo & apogæo lunari. Definitio, 841.
Diſtantia ſtellarum quomodo obſervetur, 225.
Dodecatemorion. Definitio, 188.

E.

Eccentricitas. Definitio, *a.* 638. 639.
Eccentricitas in ellipſi, 679.
Eccentricitas Lunæ conſtans, 835.
Eccentricitas Lunæ menſtrua quomodo inveniatur, 847.
Eccentricitas orbitæ ellipticæ Telluris quomodo inveniatur, 810.
Eccentricitas planetarum quanta, 750.
Eccentricitas planetarum ſuperiorum quomodo inveniatur in orbita circulari, 734. quomodo in elliptica, 813.
Eccentricitas planetarum inferiorum quomodo inveniatur, 749.
Eccentricitas Solis quomodo inveniatur, 675. 678. quanta ſit, 682.
Eclipſis Lunæ. Definitio, *a.* 937. quomodo appareat, 458. quænam ejus cauſa, 459. quid ſit, 461. cur ubivis ejuſdem magnitudinis, 462. ejus magnitudo, 951. initium, medium, finis & duratio quomodo inveniatur, 971. typus quomodo deſcribatur, 976. quomodo ſupputetur, 974. obſervetur, 977. 978.
Eclipſis Lunæ partialis. Definitio, 937. quando ſit, 948.
Eclipſis Lunæ totalis. Definitio, 937. phænomena, 463.
Eclipſis Lunæ totalis cum mora. Definitio, 937. quando ſit, 948.
Eclipſis Lunæ totalis ſine mora. Definitio, 937. quando ſit, 948.
Eclipſium lunarium termini neceſſarii. Definitio, 943. quomodo reperiantur, 944.

Eclipſium lunarium termini poſſibiles. Definitio, *a.* 943. quomodo reperiantur, 944.
Eclipſis ſatellitum Jovis, *a.* 502. 505. 510.
Eclipſis Solis. Definitio, 982. quando accidat, 984. 985. quomodo appareat, 448. quænam ejus cauſa, 449. *& ſeqq.* cur non in omnibus locis eodem momento accidat, 1081. quomodo ſupputetur, 1008. obſervetur, 1010. *o.* 303. initium & finis, *a.* 1004. 1101. duratio quomodo inveniatur, 1005. termini quomodo determinentur, 995. 996. typus quomodo deſcribatur, 1007. ubi totalis videatur, 1075. 1079. ubi partialis, 1078. 1080. ubi nulla, 1077.
Eclipſis ſolaris totalis phænomena, 454.
Eclipſis Solis CHRISTO *patiente* num fuerit præternaturalis, 986.
Eclipſis Terræ. Definitio, *a.* 1011. quando detur, 1072. 1073. 1074. quomodo appareat Selenitis, 1037. termini quomodo reperiantur, 1082. initium & finis quomodo inveniatur, 1085.
Ecliptica. Definitio, 157. diviſio, 160. qualis ſphæræ circulus, 171. ejus ſitus, 172. *& ſeqq.*
Eclipticæ declinatio maxima quomodo obſervetur, 163. quanta obſervata fuerit, 165.
Ecliptica in diſco Terræ. Definitio, *a.* 1059. ſitus in eodem, 1060.
Elevatio poli. Definitio, 99. quomodo inveniatur, 200. quomodo obſervetur, 154. ſuper diſco Terræ cuinam æqualis 1086.
Elevatio æquatoris. Definitio, *a.* 99. menſura, 100. quomodo obſervetur, 154. quomodo inveniatur, 200.
Ellipſis quando inſtar circuli appareat, *o.* 282. quando in parabolam degeneret, *a.* 1163.
Ellipſeos deſcriptio per data tria puncta, 809. proprietates quædam, 803. *& ſeqq.*
Engyſcopium. Definitio, *d.* 402.
Epactæ. Definitio, *a.* 963. quomodo inveniantur, 965.
Epocharum Tabulæ quomodo conſtruantur, 719. 754.
Epochæ motus medii & apogæi Solis quomodo conſtituantur, 718.

F.

FAciem & tergum quomodo ſimul ſpectemus in ſpeculo plano, *c.* 109. 128. 129.
Faculæ ſolares num dentur, *a.* 429.
Faſciæ in Jove obſervatæ, 499.
in Saturno obſervatæ, *ibid.*
Feneſtrarum ſcenographia, *p.* 75.
Feneſtrarum apertarum ſcenographia, 79.
Flamma e longinquo viſa cur major appareat, quam in vicinia, *o.* 265. 266.
Flamma candelæ quando appareat rotunda, *o.* 307.
Figuræ apparentia per quænam detur, *p.* 31.
Figuræ viſio, *o.* 272. *& ſeqq.*
Figuræ curvilineæ projectio quomodo fiat, *pag.* 35.
Figuræ mixtilineæ projectio, 36.
rectilineæ projectio, 34.
Figura rotunda oblonga ſeu ovalis quando inſtar circuli appareat, *o.* 282.
Figura vera polyoni regularis & circuli quando videatur, *o.* 286. quando non, 287.
Fixæ (ſtellæ) quomodo in aſteriſmos diſtinguantur, *a.* 246. quænam ſemper appareant, quæ ſemper lateant, quomodo inveniantur, 277. quo lumine fulgeant, 1119. quid ſint, 1120. quantæ ſint, 1121. an habeant planetas circa ſe, 1122. 1123. num habeant parallaxin ſenſibilem, 384. num ſint Terra majores, 1109. num ultra Saturnum a Tellure diſtent, 1110. num inæqualiter a Terra diſtent, 1114. cur aliæ aliis minores appareant, 1115. num mutentur, 1129.
Fixæ in plures diviſæ quænam ſubinde obſerventur, 543.
Fixæ per vices apparentes ac diſparentes, 1124. *& ſeqq.*

Fixæ primæ magnitudinis quantæ per teleſcopium appareant, *a.* 1111.
Fixæ temporaria, 1127.
Fixarum aberrationes annuæ, 605. num parallaxis earum annua recte inde colligatur, 606. quanta hæc eſſe debeat, 607.
Fixarum diſtantia a Terra quomodo inveniatur, 1116. quanta æſtimetur, 1117.
Fixarum mora ſupra horizontem quomodo inveniatur, *a.* 268.
Fixarum magnitudines apparentes, 249.
Fixarum multitudo evicta, 1113.
Fixarum occultationes a planetis factæ, 542.
Fixarum a Luna occultandarum figura ovalis obſervata, 475. cauſa quænam ſit, 476.
Focus. Definitio, *d.* 22. quomodo determinetur in lentibus convexis, 186. 217. 221. quomodo in meniſcis, 298. quomodo in ſuperficie ſphærica convexa, 89. 90.
Focus virtualis. Definitio, 23. quomodo determinetur in lente concava, 282. 290. quomodo in meniſcis, 312.
Fulcrum teleſcopii longioris quomodo conſtruatur, *d.* 382.
Fulguratio in medio diſci Lunæ in eclipſi Solis totali obſervata, 454.

G.

GEmini, *a.* 160.
Globus cœleſtis. Definitio, *a.* 303. conſtructio, 305. 309. uſus, 311. *& ſeqq.* quomodo ad cœli ſitum componatur, 316.
Globus deſcendens quomodo repræſentari poſſit tanquam aſcendens, *c.* 73.
Gnomonis aſtronomici conſtructio & uſus, *a.* 137. *& ſeqq.*
Gravitas corporis num in omnibus Terræ locis eadem, 569. 570.

H.

HElioſcopium. Definitio, *d.* 465. conſtructio, 467.
Hemiſphærium quomodo totum ab oculo conſpici poſſit, *o.* 427.
Hemiſphærium auſtrale, ſive *meridionale* mundi, *a.* 52.
Hemiſphærium boreale ſive *ſeptentrionale* mundi, *a.* 51.
Hemiſphærium inferius cœli, 65.
ſuperius cœli, 64.
Homines num dentur in Luna, 488. num in planetis ceteris, 526.
Hora diei quomodo ex Solis altitudine eruatur, *a.* 216.
Horizon. Definitio, 61. quomodo a meridiano ſecetur, 84. quomodo a circulo verticali, 85.
Horizon apparens, ſive *ſenſibilis.* Definitio, 66. proprietas, 67. poli ejus ubinam ſint, 90.
Horizon occiduus. Definitio, 69.
ortivus. Definitio, 68.
Horizon rationalis, ſive *verus.* Definitio, 61. proprietates, 62. 63. ſitus, 86. poli ubinam ſint, 60.
Horologii motus quomodo rectificetur, vel probetur, 297.
Horopter. Definitio, *o.* 341.
Humor aqueus. Definitio, 33.
Humor cryſtallinus. Definitio, 34. figura, 35. 36. uſus, 61. *& ſeqq.* effectus, 75.
Humor vitreus. Definitio, 37.
Hypotheſis latitudinis Lunæ, *a.* 873.
Hypotheſis Lunæ, 839. 84.

I.

JAnuarum in pariete ſcenographia, *p.* 73.
Januarum apertarum ſcenographia, 77.
Ichnographia geometrica. Definitio, *p.* 23.
Ichnographia perſpectiva, ſive *projecta.* Definitio, p. 25. quomodo fiat, 33. *& ſeqq.*
Imago viſibilis qualis in oculo delineetur, *o.* 6?. *& ſeqq.* quando clarior, 77. qualis ſit in presbytæ oculo, 383. qualis in oculo myopis, 386.
Imaginis locus in ſpeculo concavo, *c.* 232. & ſeqq. 253. *& ſeqq.* in ſpeculo convexo, 166. 167. 168. in planis, 51. *& ſeqq.*
Imago qualis ſit in ſpeculo concavo, 252. *& ſeqq.* in convexo, 183. in cylindrico, 280. *& ſeqq.* in cylindricis cavis, 298. *&*

ſeqq.

ſeqq. cur videatur in libero aëre, *c.*300. in ſpeculis planis, 60. quanta ſit in ſpeculo concavo, 240. & *ſeqq.* in convexo, 155. 175. 178. 179. 180. qualis appareat per vitrum planum, *d.* 83. qualis poſt lentem convexam, *o.* 387. & *ſeqq.* *d.* 224. & *ſeqq.*
Imago inverſa poſt lentem convexam quomodo ſiſtatur erecta, *c.* 231. 233. 334.
Imago lucidi cur multiplex videatur in ſpeculo plano, *c.* 88.
Imago objecti quomodo multiplicetur in ſpeculis planis, *c.* 93. 100. 104. 106. 110. 112. 126. 127. quando verticalis appareat horizontalis & contra, 70. 71. quando infra horizontem ſitu inverſo appareat, 57. 58. quando poſt ſpeculum longius diſtare videtur, quam ante ipſum abeſt, 134. & *ſeqq.*
Imago prototypo ſimilis quomodo mechanice delineetur, *p.* 110.
Imago deformis quomodo formoſa reſtituatur per ſpeculum cylindricum, *c.* 290. conicum, 301. pyramidale, 304.
Imagines monſtroſæ quomodo in ſpeculis planis exhibeantur, 112. 113. 114. 116.
Inæqualia quando appareant æqualia, *o.* 252. & *ſeqq.*
Inæqualitas prima. Definitio, 773.
Inæqualitas ſecunda, ſc. motus planetarum, 775.
Inæqualitas Lunæ prima ſeu *ſoluta*, 823.
Inæqualitas Lunæ altera ſeu *menſtrua*, 824. phænomena, 838.
Inæqualitatis tertiæ in motu Lunæ phænomena, 855.
Inclinatio. Definitio, *a.* 767. maxima quomodo obſervetur, 773. quanta ſit in ſingulis planetis, 784.
Inclinationum Tabulæ quomodo conſtruantur, 785.
Inclinatio incidentis radii. Definitio, *c.* 22.
Inclinatio limitis menſtrui. Definitio, *a.* 872. quomodo inveniatur, 876.
Inclinatio planorum qualis, *ſ.* 97.
Inclinatio radii reflexi. Definitio, *c.* 23.
Inclinatio viæ penumbræ. Definitio, *a.* 1065. quomodo inveniatur, 1066.
Incolæ planetarum num dentur, 527.
Inſulæ in Luna, 480.
Intenſitas luminis. Definitio, *o.* 81. quando non mutetur, 86. quomodo ſe habeat, 85.
Intervallum planetæ. Definitio, *a.* 640. quomodo inveniatur, 685.
Jovicolæ quantæ magnitudinis, 527.
Iris oculi, *o.* 25.
Jupiter. Definitio, 3. quale ſit corpus, 505. 524. ſimilitudo cum Tellure, 525. motus vertiginis, 496. figura ovalis in occultatione per Lunam facta, 475. 476.
Jupiter Jovialis, 501.

L.

Lateris ſpecies in triangulo rectangulo ſphærico quomodo determinetur, *ſ.* 133.
Laterna magica. Definitio, *d.* 464. conſtructio, 470. quomodo in microſcopium convertatur, 476. 477.
Latitudo. Definitio, *a.* 786.
Latitudo Lunæ ſimplex. Definitio, *a.* 865.
Latitudo Lunæ vera. Definitio, *o.* 867. quomodo inveniatur, 880.
Latitudo Lunæ viſa. Definitio, 987. quomodo inveniatur, 988. quomodo computetur in momento ſynodi viſæ, 1000. quomodo inveniatur initio & fine eclipſis Solis, 1006.
Latitudo menſtrua. Definitio, 869. quomodo inveniatur, 878.
Latitudo planetæ quomodo obſervetur, 559. quomodo inveniatur, 795. quomodo ſupputetur, 814.
Latitudo ſtellæ. Definitio, 236. menſura, 237. 238. quomodo inveniatur, 243. 261. quomodo inveniatur ope globi, 312. an ſit mutabilis, 251.
Latitudo umbræ. Definitio, 1053.
Latitudo umbræ apparens. Definitio, 1055. quomodo inveniatur, 1056.

Leo

Lens. Definitio, *d.* 15.
Lentes cauſticæ. Vide Vitra cauſtica.
Lentes cauſticæ ex glacie confectæ, 201.
Lentes convexæ quomodo refringant lumen, 266. *& ſeqq.*
Lentes hyperbolicæ num ſphæricis præſtent, 325.
Lentis convexæ effectus, *o.* 73. 75.
Lentis objectivæ apertura in teleſcopio quomodo determinetur, *d.* 494. ejus neceſſitas, 395. 398.
Lentium plano-convexarum theoria, 166. *& ſeqq.*
Lentium utrinque convexarum theoria, 184. *& ſeqq.*
Lentium concavarum theoria, 279. *& ſeqq.*
Leo, *a.* 160.
Libra, 160.
Limites in orbita Lunæ, 872.
Lineæ apparentia per quænam detur, *p.* 31.
Linea apſidum. Definitio, *a.* 636.
Lineæ apſidum poſitio quomodo determinetur, 674. 754. 743. quomodo in orbita elliptica planetarum ſuperiorum inveniatur, 813.
Linea breviſſima quænam ſit in ſuperficie ſphæræ, *ſ.* 53.
Linea diſtantiæ. Definitio, *p.* 15. quænam ſit, 16.
Linea fiduciæ quænam dicatur, *a.* 107.
Linea fundamentalis. Definitio, *p.* 11.
Linea horizontalis in Perſpectiva. Definitio, 17. qualis ſit, 18.
Linea incidens. Definitio, *c.* 14.
Linea incidentiæ. Definitio, *d.* 4.
Linea meridiana. Definitio, *a.* 81. ſitus, 82. quomodo inveniatur, 120. uſus, 125. 128.
Linea objectiva. Definitio, *p.* 27.
Lineæ parallelæ quando convergentes appareant, *o.* 227. *& ſeqq.*
Linea recta quando inſtar puncti appareat, *o.* 722.
Lineæ rectæ apparentia qualis, *p.* 28.
Linea reflexionis. Definitio, *c.* 15.
Linea refractionis. Definitio, d. 5.
Linea terræ. Definitio, *p.* 11.
Loca optica. Definitio, *o.* 334. theoria, 335. *& ſeqq.*
Loci viſio, 308. *& ſeqq.*
Loci dati diſtantia a centro penumbræ quomodo inveniatur, *a.* 1099.
Locus ad eclipticam reductus. Definitio, 757. quomodo inveniatur.
Locus centricus planetæ, 755.
Locus eccentricus in ecliptica. Definitio, 757.
Locus eccentricus in orbita. Definitio, 755. quomodo ſupputetur, 756.
Locus geocentricus. Definitio, 758.
Locus heliocentricus. Definitio, 557. quomodo ex geocentrico inveniatur, 812.
Locus imaginis in ſpeculo ubinam ſit, *c.* 41.
Locus imaginis in ſpeculo concavo, convexo, 151. 152. 154. *& ſeqq.* plano.
Locus Lunæ fictus. Definitio, *a.* 862.
prope verus, ibid.
Locus verus, ibid. quomodo ſupputetur, 863.
Locus medius Solis quomodo inveniatur, 704.
Locus opticus. Definitio, 364.
Locus opticus apparens. Definitio, 365.
Locus opticus verus. Definitio, ibid.
Locus phyſicus ſideris. Definitio, *a.* 363.
Locus Solis in ecliptica quomodo obſervetur, 203.
Locus Solis verus quomodo ſupputetur, 720. *& ſeqq.*
Locus Terræ, ubi Sol totus eclipſatus oritur vel occidit, quomodo determinetur, 1093.
Locus Terræ, vel quem pervenit centrum penumbræ quomodo determinetur, 1094.
Loca Terræ, quibus Sol oritur & occidit, in principio ac fine eclipſis terreſtris quomodo determinetur, 1092.
Longitudines quænam viſus comprehendere poſſit, *o.* 248. *& ſeqq.*
Longitudo Lunæ viſa. Definitio, *a.* 989. quo-

quomodo inveniatur, *a.* 990. 997.
Longitudo planetæ quomodo obſervetur, 559.
Longitudo planetæ vera quomodo ſupputetur, 814.
Longitudo ſtellæ. Definitio, *a.* 241. quomodo inveniatur, 243. 263. quomodo inveniatur ope globi, 312. quomodo ad datum annum computetur, 259.
Longitudo ſtellarum fixarum quomodo mutetur, 251. quando uno gradu augeatur, 258.
Lucerna lumen valde intenſum projiciens quomodo conſtruatur, *d.* 208.
Lumen. Definitio, *o.* 4. 5. quomodo propagetur, 45, 46. num unum officiat propagationi alterius, 99. *& ſeqq.* quomodo intendatur per lentes convexas, *d.* 203. *& ſeqq.* quomodo per ſpecula concava, *c.* 224. *& ſeqq.* quomodo debilitetur per ſpecula convexa, 191. *& ſeqq.* 195. per concava, 228. 229. quomodo in colores mutetur, *o.* 183. *& ſeqq.* quomodo reflectatur a ſpeculis planis, 55. convexis, 144. *& ſeqq.* concavis, 208. *& ſeqq.* cylindricis, 277. 278. cylindricis concavis, 294. *& ſeqq.* ellipticis, 310. 311. quomodo refringatur in ſuperficiebus planis, *d.* 49. *& ſeqq.* in lentibus convexis, 166. *& ſeqq.* utrinque convexis, 184. *& ſeqq.* concavis, 279. *& ſeqq.* ſphæris pellucidis, 178. *& ſeqq.* lentibus plano-convexis, 166. *& ſeqq.* ſuperficiebus ſphæricis, 87. *& ſeqq.*
Luminis a duobus luminoſis propagati ratio, *o.* 104. *& ſeqq.*
Lumen propagatum per radios convergentes quomodo creſcat, 89.
Lumen propagatum per radios divergentes quomodo decreſcat, 87. 88.
Lumen album quod ſit mixtum, *o.* 186.
Lumen coloratum ſolare immutabile, 201. *& ſeqq.*
Lumen diurnum unde, *a.* 407. 408.
Lumen Lunæ undenam ſit, *a.* 462.
Lumen Solis quomodo reflectatur a ſpeculis parabolicis, *c.* 306. *& ſeqq.* cur non intendatur per reflexionem a ſpeculis planis, 66. quomodo refringatur in lentibus plano-convexis & convexo-convexis, *d.* 197. quomodo in colores mutetur, 271. 272. quomodo per lentem concavam debilitetur, 228.
Lumen Solis per foramen anguloſum tranſiens quando figuram circuli aſſumat, 296. *& ſeqq.*
Luminis ſolaris per foramen radiantis figura qualis ſit, *o.* 290. *& ſeqq.*
Luminis ſolaris radii heterogenei quomodo a ſe invicem ſeparentur, 200.
Lumen zodiacale a quibuſnam obſervatum, *a.* 436. 440. quid ſit, 437. *& ſeqq.* 441. *& ſeqq.*
Luna quale ſit corpus, *a.* 453. 469. 479. unde lumen habeat, 460. cur ſit luminare magnum, 457. ex qua materia conſtet, 484. an ſemper æque diſtincte videatur, 473. an Terræ ſemper eandem faciem obvertat, 1103. quod Telluri propior quam Sol, 452. quando in umbram Terræ incidat, 940.
Lunæ ætas media quomodo inveniatur, 959. 966.
Lunæ diameter apparens quomodo obſervetur, 548. quanta ſit, 549.
Lunæ diſtantia a Terra quomodo inveniatur, 888. 889. quanta ſit, 893.
Lunæ eclipſatæ colores, 463. eorum cauſa, 464. cauſa diverſitatis, 465. 466.
Lunæ illuminatio quomodo fiat, 455. 456. ejus cauſa, 460. a Terra facta, 914.
Lunæ magnitudo, 915.
Lunæ montes, valles & maria, 479.
Lunæ motus proprius quomodo innotuerit, 23. 24.
Lunæ orientis & occidentis figura ovalis ſeu elliptica, 475. ejus cauſa, 476.
Lunæ ſimilitudo cum Tellure, 487.
Lunatio. Definitio, *a.* 817.

Lunæ

Lunæ Joviales, *a.* 501.
Lunula. Definitio, *d.* 20.
Lux. Definitio, *o.* 4. 5.
Lux clarior quibuſnam conducat ad videndum, 396.
Lux debilior quibuſnam conducat ad videndum, 395.
Lux nimia quod viſui officiat, 390.

M.

Machina anamorphotica cylindrica, *c.* 293. conica, 302.
Machina catoptrica, in qua objecti imago multiplicatur, 137. in qua una multiplicatur & deformatur, 118.
Machina catoptrico-dioptrica. Definitio, *d.* 458.
Machina hydromantica, in qua imago ſpectatori pro arbitrio oculis ſubduci & adduci poteſt, *d.* 86.
Machina politoria quomodo conſtruatur, *c.* 48. *d.* 539.
Maculæ Lunæ quales obſerventur, *a.* 468.
Maculæ Lunæ novæ, 468. quales ſint, 472.
Macularum Solis phænomena, 411. theoria, 412. *& ſeqq.* motus, 422. undenam prodeant, 416. quid ſint, 417. quomodo obſerventur, 427.
Maculæ Veneris, 494.
Magis myops quinam dicatur, *d.* 480. qualia ei conveniant perſpicilla, 482.
Magis presbyta quinam dicatur, 520. qualia ei conveniant perſpicilla, 522. quomodo determinentur, 523.
Magnitudo quando in vicinia minor appareat, quam in diſtantia remotiori, *o.* 254.
Magnitudinis viſio, 209. *& ſeqq.*
Magnitudo apparens. Definitio, 208.
Magnitudinum apparentium theoria, 212. *& ſeqq.*
Manus ſine corpore quando appareant in ſpeculo plano, *c.* 113.
Maria in Luna num dentur, *a.* 479.
Mars. Definitio, 34. quale corpus, 524. ſimilitudo cum Tellure, 525. phaſes, 491. motus vertiginis, 496. diſtantia a Terra, *a.* 899.
Mediatio cœli. Definitio, 272. quomodo inveniatur, 273. quomodo ope globi inveniatur, 315.
Medius motus Solis quomodo inveniatur, 672.
Mediorum motuum Solis Tabulæ quomodo conſtruantur, 673.
Mediorum motuum planetarum ſuperiorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 733.
Mediorum motuum planetarum inferiorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 753.
Mediorum motuum Lunæ Tabulæ quomodo conſtruantur, 827.
Meniſcus. Definitio, *d.* 20. theoria, 295. *& ſeqq.* quando æquipolleat lenti utrinque æqualiter convexæ, 301. 302. quando plano-convexæ, 304. 305. quando ſphæræ, 306. 307. quando utrinque concavæ, 315. 316. quando plano-concavæ, 317. 318. quænam ſit lens cauſtica, 324.
Meniſci ellipticæ & hyperbolicæ num præſtent ſphæricis, 325.
Meniſci impropriæ quænam dicantur, 322.
Meniſci propriæ quænam dicantur, 322.
Menſis anomaliſticus. Definitio, *a.* 818. quantitas quomodo inveniatur, 832.
Menſis draconticus. Definitio, 819. quantitas quomodo inveniatur, 831.
Menſis periodicus. Definitio, 816. quantitas, 835. quomodo ea inveniatur, 825.
Menſis ſynodicus. Definitio, 817. quantitas, 835. quomodo ea inveniatur, 825.
Mercurius. Definitio, 36. phaſes, 491. 538. in Sole obſervatus, 492. num circa axem gyretur, 498.
Mercurii digreſſiones maximæ a Sole quomodo obſerventur, 740.
Mercurius Jovialis, 507.
Meridianus. Definitio, 72.
Meriadinorum differentia horaria quomodo inveniatur, 979.
Meridianus univerſalis. Definitio, 1087. poſitio ſuper diſco Terræ quomodo inveniatur, 1089.

Meridiei momentum quomodo obſervetur, *a.* 124.
Micrometri conſtructio & uſus, 544. *& ſeqq.*
Microſcopium. Definitio, *d.* 402. quomodo optima parentur, 456.
Microſcopii aquei conſtructio, 436.
Microſcopium compoſitum. Definitio, 405. conſtructio, 439.
Microſcopii reflectentis conſtructio, 452. inventor, 453.
Microſcopium ſimplex. Definitio, 404. theoria, 407. *& ſeqq.* conſtructio, 421.
Microſcopia ſimplicia ex ſphærulis conſtantia quomodo fiant, 431. theoria, 423. *& ſeqq.* conſtructio, 434.
Minus presbyta quinam dicatur, 520. qualia ei conveniant perſpicilla, 522. quomodo determinentur, 523.
Mobilia quando quieſcere videantur, *o.* 361. *& ſeqq.* 374. quando retrogradi, 368.
Modulus pro ſpeculis ſphæricis concavis fundendis quomodo paretur, *c.* 199.
Monoculus quando quis appareat in ſpeculo plano, *c.* 113.
Montes in Luna num dentur, *a.* 479.
Montium lunarium altitudo quomodo inveniatur, 917. nomina, 918. umbræ, 483.
Montes in Venere obſervati, 493.
Motus viſio, *o.* 354. *& ſeqq.*
Motus anomaliæ quid ſit, *a.* 820.
Motus aphelii Tabulæ pro planetis ſuperioribus quomodo conſtruantur, 737. quomodo pro inferioribus, 746.
Motus apogæi lunaris diurnus, 835.
Motus communis ſive *diurnus*, 21.
Motus horarius Lunæ & Solis verus quomodo inveniatur, 968.
Motuum horariorum Lunæ & Solis verorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 969.
Motus horarius in eclipſi terreſtri. Definitio, 1068.
Motus horarius Lunæ a Sole viſus. Definitio, *a.* 994.
Motus imaginis in ſpeculo plano, *c.* 95. *& ſeqq.*
Motus latitudinis Lunæ diurnus, *a.* 836.
Motuum latitudinis Tabulæ pro Luna quomodo conſtruantur, 832.
Motus librationis. Definitio, 1104. cauſa, 1106.
Motus Lunæ ab apogæo diurnus, 836.
Motus Lunæ a Sole quid ſit, 820. quomodo inveniatur, 828.
Motus Lunæ a Sole viſus quomodo inveniatur, 998.
Motus Lunæ in latitudinem quid ſit, 820.
Motus lunaris phænomena, 821. 822.
Motus medius. Definitio, 643. quidnam ad eum determinandum requiratur, 644.
Motuum mediorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 673. 827.
Motus medius Lunæ diurnus, 835.
Motuum nodorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 779.
Motus nodi Lunæ diurnus, 835.
Motus periodicus in longitudinem quid ſit, *a.* 820.
Motus planetarum phœnomena obſervata, 562. *& ſeqq.* demonſtrata, 571. *& ſeqq.*
Motus primus. Definitio, *a.* 21.
    primi mobilis, 21.
Motus proprius, ſive *ſecundus.* Definitio, 30.
Motus proprius fixarum qualis ſit, 252. quantitas annua quomodo inveniatur, 255.
Motus vertiginis Lunæ, 1107. Solis, 422. 423. planetarum, 496. *& ſeqq.*
Motus verus. Definitio, 645.
Mundus num in Aſtronomia pro ſphæra cava haberi poſſit, cujus ſuperficiei ſtellæ affixæ, 18.
Myops. Definitio, *o.* 384. quinam ſit, 401. 402. cur in luce minore legere poſſit quam presbyta, 408. cur legat ſcripturam minutam, 426. cur remota in ſpeculo

culo

culo convexo diſtinctius videat, quam directè, *c.* 193. qualia perſpicilla ei conveniant, *d.* 479. quomodo hæc determinentur, 483. 485. quomodo ſeligantur, 525.

N.

N*Octis longitudo* quomodo inveniatur, *a.* 213. quomodo ope globi inveniatur, 321.
Nodus. Definitio, 765.
Nodus auſtralis, 765.
aſcendens, ibid.
borealis, ibid.
deſcendens, ibid.
Nodi planetæ quomodo obſerventur 777.
Nodorum planetarum locus ad Ann. 1700. 780. motus quomodo inveniatur, 778.
Nodus orbitæ cometæ quomodo inveniatur, 1138.
Nodi Lunæ quomodo moveantur, 830. eorum locus quomodo inveniatur, 829.
Nonageſimus. Definitio, 220.
Novilunium medium quomodo ſupputetur, 959. 967. ejus epocha quomodo inveniatur, 960.
Novilunium verum quomodo ſupputetur, 970.

O.

O*Bjectum* quodnam videatur, *o.* 47. ubi videatur, 58.
Objectum oculo tectum quando videatur, in ſpeculo plano, *c.* 132.
ad *Objectum procul remotum* quando nunquam perveniatur, *o.* 370.
Objectum totum quando viſu comprehendatur, 237. quando non, 238.
Objectum valde minutum quando diſtinctius videatur, 425.
Objectum verum per polyedrum viſum quomodo diſcernatur ab apparentibus, *d.* 274.
Obliquitas eclipticæ quid & quanta ſit, *a.* 178.
Obſervationes aſtronomicæ. Definitio, 5.
Obſervationes communes, *a.* 4.
Occaſus ſiderum. Definitio, 19.
Occaſus acronichus. Definitio, 279. quomodo inveniatur, 285.
Occaſus coſmicus. Definitio, 278. quomodo inveniatur, 285. quomodo ope globi inveniatur, 319.
Occaſus heliacus. Definitio, 280. quomodo inveniatur, 293. quomodo ope globi inveniatur, 331.
Occaſus Solis quomodo computetur, 214. quomodo ope globi inveniatur, 320.
Occaſus ſtellæ fixæ quomodo inveniatur, 270. quomodo ope globi inveniatur, 322.
Octilis, 931.
Oculus. Definitio, *o.* 16. 17. ſtructura explicata, 78. quantum uno obtutu capiat ſpatium, 235. 236. quando ad objectum accedens & ab eodem recedens objectum idem ſemper videat ſub eadem magnitudine, 232. 233.
Oculi artificialis conſtructio, 79.
Oculus valens quinam dicatur, 379. quinam ſit, 404. 405. 406.
Oppoſitio planetarum. Definitio, *a.* 536. 928. ſignum, 929.
Oppoſitio planetarum ſuperiorum & Solis quomodo obſervetur, 727.
Oppoſitio viſibilis directa. Definitio, *o.* 267.
obliqua, ibid.
Optica. Definitio, *o.* 1. ſignificatus latior, 2.
Orbitæ cometarum quales ſint, *a.* 1164. 1165. 1166.
Orbitæ planetarum ellipticæ quomodo primum detectæ, 681. earum axis minor quomodo inveniatur, 696. *& ſeqq.*
Orbita Solis a circulari parum differt, 676.
Orbitarum dimenſiones in ſemidiametris terreſtribus quomodo inveniantur, 907. quantæ ſint, 908.
Ortus ſiderum. Definitio, *a.* 19.
Ortus acronichus. Definitio, 279. quomodo inveniatur, 284.
Ortus coſmicus. Definitio, 278. quomodo

inveniatur, *a.* 283. quomodo ope globi inveniatur, 319.
Ortus heliacus. Definitio, 280. quomodo inveniatur, 293. quomodo ope globi reperiatur, 331.
Ortus Solis quomodo computetur, 214. quomodo ope globi reperiatur, 318.
Ortus ſtellæ fixæ quomodo inveniatur, 271. quomodo ope globi inveniatur, 322.

P.

P*Arallaxis.* Definitio, *a.* 367. theoria, 379. *& ſeqq.* quomodo altitudinem immutet, 368. quid proprie ſit, 369. ubi nulla, 328. quomodo aſcenſionem & deſcenſionem rectam & obliquam, declinationem, latitudinem & longitudinem mutet, 372.
Parallaxis altitudinis quomodo inveniatur, 388. quomodo cometæ, 1145. quomodo Lunæ, 887.
Parallaxis aſcenſionis. Definitio, 375. quomodo inveniatur, 390.
Parallaxis aſcenſionis rectæ fixarum. Definitio, 596. qualis ſit, 598. 599.
Parallaxis declinationis. Definitio, 374. quomodo inveniatur, 390.
Parallaxis declinationis fixarum. Definitio, 596. qualis ſit, 598. 599.
Parallaxis deſcenſionis. Definitio, 375. quomodo inveniatur, 390.
Parallaxis latitudinis. Definitio, 377. quomodo inveniatur, 390. 391.
Parallaxis latitudinis fixarum. Definitio, 596. qualis ſit, 598. 599.
Parallaxis longitudinis. Definitio, 376. quomodo inveniatur, 390. 391.
Parallaxis longitudinis fixarum. Definitio, 596. qualis inveniatur, 598. 599.
Parallaxis fixarum annua. Definitio, *a.* 596. quinam eam obſervare tentaverint, 600. *& ſeqq.* quanta ſit, 608.
Parallaxis fixarum abſoluta. Definitio. *a.* 596. an ſemper eadem, 597.
Parallaxis horizontalis quomodo inveniatur, *a.* 387.
Parallaxis horizontalis Lunæ quanta ſit, 892.
Parallaxium horizontalium Lunæ Tabulæ quomodo conſtruantur, 891.
Parallaxis horizontalis Solis quomodo inveniatur, 895.
Parallaxis Lunæ a Sole. Definitio, 99. quanta ſit, 992.
Parallaxis Martis diurna quomodo obſervetur, 897. *& ſeqq.*
Parallaxis Orbis. Definitio, 763. 776. menſura, 764. quomodo ſupputetur, 792.
Parallaxis Veneris diurna quomodo obſervetur, 897. *& ſeqq.*
Parietum ſcenographia, *p.* 71.
Pars media quænam dicatur in Trigonometria ſphærica, *ſ.* 92.
Partes conjunctæ triangulorum ſphæricorum quænam dicantur, 93.
Partes laterales quænam dicantur in triangulo ſphærico, *ſ.* 135.
Partes ſejunctæ trianguli ſphærici quænam dicantur. 95.
Particula exſors. Definitio, *a.* 844. quomodo inveniatur, 850.
Pavimentum lapidibus ſtratum quomodo projiciatur, *p.* 46.
Penduli ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis longitudo quomodo in diverſis Telluris locis ſe habeat, *a.* 567.
Peninſulæ in Luna, 480.
Pentagoni regularis projectio, *p.* 49.
Penumbra. Definitio, *a.* 1039. quantum ſpatium in Terra occupet quomodo determinetur, 1058. via ejus quomodo in globo terreſtri vel mappa geographica delineetur, 1095.
Perigæum. Definitio, 635.
Perihelium. Definitio, 635. quomodo locus ejus obſervetur, 674.
Perihelii Telluris locus quomodo inveniatur, 810.
Periodis planetarum circa ſolem quantæ in ſingulis, 732. 752. 800.

Perpendicularia quando in ſpeculo convexo videantur everſa, *c.* 182.
Perſpectiva. Definitio, *p.* 1.
Perſpicilla. Definitio, *d.* 478. qualia myopibus conveniant, 479. 482. qualia presbytis, 519. quomodo ſeligantur, 525.
Phaſes Lunæ quomodo ſe habeant, *a.* 455.
Pilarum ſcenographia, *p.* 71.
Piſces, *a.* 160.
Planetæ. Definitio, 31. quomodo dignoſcantur, 37. ſigna, 38. quomodo moveantur circa Solem, 633. 634. quomodo ſecunda inæqualitate exuantur, 812. quomodo locus eorum in globo dato tempore exhibeatur, 314. quinam Soli opponantur, 537.
Planetarum diſtantiæ a Sole quomodo reperiantur, 796. quantæ ſint, 797. 904.
Planetarum diſtantiæ a Terra quomodo inveniantur, *a.* 903. quantæ ſint, 904. *& ſeqq.* num varient, 550. *& ſeqq.*
Planetarum motus proprius quomodo innotuerit, 28. 29.
Planetarum occultationes, 541.
Planetarum orbitæ quomodo ſe habeant reſpectu Terræ, 590.
Planetarum ratio ad Terram quoad ſuperficiem & ſoliditatem, 921. 922.
Planetarum ſemidiametri veræ quomodo inveniantur, 919. quantæ ſint, 920.
Planeta directus quando dicatur, 534.
retrogradus, 534.
ſtationarius, 534.
Planetæ inferiores quinam dicantur, 489. eorum revolutio circa Solem quomodo inveniatur, 731.
Planetæ primarii. Definitio, 529. quinam ſint, 631.
Planetæ ſecundarii. Definitio, 529. quinam ſint, 631.
Planetæ ſuperiores. Definitio, 489. revolutio circa Solem quomodo inveniatur, 739.
Plantæ num dentur in Luna, 488.
Planum quomodo refringat lumen, *d.* 49. *& ſeqq.*
Planum geometricum. Definitio, *p.* 8.
horizontale, 9.
horopteris, 343.
objectivum, 27.
perſpectivum, 7.
refractionis, *d.* 8.
verticale, *p.* 10.
Plenilunium medium quomodo ſupputetur, *a.* 959. 967.
Pleniluniorum mediorum epocha quomodo inveniatur, 961.
Plenilunium verum quomodo ſupputetur. 970.
Polemoſcopium. Definitio, d. 460. conſtructio, 468.
Poli circuli in ſphæra. Definitio, *ſ.* 12.
Poli eclypticæ diſtantia a polo mundi, *a.* 178.
Poli meridiani ubinam ſint, 87. qualia ſint puncta, 88.
Poli Mundi. Definitio, 46. num ſint mutabiles, 132. num in eadem revolutione mutentur, 114.
Poli ſphæræ. Definitio, *ſ.* 11.
Polyedrum quidnam dicatur in Dioptrica, *d.* 262. ejus theoria, 263. *& ſeqq.* uſus in camera obſcura, 276.
Polyoptrum. Definitio, 466. conſtructio, 470.
Presbyta. Definitio, *o.* 381. quinam ſit, 398. 399.
Priſmatis ſcenographia, *p.* 56. ſcenographice delineati umbra, 85.
Priſmatis cavi ſcenographia, 70.
Priſmatis in aëre penduli umbra, 92.
Priſmatis quinquangularis cavi ſcenographia, 59.
Profunditas. Definitio, *a.* 73. menſura, 94.
Profunditas vera, 73. *apparens*, 73.
Profunditatis poli menſura, 96.
Profunditas Solis quomodo obſervetur, 287. quomodo ſub finem crepuſculi veſpertini

veſpertini & initium matutini inveniatur, *a.* 397.
Projectio. Definitio, *p.* 22.
Projectio lineæ, plani, ſolidi, ibid.
Projectio monſtroſa. Vide Anamorphoſis.
Promontoria Lunæ, *a.* 481.
Proportionalium quantitatum ſymptoma quoddam, *ſ.* 145.
Proſthaphæreſis. Definitio, 652.
Puncta accidentalia quænam in Perſpectiva dicantur, *p.* 80.
Puncta æquinoctialia. Definitio, *a.* 158. ubinam ſint, 177.
Puncta ſolſtitialia. Definitio, 159. ubinam ſint, 177. quomodo ſibi invicem opponantur, 169. 170. quanto intervallo diſtent ab æquatore, 176.
Punctum æſtivum. Definitio, 159.
autumnale, 158.
brumale, ſive *hibernum,* 159.
Punctum concurſus. Definitio, *d.* 22. in ſuperficiebus planis, 73. *& ſeqq.* quomodo in his determinetur, 76. in ſuperficie cava, 112. *& ſeqq.* quomodo in hac determinetur, 113. quomodo in ſuperficie ſphærica cava, 145. quomodo in convexa, 122. 155.
Punctum diſperſus. Definitio, 23. in ſuperficiebus planis, 56. *& ſeqq.* in vitris planis, 57. *& ſeqq.* in ſuperficie concava, 104. *& ſeqq.* in ſuperficie ſphærica concava, 139. in ſuperficie ſphærica convexa, 96. *& ſeqq.* 121. 128. 133.
Punctum diſtantiæ. Definitio, *p.* 19.
Punctum eclipticæ, cum quo ſtella culminat, quomodo determinetur, *a.* 232. quomodo inveniatur, cum quo oritur, 282.
Punctum incidentiæ. Definitio, *c.* 13. *d.* 7.
Punctum objectivum. Definitio, *p.* 27. apparentia quomodo exhibeatur, 33.
Punctum oculi, ſive *viſus.* Definitio, 13. ubinam ſit, 14.
Punctum oriens eclipticæ quomodo computetur, *a.* 218.
Punctum principale, p. 13.
Punctum radians. Definitio, *o.* 8.
reflexionis, c. 13.
refractionis, d. 7.
ſuboculare, c. 283.
verticale, a. 58. 59. 60.
vernale, 158.
Pupilla. Definitio, *o.* 26. magnitudo variabilis, 55. *& ſeqq.* qualis in oculo valente, 394.
Pyramis optica. Definitio, *p.* 4.
Pyramidis baſi inſiſtentis ſcenographia, 62.
Pyramidis ſcenographice delineatæ umbræ, 88. 90.
Pyramidis truncatæ ſcenographia, 65. 67.

Q.

QUadrantis aſtronomici conſtructio, *a.* 106.
Quadrati apparentiæ quomodo inveniantur, *p.* 40. 42. 44.
Quadratum quando inſtar trapezii appareat, *o.* 283.
Quadratum geometricum quale ſit inſtrumentum & quomodo conſtruatur, 172. uſus, 174. *& ſeqq.*
Quadratus quinam adſpectus dicatur, *a.* 928. ejus ſignum, 929.
Quies mobilis apparens, *o.* 361. *& ſeqq.* 374.
Quieſcens quando moveri videatur, 366. 374. quando in plagam contrariam moveri videatur, 369. 376. *& ſeqq.*
Quincunx quinam adſpectus dicatur, *a.* 931.

R.

RAdices motus Solis medii & agogæi quomodo conſtituantur, *a.* 718.
Radicum mediorum motuum & aphelii pro planetis ſuperioribus Tabulæ quomodo conſtruantur, 736.
Radicum nodorum Tabulæ quomodo conſtruantur, 779.
Radiare quando viſibile dicatur, *o.* 13. quænam corpora radient, 14. quomodo radient, 59. 60.
Radiaturæ locus. Definitio, 15.
Radii colorati, rubeus, flavus &c. Definitio, 177. num mutentur per reflexionem, 187.

Radii divergentes quando haberi poſſint pro parallelis, *o.* 93. 94. quando in pupillam fere paralleli incidant, 95.
Radii obliqui in ſuperficie cava, *d.* 139. *& ſeqq.* in convexa refractio, 121. *& ſeqq.*
Radii optici. Definitio, *p.* 5.
Radii paralleli quomodo in plana ſuperficie refringantur, *d.* 49. quomodo in cava, 104. quomodo in convexa, 87. *& ſeqq.*
Radiorum divergentia, *o.* 49.
Radius luminis. Definitio, *o.* 6.
Radius directus, 7.
incidens, *c.* 14. *d.* 4.
Radius obliquus quomodo refringatur, *d.* 56. *& ſeqq.*
Radius perpendicularis cur intenſior obliquo, *o.* 84.
Radius reflexus. Definitio, *c.* 15.
refractus, *d.* 5.
Rectangulum quando inſtar trapezii appareat, *o.* 283.
Reductio ad eclipticam. Definitio, *a.* 770. quomodo inveniatur, 786.
Reductionum Tabulæ quomodo conſtruantur, 787.
Reflexibilitas radiorum. Definitio, *o.* 181.
major, 182.
minor, ibid.
Reflexibilitas radiorum diverſa evicta, 195. *& ſeqq.*
Reflexionis lex, *c.* 24. *& ſeqq.*
Reflexio luminis. Definitio, 38. evicta, 50. 53. 54. quid dicatur in theoria Lunæ, *a.* 857.
Refrangibilitas radiorum. Definitio, *o.* 179.
major, 180.
minor, ibid.
Refrangibilitas radiorum diverſa evicta, 190. *& ſeqq.*
Refractio. Definitio, *o.* 39. evicta, 54. in vitro qua lege fiat, *d.* 25. 26. in aqua, 28. in ſpiritu vini & aëre, *ibid.*
Refractionis lex prope vera, *d.* 33. 34. 39. vera, 25. *& ſeqq.* 42.
Refractionis lex quomodo per experimenta detegatur, *d.* 24. quomodo a priori analytice, 36.
Refractionum Tabula, *a.* 349.
Refractio luminis in atmoſphæra, *a.* 334. quod augeat altitudinem Solis & ſtellarum, 335. quomodo mutet aſcenſionem rectam, obliquam, declinationem, 352. longitudinem item & latitudinem, 353. num ſit in dato loco conſtans, 341. ubi maxima, 344. quomodo decreſcat verſus zenith, 344. an eadem in Sole & ſtellis, 345. quomodo obſervetur, 347.
Refractio altitudinis. Definitio, 355.
Refractio aſcenſionis & deſcenſionis. Definitio, 356. quomodo inveniatur, 360.
Refractio declinationis. Definitio, 356. quomodo inveniatur, 360.
Refractio latitudinis. Definitio, 359. quomodo inveniatur, 361.
Refractio longitudinis. Definitio, 358. quomodo inveniatur, 361.
Regula catholica Trigonometriæ ſphæricæ, *ſ.* 112.
Regula ſinuum catholica in Trigonometria, 101. 102.
Regula tangentium catholica in Trigonometria, 109. 110.
Remotiora quando appareant ſublimiora, *o.* 318. 319. 323. quando depreſſiora, 321. 322. 325. quomodo appareant ad dextram vel ſiniſtram ſita, 330. 331.
Remotius quando tardius moveri videatur, 354. quando eadem celeritate, 355.
Remotorum viſio qualis ſit, 314.
Repræſentatio. Definitio, *p.* 22.
Rerum ſuper pavimento elevatarum ſcenographia, 76.
Retina, *o.* 30.
Retrogradatio mobilis apparens, *o.* 368.
Retrogradatio planetæ. Definitio, *a.* 533. explicata, 587. 588. 591. 592.
Revelatio planetarum circa Solem quomodo determinetur, 729. 751. 782.

S.

Satellites planetæ. Definitio, *a.* 489. diſtantiæ veræ a ſuis primariis quomodo inveniantur, 923.
Satellites Jovis a quonam fuerint detecti, 500. qualia ſint corpora, 504. quales ſint planetæ, 530.
Satellitum Jovis figura, 509. maculæ, 510. atmoſphæra alterabilis, 511. tempora periodica quomodo inveniantur, 882. eclipſes, 502. 505. diſtantiæ a Jove, 924.
Satellites Jovis ſpurii, a. 519. qualia ſint corpora, 523.
Satellites Saturni, 519. quomodo obſervati, *ibid.* quales ſint planetæ, 530.
Satellitum Saturni diſtantiæ a Saturno, 884. 925. eclipſis, 520. 521. tempora periodica quomodo inveniantur, 882.
Saturnus. Definitio, 32. quale corpus, 523. 524. num circa axem gyretur, 498.
Saturni facies qualis obſervetur, 513. 514. ſimilitudo cum Tellure, 525. a Luna occultandi figura ovalis, 475. hujus cauſa, 476.
Saturnus Jovialis, 501.
Scenographia. Definitio, *p.* 26. quomodo fiat, 55. *& ſeqq.*
Scenographia mechanica, 87.
Sclerotica tunica. Definitio, *o.* 21. cur ſit tenax, 22.
Scorpius, *a.* 160.
Scrupula defectus. Definitio, 949. quomodo inveniatur pro Luna, 951. quomodo pro Sole, 1001.
Scrupula dimidiæ durationis. Definitio, 952. quomodo inveniantur in eclipſi lunari, 956. quomodo in ſolari, 1003.
Scrupula dimidiæ moræ. Definitio, 953. quomodo inveniantur, 759.
Scrupula emerſionis. Definitio, 955. quomodo inveniantur, 958.
Scrupula incidentiæ, ſive *caſus.* Definitio, 954. quomodo inveniantur, 958.
Scrupula menſtrua longitudinis. Definitio, *a.* 842. quomodo inveniantur, 848.
Scrupula latitudinis. Definitio, 871.
Sectio quid dicatur in Perſpectiva, *p.* 6.
Sectio obliqua coni ſcaleni quando circulus, *ſ.* 151.
Sectio obliqua cylindri qualis ſit, *c.* 276.
Sectoris circuli ad aream circuli ratio, *a.* 683.
Semidiametri apparentes Lunæ & Solis quomodo ad datum tempus inveniantur, 972.
Semidiametrorum apparentium Lunæ & Solis Tabulæ quomodo conſtruantur, 973.
Semidiameter apparens penumbræ. Definitio, 1055. quomodo inveniatur, 1056.
Semidiameter apparens Terræ in Luna vel planeta quanta ſit, 1015. quod in Sole inſenſibilis, 1118.
Semidiameter penumbræ. Definitio, 1050.
Semidiameter Solis quomodo in camera obſcura inveniatur, *o.* 306.
Semidiameter umbræ Lunaris apparens, *a.* 1029. quomodo inveniatur, 1030.
Semiſextus quinam adſpectus dicatur, 931.
Seſquadrus quinam ſit adſpectus, 931.
Sextilis. Definitio, 928. ſignum, 929.
Sidera Medicæa, 501.
Sidera Urbanoctaviana, 519.
Signum cœleſte. Definitio, 160.
Signorum cœleſtium nomina, ibid.
Signa æſtiva quænam ſint, 161.
auſtralia, ſive *meridionalia*, 162.
autumnalia, 161.
borealia, ſeu *ſeptentrionalia*, 162.
vernalia, ibid.
Sinus & arcus differentia quomodo inveniatur, *a.* 695.
Sinus ſummæ duorum arcuum quadrante minorum ratio ad ſinum differentiæ eorundem, *ſ.* 143.
Sinus totius ratio ad tangentem & cotangentem, 104.
Sinuum verſorum ratio, *a.* 659. 660.
Sirius num in ſpeculo convexo ſub aquis videatur in diebus canicularibus, *c.* 177.

Situs

Situs viſibilis quando erectus, *o.* 346. quando inverſus, 347.
Sol qualis ſit ſubſtantia, 431. num ignis purus, 434. an mutationibus obnoxius, 421. cur ſit luminare magnum, 409. quomodo in verticali primario obſervetur, 127. in quonam ſemicirculo eclipticæ diutius commoretur, 655. 656.
Sol quid dicatur in oculo, *o.* 25.
Solis in quatuor eclipticæ quadrantibus mora, *a.* 668. ad Terram ratio quoad ſoliditatem & ſuperficiem, 916.
Solis diameter apparens quomodo obſervetur, 547. 548. qualis obſervetur, 549.
Solis diſtantia a Terra quomodo inveniatur, 894. quanta ſit, 896.
Solis figura qualis ſit, 425. 435.
Solis locus in ecliptica quomodo obſervetur, 203.
Solis motus proprius quomodo innotuerit, 26. 27. quomodo obſervetur, 155. 156.
Solis orientis & occidentis figura ovalis ſeu *elliptica*, 475. ejus cauſa, 476.
Solidi cujuſcunque ſcenographia, *p.* 56.
Soliditatum planetarum ratio ad ſoliditatem Solis quomodo inveniatur, *a.* 910. qualis ſit, 911.
Solſtitium. Definitio, *a.* 159. quomodo obſervetur, 657. 666.
Solſtitium æſtivum, 159.
brumale, ibid.
Spatia amplitudinem viſus in diverſis diſtantiis definientia quomodo ſe habeant, *o.* 243. 244.
Specillum. Definitio, *d.* 15.
Specularia. Definitio, *c.* 1.
Speculum. Definitio, 3. theoria analytice inveſtigata, 312. *& ſeqq.*
Speculum planum. Definitio, 5. phænomena, 51. *& ſeqq.* cur lumen Solis non intendat, 66. quantum eſſe debeat, ut te integrum in eo contuearis, 77. 80. item objectum quodcunque aliud, 78. 84. quomodo poliatur, 43. *& ſeqq.* quomodo conficiatur, 49.
Speculum cavum. Definitio, *c.* 7. proprietates & ſymptomata, 208. *& ſeqq.* quomodo ex metallo paretur, 201. *& ſeqq.* quomodo vitreum terminetur, 207.
Speculum chalybeum quodnam dicatur, 203.
Speculum conicum. Definitio, 10. quomodo fiat, 142. 262. uſus in anamorphoſibus, 301.
Speculum convexum. Definitio, 6. phænomena, 144. *& ſeqq.* uſus in Arte pictoria, 176. quomodo fiat, 140.
Speculum cylindricum. Definitio, *c.* 9.
Speculum cylindricum convexum. Definitio, 9. theoria, 266. *& ſeqq.* 277. 278. quomodo fiat, 262.
Speculum cylindricum concavum. Definitio, 9. theoria, 294. *& ſeqq.*
Speculum ellipticum. Definitio, 12. cur difficillime paretur, 263. quomodo lumen in foco uno poſitum reflectat, 310. 311.
Speculum hyperbolicum. Definitio, *c.* 11. cur difficillime paretur, 142.
Speculum metallicum quomodo fiat, 201. quomodo poliatur, 204.
Speculum parabolicum. Definitio, 11. quomodo lumen Solis reflectat, 306. cur ſit uſtoriorum præſtantiſſimum, 307. cur difficillime paretur, 263.
Specula priſmatica vitrea quomodo fiant, 142.
Specula pyramidalia quomodo fiant, 142. 262. uſus in anamorphoſibus, 304. *& ſeqq.*
Speculum ſphæricum. Definitio, 8.
Specula uſtoria quænam ſint, 214. theoria, 209. *& ſeqq.* 215. *& ſeqq.* phænomena, 221. inter alia celebria, 220. 221. Tſchirnhuſiana, 221. quomodo ex ligno, gypſo, charta, ſtramine & auro ſtrepero parentur, 219.
Sphæra. Definitio, *ſ.* 6. proprietates & ſymptomata, 13. *& ſeqq.* quando inſtar circuli appareat, *o.* 277.
Sphæræ illuminatio quomodo ſe habeat, *o.* 111. *& ſeqq.* pars illuminata quomodo

modo inveniatur, *o.* 115. *& ſeqq.*
Sphæræ pars quanta videatur, 246. 247.
Sphæræ pars hemiſphærio major quando ab oculo videri poſſit, 428. quando minor, 429.
Sphærarum theoria refractionis, *d.* 178. *& ſeqq.*
Sphæra activitatis luminis quomodo augeatur, *o.* 108. 109.
Sphæra armillaris, *a.* 189.
Sphæra mundana num motu æquabili moveatur, 135. 136.
Sphærica. Definitio, *ſ.* 1.
Statio planetæ. Definitio, *a.* 531. explicata, 587. 588.
Stellæ erraticæ. Definitio, 31.
Stellæ fixæ. Definitio, 25. quomodo interdiu obſerventur, 230. beneficio globi cognoſcantur, 317.
Stellarum diſtantiæ quomodo obſerventur, 225. diſtantia a Terra æqualis quod appareat, 8. diſtantia a vertice num ob motum annuum Telluris mutetur, 594. num hæc variatio cum parallaxi annua conveniat, 600. revolutio diurna num conſtantis magnitudinis, 110. mora ſupra & infra horizontem quomodo computetur, 268. quomodo ope globi inveniatur, 322.
Stellæ novæ quænam ſint, 1127. 1128.
Subocularis quænam linea dicatur, *c.* 283.
Superficies quando inſtar lineæ appareat, *o.* 273.
Superficies Lunæ quomodo ſe habeat ad ſuperficiem Terræ, *a.* 913.
Superficies planetæ quomodo ſe habeat ad ſuperficiem Solis, 911. quomodo ratio hæc inveniatur, 910.
Superficies refringens. Definitio, *d.* 6.
Synodus. Definitio, *a.* 535.
Syſtema Copernicanum quodnam dicatur, 632.
Syſtema planetarium. Definitio, 528. explicatum, 630.
Syſtema Terræ motæ an Scripturæ adverſum, 626. 627.
Syſtema Terræ quieſcentis num in Aſtronomia & Phyſica uſui ſit, *a.* 621.
Syſtema Tychonicum quodnam dicatur, 632.

T.

Tabula quid dicatur in perſpectiva, *p.* 6.
Tabularum aſtronomicarum nova forma, *a.* 723.
Tabulæ latitudinariæ quænam dicantur, 791.
Tangentium ratio, 794.
Taurus, 160.
Teleſcopium. Definitio, *d.* 326. inventor, 327. quomodo in microſcopium convertatur, *d.* 454. 455. quomodo longius a tubi molimine liberetur, 383. quantum augeat objecta, quomodo obſervetur, 399.
Teleſcopium aſtronomicum. Vide *Tubus aſtronomicus.*
Teleſcopium terreſtre. Vide *Tubus terreſtris.*
Teleſcopium catadioptricum in uſum obſervationum cœleſtium quomodo conſtruatur, *d.* 385.
Tempus, quo arcus æquatoris per meridianum tranſit, quomodo computetur, *a.* 211. quo ſtella culminat, quomodo inveniatur, 294. nocturnum quomodo obſervetur, 295. 296. quomodo computetur, 297. 298.
Tempus æquale quam habeat menſuram, 710.
Tempus apparens, ſive *verum.* Definitio, 713. quomodo in medium convertatur, 715.
Tempus incidentiæ & repletionis in eclipſi Solis quomodo determinetur, 1004.
Tempus medium. Definitio, 712. quomodo in apparens convertatur, 715.
Tempus obſcuritatis maximæ in eclipſi terreſtri quomodo inveniatur, 1084.
Temporum periodicorum planetarum circa Solem ratio, *a.* 779. ſatellitum Jovis & Saturni circa ſuum primarium, 885.
Tenebræ. Definitio, *o.* 121.
Terra num moveatur motu vertiginis &

& motu annuo circa Solem, *a.* 622. quando in umbram Lunæ incurrere nequeat, 1026. quando incurrat, 1027.
Terræ hemiſphærium quomodo in Luna appareat, 1014.
Terræ motæ ſyſtema qualia admittat phænomena, 585. *& ſeqq.*
Terræ motus a quibusnam fuerit defenſus, 625. num S. S. adverſus, 626. num a membro Eccleſiæ Romanæ ſalva conſcientia admitti poſſit, 628.
Terræ obſcuratio quando maxima, 1071.
Terræ quieſcentis ſyſtema qualia admittat phænomena, 611. *& ſeqq.*
Teſſellatæ imagines quomodo conſtruantur, quæ in partes diſſectæ oculo integræ appareant, *o.* 311.
Tetraëdri ſuper angulo ſolido conſtituti ſcenographia, *p.* 68. ſcenographice delineati umbra, 89.
Tetragonus qualis ſit adſpectus, *a.* 928. ſignum, 929.
Theatrorum figura optima, *o.* 230. 231.
Theoria planetarum, *a.* 633. *& ſeqq.*
Tranſitus cometæ per eclipticam quomodo inveniatur, 1140. item per æquatorem, 1141.
Tremor circa limbum Lunæ in eclipſi Solis totali obſervatus, *a.* 454.
Trianguli apparentia quomodo inveniatur, *p.* 38.
Triangulum æquatorium quodnam a KEPLERO in theoria planetarum elliptica dicatur, *a.* 688.
Triangulum opticum. Definitio, *p.* 4.
Triangulum ſphæricum. Definitio, *ſ.* 3. proprietates, 55. *& ſeqq.*
Triangulorum rectangulorum proprietates, *ſ.* 49.
Triangulum ſphæricum. Definitio, 3. proprietates, 136. *& ſeqq.* 144. 146. 148. *& ſeqq.* 354. *& ſeqq.*
Trianguli ſphærici æquicruri proprietas, 147.
Triangulorum ſphæricorum obliquangulorum proprietates, *ſ.* 154. *& ſeqq.* reſolutio, 158. *& ſeqq.*
Triangulorum ſphæricorum rectangulorum proprietates, 98. *& ſeqq.* 165. *& ſeqq.* reſolutio, 114. *& ſeqq.* 134.
Tridecilis quinam ſit adſpectus, *a.* 931.
Trigonometria catholica, *ſ.* 103. 111.
Trigonometria ſphærica. Definitio, 2.
Trigonus, ſive *Trinus.* Definitio, 928. ſignum, 929.
Trioctilis, quinam adſpectus dicatur, 931.
Tritura vitrorum quomodo fiat, *d.* 533. 535.
Tropici. Definitio, *a.* 181. diſtantia quanta, 182.
Tropicus cancri. Definitio, 181.
capricorni, 181.
Tubus. Definitio, *d.* 326.
Tubus aſtronomicus. Definitio, 333. conſtructio, 358. proprietates, 359. *& ſeqq.* quomodo conſtruatur, 376. quomodo in terreſtrem convertatur, 388.
Tubus ductitius in uſum teleſcopii quomodo conſtruatur, *d.* 337.
Tubus Galilæanus. Definitio, 331. conſtructio, 340. proprietates, 341. *& ſeqq.*
Tubus Hollandicus. Vide *Galilæanus.*
Tubi Newtoniani conſtructio, 376.
Tubus terreſtris. Definitio, 334. conſtructio, 387.
Tunica Ruyſchiana num in oculo detur, *o.* 32.

V.

Valles in Luna num dentur, *a.* 479.
Variatio in motu Lunæ quid dicatur, 857. quomodo inveniatur, 860.
Variatio maxima quanta ſit, 859. quomodo inveniatur, 858.
Vas hydromanticum. Definitio, *d.* 462. conſtructio, 470.
Venus. Definitio, *a.* 35. quale corpus, 524. num Terræ ſimilis, 525.
Veneris digreſſiones maximæ a Sole quomodo obſerventur, *a.* 749.

Veneris diſtantia a Terra, *a.* 901.
macula, 494.
motus vertiginis, 496. 497.
Veneris phaſes, quomodo appareant, 491. 538. quales ſint in conjunctione, 491.
Venus Jovialis, 501.
Vertex coni umbroſi, 1041.
Verticalis primarius. Definitio, 72.
Via cometæ quomodo in globo deſignetur, 1142.
Via Lunæ a Sole, 1062.
Via penumbræ. Definitio, 1061. qualis ſit, 1064.
Via umbræ quænam ſit, 1062.
Vicina cur diſtinctius videantur remotis, *o.* 72. cur majora appareant remotioribus, 211.
Vicinius quando celerius moveri videatur, 358. quomodo ad alia remotiora relatum appareat, 333.
Virgo, *a.* 160.
Viſibile quomodo in oculo delineetur, *o.* 76. quando non videatur, 71. quando clarius, 390. cur non prorſus diſtincte, 72. quando moveri, 68. augeri, 371. minui, 372. propius acceſſiſſe videatur, 373. quando majus, quando minus appareat, 66. quomodo per lentem convexam, *d.* 248. 252. *& ſeqq.* quotuplex videatur per polyhedrum, 166. 268. quomodo radiet, *o.* 59. 60. cur duobus oculis unicum videatur, 345. quando geminatum, 350. *& ſeqq.* quomodo appareat per lentem concavam, *d.* 193. oblique oppoſitum quantum appareat, *o.* 268. *& ſeqq.*
Viſibilia quando æqualia appareant, *o.* 67.
Viſibilis locus ubinam ſit, 344. *& ſeqq.*
Viſibilium in camera obſcura repræſentatio, *o.* 110. *& ſeqq. d.* 236. *& ſeqq.* per lentes convexas viſorum theoria, 239. *& ſeqq.*
Viſio quando eadem, *o.* 43. 44.
Viſionis principium, 70.
Viſio magnitudinis quo fundamento nitatur, *o.* 66. 67.
Viſionis motus principium, 68.
Viſio confuſa. Definitio, *o.* 41.
diſtincta, 40.
directa, 3.
reflexa, *c.* 2.
refracta, *d.* 3.
Vitra cauſtica quænam ſint, *d.* 198. *& ſeqq.* phænomena, 199.
Vitra quomodo ad poliendum apta ſeligantur, 532. ad trituram aptentur, 533. poliantur, 527. *& ſeqq.*
Vitrum quid dicatur in Perſpectiva, *p.* 7.
Vitrum concavum quomodo poliatur, *d.* 540.
Vitrum utrinque concavum ſeu *concavo-concavum.* Definitio, 19.
Vitrum utrinque æqualiter concavum, ibid.
inæqualiter concavum, ibid.
Vitrum convexum quomodo atteratur & ad poliendum diſponatur, 535. poliatur, 539.
Vitrum convexo-convexum, ſive *utrinque convexum.* Definitio, 17.
Vitrum utrinque æqualiter convexum, ibid.
Vitrum utrinque inæqualiter convexum, ibid.
Vitrum objectivum. Definitio, *d.* 328.
oculare, 329.
Vitra plana quomodo poliantur, 541.
Vitrum plano-concavum. Definitio, 18.
plano-convexum, 16.
Vitrum polyedrum quomodo poliatur, 543.
Umbra. Definitio, *o.* 122. theoria, 123. *& ſeqq.* quomodo multiplicetur, 130. quando creſcat & decreſcat, 157.
Umbræ apparentia, ſive projectio, *p.* 83. *& ſeqq.* 94. *& ſeqq.*
Umbræ a ſphæra projectæ longitudo quomodo inveniatur, *o.* 143.
Umbræ intenſitas, 131. *& ſeqq.* figura, 134. *& ſeqq.*
Umbræ longitudo quomodo in plano horizontali inveniatur, 146. quando altitudini corporis æqualis, 148.

Umbræ

Umbræ lumini per feneſtram projecto convenientis projectio, *p.* 102.
Umbra mera quid dicatur, *o.* 122.
Umbræ montium lunarium, *a.* 483.
Umbrarum perpendicularum opacorum longitudines quam habeant proportionem, *o.* 156.
Umbra recta. Definitio, 159. theoria, 163. *& ſeqq.* ad verſam ratio, 165. 170. uſus, 171.
Umbra ſatellitum Jovis obſervata, *a.* 506. 507. figura ejus, 508.
Umbra verſa. Definitio, 161. theoria. 166. *& ſeqq.* uſus, 171.
Umbra Lunæ. Definitio, *a.* 1029. quo dirigatur, 485. num Terram totam tegere poſſit, *a.* 1035. quantam Terræ partem tegat quomodo inveniatur, 1036.
Umbræ lunaris diameter vera quomodo inveniatur, 1034. via in globo terreſtri, vel mappa geographica quomodo delineetur, 1095.
Umbræ terreſtris ſemidiameter apparens in loco tranſitus Lunæ quomodo inveniatur, 941.
Volantes quando nos conſpiciamus in ſpeculo plano, *c.* 74.
Uvea tunica. Definitio, *o.* 24.

Z.

Zenith. Definitio, *a.* 58.
Zodiacus. Definitio, 188.
Zodiacus cometarum, 1157.

FINIS INDICIS SEXTI.

VII.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO IV. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *g.* Geographiam & Hydrographiam, *c.* Chronologiam, *ſ.* Gnomonicam, ſive Sciatericam, *p.* Pyrotechniam, *m.* Architecturam militarem, *a.* Architecturam civilem, & numeros §§. deſignare: ubi vero nulla numeris adſcribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

AB, *c.* 112. 121. 123.
Abacus, *a.* 104.
Abend, *g.* 215.
Aben meh, *c.* 113.
Abib, 121.
Acceſſus. Definitio, *m.* 239. quomodo paretur, 244.
Acroteria. Definitio, *a.* 275. ſitus 276. dimenſiones, 277. *& ſeqq.* quomodo conſtruenda, 282. *& ſeqq.*
Acus magnetica. Definitio, *g.* 291. quomodo paretur, 297.
Adar, *c.* 112. 121. 123.
Adar meh, *c.* 113.
Adar prior, 121.
poſterior, ibid.

Ædes in antis. Definitio, *a.* 236. quales ſint, 239.
Ædificia quomodo extruenda, *a.* 4.
Ædificii area quam habere debeat figuram, *a.* 421. *& ſeqq.*
Ædificii dimenſiones quomodo reperiantur, 428. *& ſeqq.*
Ædificii firmitas. Definitio, *a.* 6.
Ædificium quale eſſe debeat, 18. *& ſeqq.*
Æquator. Definitio, *g.* 13. proprietates, 14.
Æra. Definitio, *c.* 81.
Æra Actiaca, 268.
Hegiræ, 227.
Hiſpanica, 265.
Judaica, 212.
Martyrum, 225.
Perſica, 225.
Yezdegerdica, 255.
Æſtas. Definitio, *g.* 76. ubinam bis ſit, 200. quando ſub æquatore, 101. quando in zona temperata & frigida, 112. cur in zona torrida non ubivis eodem tempore, 105.
Æſtatis initium & finis. Definitio, 76. in zona torrida quomodo inveniatur, 106.
Die auſſere Böſchung, *m.* 52.
Die auſſere Polygon, *m.* 52.
Affirer meh, *c.* 113.
Africus quinam dicatur ventus, *g.* 215. 216.
Aiyar, *c.* 112.
Ala. Definitio, *m.* 32. num concava fieri debeat, 74. quænam melior, 68. *& ſeqq.*
Alarum multiplicatio, 75.
retractio, 69. *& ſeqq.*
Ala ſecundaria. Definitio, 43.
Alſanus quinam ventus, *g.* 215. 216.
Altitudo objecti ad diſtantiam datam conſpiciendi quomodo inveniatur, 50.
Altitudo Solis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Ambitus Telluris quomodo inveniatur, *g.* 35. 40. quantus ſit, 42.
Ambulacrum valli. Definitio, *m.* 25. latitudo, 26.
Amphiproſtylos. Definitio, *a.* 236. qualis ſit ædes, 241.
Amphiſcii. Definitio, *g.* 152. ubinam dentur, 153.
Amplitudo occidua Solis quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
Amplitudo ortiva Solis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Analemma. Definitio, *ſ.* 132.
Analemma ſigniferum. Definitio, 132. conſtructio, 133.
Angulus centri. Definitio, *m.* 51.
Angulus defendens exterior, 50.
interior, 49.
Anguli horarii, quomodo inveniantur in horologio horizontali, *ſ.* 50. in meridionali, 58.
Angulus humeri. Definitio, *m.* 46.
Angulus imminutus, 47.
Angulus loxodromiæ, loxodromicus. Definitio, *g.* 318. quomodo inveniatur, 322.
Angulus polygoni. Definitio, *m.* 44.
Angulus propugnaculi. Definitio, 30. 45. magnitudo, 79.
Annuli ſolaris univerſalis conſtructio, *ſ.* 165.
Annuli ſolaris particularis conſtructio, 167.
Annus. Definitio, *c.* 66.
Anni epochæ unius quomodo reducantur ad annos epochæ alterius, 84.
Antœci quales habeant viciſſitudines tempeſtatum, *g.* 186. temporis, 177. 192.
Annus abundans. Definitio, *c.* 333. ejus character, 334.
Annus Ægyptiacus. Definitio, 106. quale ejus principium, 107.
Annus æræ Actiacæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 271.
Annus æræ Hiſpanicæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 267.
Annus Æthiopicus. Definitio, 111.
Arabum, 125.
Atticus, 117.
Annus CHRISTI quomodo reducatur ad annum Gratiæ, 226. ad Judaicum, 216. ad annum Olympiadum, 238. ad annum Græcorum & Ruſſorum, 198. ad annum mundi, 209. ad annum periodi Julianæ, 185.

c. 185. ad annum urbis conditæ, 246.
Annus ante CHRISTUM quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, *c.* 187.
Annus deficiens. Definitio, 331. character, 332.
Annus Euſebianus, quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, 220. ad annum CHRISTI, 222.
Annus fixus. Definitio, *66.*
Annus Galaleus. Definitio, 113. ejus præſtantia, 115.
Annus Græcorum. Definitio, 117.
Annus Græcorum recentiorum quomodo reducatur ad annos CHRISTI, 197. ad annos periodi Julianæ, 194.
Annus Gratiæ. Definitio, 225. quomodo reducatur ad annum CHRISTI, *226.*
Annus Gregorianus. Definitio, 101. differentia ab aſtronomico, 102. a Juliano, 103. num ſit biſſextilis quomodo inveniatur, 105.
Annus Hebræorum antiquus, 121.
Annus Julianæ Epochæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 263.
Annus Julianus. Definitio, 97. quantum deficiat ab aſtronomico, 98. num ſit biſſextilis quomodo inveniatur, 105.
Anni Juliani dies quomodo reducatur ad diem Judaici, 346.
Annus Judæorum recens, ſive *Judaicus.* Definitio, 123. quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 217. ejus ſpecies, 331. 333. quomodo ſpecies inveniatur, 345.
Anni Judaici dies quomodo reducatur ad diem Juliani, 345.
Annus lunaris cœleſtis. Definitio, *c.* 72. quantitas, 73.
Annus lunaris civilis communis. Definitio, 74. quantitas, 75.
Annus lunaris civilis embolimæus. Definitio, 74. quantitas, 75. 76.
Annus Macedonicus. Definitio, 119.
Anni mundi conditi epochæ Alexandrinæ quomodo reducantur ad annos CHRISTI, 210.
Anni mundi conditi Græcorum hiſtoricorum quomodo reducantur ad annos CHRISTI, *c.* 206. quomodo ad annos periodi Julianæ, 204.
Annus Nabonaſſareus quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 254. quomodo ad annum periodi Julianæ, 251.
Annus nativitatis CHRISTI num ſit certus, 190.
Annus Numæus. Definitio, 91. quantitas, *ib.*
Annus olympiadum quomodo reducatur ad annos CHRISTI, 238.
Annus ordinarius. Definitio, 329. character, 330.
Annus periodi Julianæ quomodo ex datis cyclis Solis, Lunæ & Indictionum inveniatur, 181. quomodo reducatur ad annum ante CHRISTUM, 188. ad annum CHRISTI, 186. Judaicum, 213. Euſebianum, 220. annum urbis conditæ, 242. annum Ruſſorum & Græcorum, 194.
Annus Perſicus. Definitio, 113. quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 259. quomodo initium in anno Juliano inveniatur, 260.
Annus Romanorum veterum. Definitio, 88. quantitas, 89.
Annus Ruſſorum quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 197. quomodo ad annum periodi Julianæ, 194.
Annus ſecularis ad quodnam ſeculum referatur, 87.
Annus ſolaris. Definitio, 67.
Anni ſolaris civilis quantitas, 68.
Annus ſolaris biſſextilis, 71.
communis, 69. 70.
Annus Syriacus, 112.
Annus Turcarum. Definitio, 125. quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 352. initium ejus quomodo computetur, 353. 355.
Annus vagus. Definitio, 66.
Annus Urbis conditæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, 245. quomodo ad annum periodi Julianæ, 241.

Annus Yezdegerdicus. Definitio, *c.* 113. cum quo conveniat, 114.
Antepagmenta, *a.* 133.
Antipodes. Definitio, *g.* 180. quod dentur, 181. quinam ſint, 182. 183. quomodo ope globi inveniantur, 237. quales habeant viciſſitudines diei ac noctis, 185. tempeſtatum, 186.
Antœci. Definitio, 176. quinam ſint, 177. quibus nulli ſint, 195. quomodo ope globi inveniantur, 237. cum antipodibus comparati, 186. & *ſeqq.* 206.
Apeliotes quinam ſit ventus, *g.* 215.
Apophygis. Definitio, *a.* 111. delineatio, 117.
Aprilis, *c.* 97.
Aquilo quinam ventus, *g.* 215. 216.
Architecti officium, *a.* 2. 3.
Architectura civilis. Definitio, 1. regulæ ejus quomodo inveniantur, 5.
Architectura militaris. Definitio, *m.* 1. ejus prima principia, 2. & *ſeqq.*
Arctapeliotes qualis ventus, *g.* 215.
Arcus. Definitio, *a.* 253. delineatio, 257. partes & membra, 258. 259.
Arcuum Diſpoſitio, 274.
Arcus æquatoris inter Loxodromiæ initium in æquatore & meridianum datum interceptus quomodo inveniatur, *g.* 336.
Aræoſtylon, *a.* 225.
Ardhaſcht meh, *c.* 113.
Areæ ſubdialis neceſſitas, *a.* 442. 443. 444.
Arenæ qualitates, 59. examen, 60.
Argeſtes qualis ventus, *g.* 215. 216.
Artilleria, *p.* 2.
Arx. Definitio, *m.* 201.
Aſcenſio obliqua Solis quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
Aſcenſio recta Solis quomodo ope globi inveniatur, *ibid.*
Aſcii. Definitio, *g.* 149. quinam ſint, 150. ubinam non dentur, 151. quinam ſint dato die, quomodo inveniatur, 168.
Aſrudia meh, *c.* 113.
Aſtragalus, Definitio, *a.* 105. delineatio, 113.
Athyr, *c.* 106.
Atlantes. Definitio, *a.* 81.
Auguſtus, *c.* 97.
Auricula. Definitio, *m.* 72.
Auſſenwercke, 109.
Auſter, *g.* 211. 215.
Auſtro-Africus qualis ventus, 215.
Autumni initium & finis. Definitio, 79.
Autumnus quando ſub æquatore, 103. ubi in zona torrida, 109.
Axis Telluris. Definitio, 12.

B.

Das Bæncklein, *m.* 52.
Baſis columnæ, *a.* 96. & *ſeqq.*
Baſi columnæ & ſtylobatæ quænam membra conveniant, 132.
Baſis columnæ & capituli Tuſcani & Dorici, 198.
Baſis ſtylobatæ, 95.
Baſis & Coronidis ſtylobatæ ichnographia quomodo delineetur, 193.
Batterie, *m.* 127.
der Bedeckte Weg, 52.
Behen meh, *c.* 113.
Berme, *m.* 109.
Beſtrichener Winckel, 52.
Bogenſtellungen, *a.* 253.
Bollewerk, *m.* 52.
Bollwercks Winckel, 52.
Bomba. Definitio, *p.* 31. quomodo paretur, 42. & *ſeqq.*
Borapeliotes, *g.* 215. 216.
Boreas, 215.
Borolybicus, 215.
Brille, *m.* 109.
Bruſtwehre, ibid.

C.

Cæcias, quinam ventus, *g.* 215. 216.
Cæmentorum virtutes quomodo explorentur, *a.* 48.
Calendæ quid ſint, *c.* 95.
Calendarium quomodo conſcribatur, 316.

Calen-

Calendarium correctum. Definitio, *c.* 314.
Calendarium Gregorianum. Definitio, 291.
Calendarium Gregorianum perpetuum, 392.
Calendarium Julianum. Definitio, 271.
Calendarium Julianum perpetuum, 281.
Calibra. Definitio, *p.* 101.
Calx quomodo coquenda, *a.* 65. *& ſeqq.* quomodo examinetur, 71. conſervetur, 72.
Camera. Definitio, 468. conſtructio, 471.
Camini conſtructio, 482.
Canun prior, *c.* 112.
poſterior, ibid.
Capital-Linie, *m.* 52.
Capitulum columnæ. Definitio, *a.* 96. quænam ei conveniant membra, 171.
Capituli Corinthii ichnographia, 207.
Ionici ichnographia, 202.
Romani ichnographia, 205.
Carbas quinam ventus dicatur, *g.* 215. 216.
Carbones ad pulverem pyrium conficiendum idonei quomodo parentur, *p.* 13. *& ſeqq.*
Carbonum qualitates, 19. 20. 21.
Cardi meh, *c.* 113.
Carthaune, *p.* 100.
Caryatides. Definitio, *a.* 82.
Casleu, *c.* 121. 123.
Caſtellum. Definitio, *m.* 201. delineatio, 207. quomodo condi debeat, 202. *& ſeqq.*
Caurus quinam ventus, *g.* 215. 216.
der Centri-Winckel, *m.* 52.
Character anni, *menſis*, *enneadecaëteridos.* Definitio, *c.* 324. menſis quinam, 325. anni quinam, 326. enneadecaëteridos quinam, 327.
Characteres artificiales chronologici ſive *inſtituti.* Definitio, 130.
Characteres aſtronomici chronologici ſive *naturales.* Definitio, 128. quales ſint, 129.
Characteres chronologici. Definitio, 127.
Characteres hiſtorici chronologici. Definitio, 132.
Charta quomodo ſuper tabula expandenda, *a.* 174.
Chartæ reductionis in hydrographia. Definitio, *g.* 363.
Chojac, *c.* 106.
Chorda. Definitio, *m.* 31.
Chronologia. Definitio, *c.* 1.
Circius qualis ſit ventus, *g.* 215. 216.
Circuli horarii ſive *horarum.* Definitio, *ſ.* 28.
Circulus æquinoctialis. Definitio, *g.* 13.
polaris antarcticus, 19.
polaris arcticus, ibid.
Circumvallatio exterior. Definitio, *m.* 235.
interior, 236.
Clima. Definitio, *g.* 114.
Climatis initium, 115. medium, 117. finis, 116.
Climatum Tabulæ quomodo conſtruantur, 138. exhibentur, *ibid.*
Cochlidium. Definitio, *a.* 515. nævi, 516. delineatio, 517.
Colli dimidium. Definitio, *m.* 37.
Columellæ. Definitio, *a.* 80.
Columna. Definitio, 75. quomodo ſuper alia columna erigatur, 289. *& ſeqq.*
Columnæ conjugatæ. Definitio, *a.* 216. quomodo conjugatio fieri debeat, 217. *& ſeqq.*
Columna parietina. Definitio, 75.
Commoditas ædificii. Definitio, *a.* 7.
Compaſſus nauticus. Definitio, *g.* 296.
Computi vulgaris Autor, *c.* 189.
Conclavium altitudo, *a.* 435. *& ſeqq.* communicatio, 440. figura, *ibid.* locus, 441.
Corona, *a.* 104.
Coronis ſtylobatæ, 95. quænam membra ei conveniant, 131.
Coronix, 100. qualis eſſe debeat, 102. quænam membra ei conveniant, 131.
die Cortine, *m.* 52.
Contre-Mine, 109.
Contregarde, ibid.
Corus, *g.* 215. 216.
Craticula ad firmitatem fundamenti quomodo paranda, *a.* 328.

Crepuſculi matutini initium quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
Crepuſculi veſpertini finis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Creutz-Gewôlbe, *a.* 469.
Crucis gnomonicæ conſtructio, *ſ.* 163.
Cuniculi ſubterranei. Definitio, *m.* 154. quid de iis obſervatum, 155. *& ſeqq.* quomodo parentur, 160. 163.
Cyclus Indictionum. Definitio, *c.* 151. quomodo inveniatur, 153.
Cyclus Lunæ. Definitio, 147. quantus ſit, & quamdiu valeat, 148.
Cyclus Solis. Definitio, *c.* 140. quomodo inveniatur, 143.
Cycli Solis pro annis Gregorianis quomodo condantur, 145.
Cycli Solis, Lunæ & Indictionum anni dati periodi Julianæ quomodo inveniantur, 180.
Cylindrus pyrotechnicus. Definitio, *p.* 35.
Cylindricum horologium, *ſ.* 152. *& ſeqq.*
Cymatium Doricum. Definitio, *a.* 107. delineatio, 115.

D.

December, *c.* 97.
Declinatio plani quomodo inveniatur, *ſ.* 90. 101.
Defenſionis quantitas quomodo menſuretur, *m.* 58. *& ſeqq.*
Delineatio acus magneticæ. Definitio, *g.* 293. quomodo obſervetur, 302.
Denticuli quid ſint, *a.* 133. quomodo delineentur, 180.
Diameter Columnæ quomodo inveniatur, *a.* 155. 156.
Diameter globi unius libræ quomodo inveniatur, *p.* 110.
Diameter globorum pro ſingulis ſemunciis libræ quomodo inveniatur, *p.* 109.
Diaſtylon opus, *a.* 225.
Dies. Definitio, *g.* 118. ubinam unicus, 128. ubi perpetuo nocti æqualis, 126. quandonam ubivis terrarum noctiæ qualis, 132.
Dies iidem ubinam æquales, *g.* 135.
Diei longitudo quomodo variet pro locorum latitudine, 134.
Diei breviſſimi & longiſſimi longitudo quomodo inveniatur, 136. 142.
Dies biſſextilis ſeu *intercalaris.* Definitio, *c.* 71.
Dies civilis. Definitio, 3.
Dies naturalis. Definitio, 5. quantitas quomodo inveniatur, 6.
Dies rejiculæ. Definitio, 336.
Dies menſis anni Nabonaſſarei quomodo reducatur ad diem anni Juliani, 202.
Dierum hebdomadis nomina, 45.
Di meh, 113.
Dipteros, *a.* 236. quale ſit opus, 244.
Diſtantia locorum quomodo ope globi inveniatur, *g.* 264.
Diſtantia locorum magno intervallo diſſitorum quomodo inveniatur, 29.
Diſtantia locorum geographica. Definitio, 51. quomodo inveniatur, 63. *& ſeqq.*
Diſtantiæ Solis a vertice menſura, 264.
Dulheggia, *c.* 125.
Dulkaadah, ibid.

E.

Echinus. Definitio, *a.* 106. delineatio, 114.
Ecliptica. Definitio, *g.* 15. ſitus, 16.
Eclipticæ declinatio maxima quomodo inveniatur, 140.
Ecphora. Definitio, *a.* 150.
Einbohrende Defens-Linie, *m.* 52.
Einfallendes Licht, *a.* 390. 391.
Elul, *c.* 112. 121. 123.
Enneadecaëteris Judaica. Definitio, *c.* 322. quot ſit dierum, 323.
Epactæ annuæ. Definitio, 296. quantæ ſint, 297. *& ſeqq.*
Epactæ menſtruæ. Definitio, 294.
Epactæ quomodo per Calendarium diſponendæ, 302.
Epactarum officium, 300.
Epactarum cyclus quando exſpiret, 299. cur non omni ævo ſatisfaciat, 301. 303.

Epactarum expanſa Tabula quomodo conſtruatur, *c.* 306.
Epacta Juliana & Gregoriana anni dati quomodo inveniatur, 310.
Epiphi, 106.
Epiſtylium quid ſit, *a.* 100. quale eſſe debeat, 101.
Epocha. Definitio, *c.* 81. quod ſit arbitraria, 82.
Epocha Conſtantinopolitana, 171.
Diocletiana, 225.
Juliana, 261.
Muhamedica, 227.
Mundi conditi Judæorum, 212.
Mundi Alexandrina, 207.
Mundi Euſebiana, 219.
Mundi recentiorum Græcorum & Ruſſorum, 192.
Mundi Græcorum Hiſtoricorum, 201. 202.
Nabonaſſarea, 247.
Olympiadica, 232.
Urbis conditæ, 239.
Epocha vulgaris CHRISTI *nati* quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, 183.
Epocha diei civilis. Definitio, 10. quomodo conſtituatur, 11. *& ſeqq.*
Eteſiæ, *g.* 216.
Ethanim, *c.* 121.
Euroauſter quinam ventus, *g.* 215.
Euronotus quinam ventus, 216.
Europææ horæ quomodo in Babylonicas convertantur, *c.* 34.
Eurus quinam ventus, *g.* 215. 216.
Eurythmia. Definitio, *a.* 31. *& ſeqq.*
Euſtylon opus, 225.

F.

FAcies. Definitio, *m.* 30.
Facierum magnitudo, 63.
Falconet, *p.* 100.
Famulus pyrotechnicus. Definitio, 37. quomodo fiat, 63.
Faſcia, *a.* 104.
Faſtigium. Definitio, 262.
Favonius quinam ventus, *g.* 215. 216.
Februarius, *c.* 97.
Feneſtra. Definitio, *a.* 381. quomodo conſtruenda, 382. *& ſeqq.* 389. 390. dimenſiones, 387. 388. 395. ſitus, 400. *& ſeqq.* figura, 393. ornatus, 402. 404. quot feneſtræ conclavi unicuique conveniant, 425.
Feneſtra podio ſepta. Definitio, *a.* 414. quomodo conſtruenda, 415. *& ſeqq.*
Feſta immobilia. Definitio, 274. quænam ſint, 275.
Judaica quænam ſint, 549.
Feſta mobilia. Definitio, *c.* 276. quænam ſint, 277.
Figura irregularis quomodo ad regularitatem reducatur, *m.* 185. quomodo muniatur, 186. 188. *& ſeqq.*
Finitor. Definitio, *g.* 28.
Flores capitulorum quomodo delineentur, *a.* 210.
Focus quomodo exſtruatur, *a.* 495. 496. *& ſeqq.*
Folia acanthina cum cauliculis, 133.
Forcipula compoſita. Definitio, *m.* 105. an utilis, 106. quomodo delineetur, 138. 179.
Forcipula ſimplex. Definitio, 103. an utilis, 104. quomodo delineetur, 137. 179.
Fornaces quomodo conſtruendæ, *a.* 486. *& ſeqq.*
Fornices. Definitio, *a.* 468. quomodo conſtruantur, 471.
Foſſæ neceſſitas, *m.* 15. latitudo, 16. latitudo quænam melior, 86. quales terminos habere debeat, 87.
Foſſæ operum externorum magnitudo, 122.
Frons primaria ædium quam plagam reſpicere debeat, *a.* 445. *& ſeqq.*
Frontiſpicium. Definitio, 262. figura, 264. 266. locus, 265. nævi, 267. 268. quomodo delineetur, 272.
Fulcrum. Definitio, 74. quodnam perfectius, 84. quale eſſe debeat, 85. *& ſeqq.*
Fumarii exſtructio, 499. *& ſeqq.*

Fundamentum ædificii. Definitio, *a.* 311. neceſſitas, 313. quale eſſe debeat, 314. & *ſeqq.* dimenſiones, 332. 333. quomodo ponatur, 332. & *ſeqq.* 334. quomodo in loco aquoſo ponatur, 339.

G.

Gallicus, quinam ventus, *g.* 215. 216.
Gangeticus quinam ventus, 215.
Geographia. Definitio, 1.
Geſichts-Linie, *m.* 52.
Gewœlbe, *a.* 469.
Ginbat, *c.* 111.
Glacis, *m.* 52.
Globus aëreus. Definitio, *p.* 71. quomodo componatur, 92.
Globus aquaticus. Definitio, 72. quomodo componatur, 96.
Globus fœtens. Definitio, 41. quomodo componatur, 68.
Globus fumans. Definitio, 40.
Globi incendiarii. Definitio, 38. qua materia repleantur, 52. quomodo repleti ligentur, 54. baptizentur, 55. granatis manuariis impleantur, 57.
Globus lucens. Definitio, 39. 74. quomodo componatur, 66. 96.
Globus obſcurans quomodo componatur, 67.
Globus terreſtris. Definitio, 73. quomodo componatur, 97.
Globus terreſtris in Geographia. Definitio, *g.* 231. conſtructio, 233. 234. uſus, 235. & *ſeqq.* quomodo ita conſtituatur, ut Sol omnes regiones illuminet, quæ in ipſa Tellure illuminantur, 261.
Gnomonica. Definitio, *ſ.* 1.
Gradus Meridiani terreſtris quomodo menſurentur, *g.* 40.
Gradus paralleli quantitas quomodo inveniatur, 45. 46.
Græcus quinam ventus dicatur, 28.
Granata. Definitio, *p.* 31.
Granata manualis, ibid.
Grando pyrotechnica. Definitio, *p.* 32. quomodo paretur, 48.

H.

Haaſe, *c.* 111.
Halber Mond, *m.* 109.
Hamle, *c.* 111.
Haugender Mœrſer, *p.* 142.
Haupt-Linie, 52.
Haziram, *c.* 112.
Hebdomas. Definitio, 43.
Helakim, 40.
Helleſpontius qualis ventus, *g.* 215.
Hemiſphæria. Definitio, *a.* 468.
Heteroſcii. Definitio. *g.* 155. ubinam dentur, 156.
Hexaſtylon quale ſit opus, *a.* 214.
Hiemis initium & finis. Definitio, *g.* 77.
Hiems ubinam unica, 17. quando ſub æquatore, 102.
Hora. Definitio, *c.* 17.
Hora compoſita. Definitio, 17.
ſimplex, ibid.
Horæ antiquæ, 24.
Horæ aſtronomicæ. Definitio, 21. quomodo in Babylonicas convertantur, 31.
Horæ Babylonicæ. Definitio, 19. quomodo in aſtronomicas convertantur, 31. quomodo in Europæas, 34. quomodo horologio inſcribantur, *ſ.* 149.
Horæ Europææ. Definitio, *c.* 22. quomodo convertantur in aſtronomicas, 30. Italicas, 35. Judaïcas, 37.
Horæ Italicæ. Definitio, 20. quomodo convertantur in Europæas, 35. quomodo horologio inſcribantur, *ſ.* 149.
Horæ Judaicæ. Definitio, *c.* 24. quales ſint, 25. & *ſeqq.* quomodo in Europæas convertantur, 37.
Horæ Norimbergenſes, Definitio, 28.
Horæ planetariæ, 24.
Horizon. Definitio, *g.* 28.
Horizon phyſicus, 28.
ſenſibilis, ibid.
Hornwerck, *m.* 109.
Horologiographia, *ſ.* 2.

Horologii deſcriptio generalis, *ſ.* 36. in baculo, 160.
Horologium æquinoctiale. Definitio, 5. quomodo eidem ſignorum paralleli inſcribantur, 140.
Horologium æquinoctiale inferius. Definitio, 5. deſcriptio, 33. quot horas indicet, 7.
Horologium æquinoctiale ſuperius. Definitio, 5. quot horas indicet, 6. quomodo deſcribatur, 30.
Horologium æquinoctiale univerſale quomodo conſtruatur, 34.
Horologium aſtrale. Definitio, 176. conſtructio, 184.
Horologii cylindrici deſcriptio, 152. *& ſeqq.* 161.
Horologia declinantia. Definitio, 76. deſcriptio, 94. 96. 102. 104.
Horologia deinclinata. Definitio, 82. deſcriptio, 109.
Horologium horizontale. Definitio, 10. quo tempore ejus uſus, 11. ejus perfectio, 12. quomodo deſcribatur, 38. *& ſeqq.* quomodo ſub ſphæra parallela, 129. quomodo ſub recta, 124. *& ſeqq.* quomodo paralleli ſignorum eidem inſcribantur, 135.
Horologii horizontalis ſine centro deſcriptio, 119. *& ſeqq.*
Horologii horizontalis univerſalis deſcriptio, 170.
Horologia inclinata. Definitio, 78. deſcriptio, 106.
Horologium lunare. Definitio, 75. deſcriptio, 180. 182.
Horologium meridionale. Definitio, 14. quasnam horas indicet, 15. quomodo deſcribatur, 54. *& ſeqq.*
Horologium nocturnale. Definitio, 177.
Horologium occidentale. Definitio, 22. quas horas indicet, 23. quomodo deſcribatur, 68.
Horologium orientale. Definitio, 20. quas horas indicet, 21. quomodo delineetur, *ſ.* 66.
Horologium polare. Definitio, 25.
Horologium polare inferius. Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo deſcribatur, 72. *& ſeqq.*
Horologium polare ſuperius. Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo deſcribatur, 69. *& ſeqq.*
Horologia reclinata. Definitio, 80. deſcriptio, 108.
Horologium ſeptentrionale. Definitio, 16. quasnam horas indicet, 17. quo tempore nullus ejus uſus, 18. quomodo deſcribatur, 63. 64.
Horologium ſolare. Definitio, 3. diverſitas unde, 4. quomodo vicem lunaris ſuſtineat, 178. quomodo in ſuperficie globi deſcribatur, 150.
Horologia ſolaria primaria quomodo eidem trunco inſcribantur, 74.
Horologia ſine centro. Definitio, 115. ubi conſtruenda, 116. *& ſeqq.*
Horologium verticale. Definitio, 13. quomodo ſub ſphæra recta deſcribatur, 127. quomodo ſub parallela, 130. quomodo ſine centro, 122. *& ſeqq.*
Horologii univerſalis in Tabula quadam portatili deſcriptio, 172.
Hydar, *c.* 111.
Hydrographia. Definitio, *g.* 2.
Hypæthros. Definitio, *a.* 236. quale ſit opus, 247.
Hypafricus qualis ſit ventus, *g.* 215.
Hypaquilo qualis ſit ventus, 215.
Hypargeſtes, qualis ſit ventus, 215.
Hyperboreas qualis ſit ventus, 215.
Hypereurus qualis ventus, *ibid.*
Hypeurus, 215.
Hypocæcias qualis ſit ventus, 215.
Hypocircius qualis ventus, *ibid.*
Hypocorus, ibid.
Hypolibs, ibid.
Hypophœnix, ibid.
Hypothraſcias Scirem, 215.

I.

Jacatit, *c.* 111.
Janua. Definitio, *a.* 372. dimenſiones, 373. *& ſeqq.* figura, 378. locus, 410. 411. ornatus, 402. 404.
Januarius, *c.* 97.
Japyx, *g.* 215.
Ichnographia ædificii. Definitio, *a.* 524. quomodo fiat, 528.
Ichnographia munimenti. Definitio, *m.* 131.
Ichnographia partis alicujus columnæ. Definitio, *a.* 188.
Idus quid ſint, *c.* 95. quot in quolibet menſe, *ibid.*
Jiar, 121. 123.
Imbrices, *a.* 522.
Inclinatio acus magneticæ. Definitio, *g.* 294. quomodo obſervetur, 307.
Inclinatio plani quomodo inveniatur, *ſ.* 88. 89.
Incolæ ejuſdem paralleli quomodo inter ſe comparentur, *g.* 196. *& ſeqq.* 202.
Incumba. Definitio, *a.* 255. membra, 256.
Initium diei civilis. Definitio, *c.* 10. quomodo conſtituatur, 11. *& ſeqq.*
Die innere Bœſchung, *m.* 52.
Droſſirung, ibid.
Polygon, ibid.
Inſtrumentum, quo pulvis pyrius in tormentum immittitur, *p.* 127. in arctum ſpatium redigitur, 128. tormenta repurgantur, 129.
Inſtrumentum declinatorium. Definitio, *ſ.* 85. conſtructio, 86. uſus, 88.
Intercolumnium. Definitio, *a.* 225. prope januas & portas quantum eſſe debeat, 332.
Jomada prior, *c.* 125.
poſterior, ibidem.
Itineris quantitas quomodo in mari æſtimetur, *g.* 351.
Iter confectum in mari quomodo inveniatur, 386. 389.
Iter conficiendum in mari quomodo inveniatur, 384.
Junius, *c.* 97.

K.

Kartetſche, *p.* 32.
Eine Katze, *m.* 109.
Kebiæ quid, *c.* 376.
Die Kehle, *m.* 52.
Der kleine Winckel, ibid.
Ein Kron-Werck, 109.

L.

Lacunar quomodo conſtruendum, *a.* 466.
Lagenæ pyrotechnicæ. Definitio, *p.* 34.
Laquear gypſeum quomodo perficiatur, *a.* 467.
Lateres quomodo ducantur, 51. *& ſeqq.* examinentur, 58.
Latitudo loci. Definitio, *g.* 54. quomodo inveniatur, 55. 137. 143. quomodo ope globi inveniatur, 237. quomodo obſervetur, 344. *& ſeqq.*
Latitudinum locorum Tabulæ, 60.
Latitudinis mutatio in navigatione quomodo inveniatur, 321. quomodo ſe habeat ad latus mecodynamicum, 327.
Latus exterius. Definitio, *m.* 35.
interius, 36.
Latus mecodynamicum. Definitio, *g.* 317. quale ſit, 329. quomodo inveniatur, 325. 328. 330. 383.
Lauffgraben, *m.* 240.
Leuco-notus qualis ventus, *g.* 215.
Libonotus qualis ventus, 215. 216.
Libs qualis ventus, 215.
Ligna qualia eſſe debeant, *a.* 43. quomodo cædenda, 46. exſiccanda, 47.
Ligni parſimoniæ principia, 474. *& ſeqq.*
Limen quantum eſſe debeat, 380.
Linea quid dicatur in Architectura militari, *m.* 233. quid in Geographia, *g.* 13.
Linea capitalis. Definitio, *m.* 40.
Linea communicationis. Definitio, 241.
Linea defenſionis major. Definitio, *m.* 41. magnitudo, 55. 56.
Linea defenſionis minor, ſive *ſtringens.* Definitio. 42.
Linea ſemicolli quænam melior, 77.

Linea ſubſtylaris. Definitio, *ſ.* 91. quænam ſit, 92. 93.
Literæ ardentes quomodo efformentur, *p.* 98.
Litera dominicalis. Definitio, *c.* 133. quomodo variet, 136. *& ſeqq.* quando ordo reſtituatur, 139. quomodo inveniatur, 143.
Loca quænam in zona torrida ſita, *g.* 69. quænam in temperata, 72. quænam in frigida, 75.
Loca ſecreta ne fœtore ſint moleſta quomodo impediatur, *a.* 448. *& ſeqq.*
Loca Terræ, ubi ſimul meridies, *g.* 23.
Loca Terræ quomodo ope globi inveniantur, in quibus dies eſt datarum horarum, 251. 252. quibus Sol oritur, vel occidit, quæ meridiem, quæ mediam noctem, quæ diem, quæ noctem habent, 255. quæ vident eclipſeos medium, 256. quibus planeta, 257. ſtella vel aliud phænomenon fit verticale, 258. 259. quibus hoc oriatur, vel occidat, 260. quibus Sol, 261. vel Luna lucet, 262. quibus Sol & Luna oriuntur, vel occidunt, 263.
Loca zonæ frigidæ quomodo inveniantur ope globi, in quibus dierum dato numero Sol non occidit, 254.
Locus ad fluctum ſitus quomodo muniatur, *m.* 208.
Longitudo diei quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235. quomodo in horologiis ſolaribus indicetur, *ſ.* 142.
Longitudo jactus tormentorum quanta ſit, *p.* 137.
Longitudo loci. Definitio, *g.* 52. quomodo inveniatur, 56. *& ſeqq.* quomodo ope globi inveniatur, 237.
Longitudinum locorum differentia quomodo inveniatur, 58. 59.
Longitudinum locorum Tabulæ, 60.
Longitudo maris quomodo inveniatur, 335. 354. 385.
Longitudinum in mari differentia quomodo inveniatur, *g.* 386.
Longitudinis mutatio quomodo inveniatur, *g.* 337. 338. 387.
Longitudo noctis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Lorica. Definitio, *m.* 21. craſſities, 22. altitudo, 23. 24.
Lorica feneſtrarum. Definitio, *a.* 431. dimenſiones, 432. *& ſeqq.*
Loricæ transverſæ utilitas, *m.* 124.
Loxodromia. Definitio, *g.* 309. proprietates, 310. 311. 313. *& ſeqq.* quomodo inveniatur, 320.
Loxodromiæ longitudo quomodo ſe habeat ad latus mecodynamicum, 324. quomodo ad mutationem latitudinis, 319. 323.
Lunula. Definitio, *m.* 99. delineatio, 136.

M.

Magabit, *c.* 111.
Maius, 97.
Mappæ compoſitæ per rhombos & diſtantias. Definitio, *g.* 367.
Mappa geographica. Definitio, 266.
Mappæ hydrographicæ. Definitio, 356.
Mappæ planæ. Definitio, 358. quales ſint, 359. *& ſeqq.* quomodo conſtruantur, 368.
Mappa particularis. Definitio, 268. quomodo conſtruatur, 278.
Mappæ reductæ. Definitio, 363. quales ſint, 364. 365. quomodo conſtruantur, 375.
Mappæ univerſales. Definitio, 267.
Marcheſuam, *c.* 121. 123.
Mare circumfluit terram, *g.* 7. latitudo in mari quomodo obſervetur, 340. inveniatur, 342.
Margo foſſæ. Definitio, *m.* 27.
Martius, *c.* 97.
Maſcaran, 111.
Materia ædificiorum. Definitio, *a.* 34. qualis ſit ſeligenda, 35. *& ſeqq.*
Materia liquefacta quid dicatur, *p.* 61.
Mecheir, 106.

Meha meh, c. 113.
Membra Ordinum architectonicorum. Definitio, a. 103. diviſio, 103. altitudines eorum quomodo determinentur, 151.
Membra eſſentialia. Definitio, 125. quaenam ſint, 126. & ſeqq.
Menſis aſtronomicus. Definitio, c. 58.
Menſis civilis. Definitio, 60.
Menſis illuminationis. Definitio, c. 55. quantus, 56.
Menſis lunaris periodicus. Definitio, 51. quantus ſit, 52.
Menſis lunaris ſynodicus. Definitio, 53. *quantitas*, 54.
Menſis lunaris aſtronomicus. Definitio, 58.
Menſis lunaris civilis. Definitio, 60. quantus ſit, 61. & ſeqq.
Menſes Numaei quales fuerint, 93.
Menſis ſolaris. Definitio, 48. quod omnes non ſint aequales, 50. quantus ſtatuatur, 50.
Menſis ſolaris civilis. Definitio, 60. quantitas, 64. 65.
Menſes Romulaei quales fuerint, 93.
Menſium Turcicorum initium in anno Juliano quomodo reperiatur, 356.
Merded meh, c. 113.
Meridianus. Definitio, g. 20. ſitus, 21. officium, 23. numerus Meridianorum, 24.
Meridiani diverſorum locorum quomodo eidem horologio inſcribantur, ſ. 144.
Meridianus primus. Definitio, g. 26. quinam ſit, 27. 61.
Meridies quaenam plaga dicatur, g. 215.
Meridies cur citius in locis orientalioribus, quam occidentalioribus, 25. ubinam ſit dato momento quomodo ope globi inveniatur, 174.
Meſaquilo quinam ventus, g. 215.
Meſargeſtes, ibid.
Meſeurus, ibid.
Meſoboreas, ibid.
Meſocaecias. ibid.
Meſocircius, ibid.
Meſocorus, quinam ventus, g. 215.
Meſolibonotus, ibid.
Meſolibs, ibid.
Meſophoenix, ibid.
Meſori, c. 106.
Meſozephyrus, quinam ventus, g. 215.
Mijazia, c. 111.
Milliaria longitudinis. Definitio, g. 317. quomodo inveniantur, 383.
Minutum primum. Definitio, c. 39.
ſecundum, ibid.
Mittag, g. 215.
Mitternacht, ibid.
Modulus. Definitio, a. 148.
Modulus ornatus januarum & feneſtrarum, 403.
Molad Tohu. Definitio, c. 320. character, 328.
Monopteros aedes rotunda, a. 251.
Môrſer, p. 142.
Mortarii praeparatio, a. 361.
Mortarium in Artilleria. Definitio, p. 140. quomodo delineetur, 143. & ſeqq. oneretur, 148. dirigatur, 150.
Muharram, c. 125.
Muniendi forma Belgica. Definitio, m. 126. calculus geometricus, 128. 129. delineatio ichnographica, 133. 141. orthographica, 142.
Muniendi forma Blondelliana. Definitio, 151. calculus geometricus, 152. delineatio, 153.
Muniendi forma Paganiana. Definitio, 145. calculus geometricus, 146. delineatio, 148.
Muniendi forma Scheiteriana. Definitio, 170. calculus geometricus, 171. delineatio, 173.
Muniendi forma Vaubaniana. Definitio, 157. calculus geometricus, 159. delineatio, 161.
Muniendi forma Vaubaniana recentior. Definitio, 166. delineatio, 168.
Munimenti forma qualis eſſe debeat, 61. & ſeqq.

Munimenta campeſtria. Definitio, *m.* 217. orthographia, 219. delineatio, 220. & *ſeqq.*
Munimentum irregulare. Definitio, 180. undenam tale ſit, 183. 184.
Munimentum regulare. Definitio, 125.
Munimentum ſtellatum quomodo delineetur, *m.* 223.
Muri quomodo conſtruendi, *a.* 341. & *ſeqq.* quomodo anchoris firmentur, 370. quomodo tectorio veſtiantur, 363.
Murus ante feneſtram qualis eſſe debeat, 413.
Mutuli compoſiti. Definitio, 133. delineatio, 182.
Mutuli ſimplices. Definitio, 133. delineatio, 181.

N.

NAvigatio circularis. Definitio, *g.* 381. theoria, 391. & *ſeqq.*
Navigatio MERCATORIS. Definitio, 380.
Navigatio plana. Definitio, 379.
Neben-Streiche, *m.* 52.
Neomeniæ omnium menſium quomodo inveniantur, *c.* 344.
Neomenia Tiſri quomodo inveniatur, 339. & *ſeqq.*
der *Niedrige Wall*, *m.* 51.
Niſan, *c.* 112. 121. 123.
Nitri qualitates, *p.* 17. 20. 22. defæcatio & pulveriſatio, 5. & *ſeqq.*
Nonæ quid ſint, *c.* 95. quot ſint in quolibet menſe, *ibid.*
Nord, *g.* 211.
Nord gen Oſten, 215.
Nord gen Weſten, ibid.
Nord-Nord-Oſt, ibid.
Nord-Nord-Weſt, ibid.
Nord-Oſt, ibid.
Nord-Oſt gen Oſten, ibid.
Nord-Oſt gen Norden, ibid.
Nord-Oſt gen Weſten, ibid.
Nord-Weſt, ibid.
Nord-Weſt gen Norden, ibid.
Nord-Weſt gen Weſten, *g.* 215.
Notapeliotes, ibid.
Notolybicus, ibid.
Notozephyrus, ibid.
Notus, ibid.
November, *c.* 97.
Nox. Definitio, *g.* 118. *c.* 8. quomodo quantitas inveniatur, 9. ubinam unica, *g.* 128.
Numerus aureus. Definitio, *c.* 149. quomodo inveniatur, 150.

O.

OBſidionis proceſſus, *m.* 249. defenſio contra eandem, 250.
Occaſus Solis quomodo ope globi inveniatur, 235. quomodo in horologio indicetur, *ſ.* 142.
Occidens. Definitio, *g.* 211. 215.
Octaſtylon, *a.* 214.
October, *c.* 97.
Olympias, *g.* 215.
Opera campeſtria. Definitio, *m.* 216.
Opus coronatum. Definitio, 108. quomodo delineetur, 140. 178.
Opus cornutum. Definitio, 107. quomodo delineetur, 131. 176.
Opera externa. Definitio, 94. utilitas, 95. qualia eſſe debeant, 96.
Opus ruſticum. Definitio, *a.* 366. quibus ædificiis conveniat, 367. & *ſeqq.*
Ordo architectonicus. Definitio, *a.* 90. diviſio, 153. quomodo componantur, 160. & *ſeqq.* 137. quomodo delineentur, 176. 178.
Ordo Corinthius, 145. quod ſit ornatiſſimus, 146.
Ordo Doricus, 140.
Ionicus, 141.
Romanus, ſive *compoſitus*, 143.
Tuſcanus, 139.
Oriens. Definitio, *g.* 211.
Ornatus ædificii. Definitio, *a.* 15.
Ornithias qualis ventus, *g.* 216.
Orthographia externa ædificii. Definitio, *a.* 525. quomodo fiat, 529.

Orthographia interna ædificii. Definitio, *a.* 256. quomodo fiat, 530.
Orthographia munimenti. Definitio, *m.* 132.
Orthographia partis alicujus columnæ. Definitio, *a.* 188.
Ortus Solis quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235. quomodo in horologiis ſolaribus indicetur, *ſ.* 142.
Oſt, *g.* 211. 215.
Oſt-gen Norden, 215.
Oſt gen Süden, ibid.
Oſt-Nord-Oſt, ibid.
Oſt-Süd-Oſt, ibid.

P.

PAchon, *c.* 106.
Pagomen, 111.
Paophi, 106.
Paralleli locorum quomodo horologio ſolari inſcribantur, *ſ.* 146.
Paraſtata. Definitio, *a.* 78.
Parmula. Definitio, *m.* 98. uſus, 110. qualis eſſe debeat, 111. *& ſeqq.* quomodo delineetur, 135.
Partes ordinum quomodo componantur, 137.
Paſcha quomodo celebrandum, *c.* 279.
Paſcha Gregorianum quomodo computetur, 312.
Paſcha Judaicum quomodo computetur, 347.
Paſcha Julianum quomodo computetur, 288.
Pavimenta qualia eſſe debeant, 457.
Pauni, 206.
Perfectio ædificii. Definitio, *a.* 8.
Periodus Calippica. Definitio, *c.* 154. quanta ſit, 156. quot lunationum, 157. quamdiu valeat, 158.
Periodus HIPPARCHI. Definitio, *c.* 161. quanta ſit, 164. quot lunationum, 165. quamdiu valeat, 166.
Periodus Juliana. Definitio, 175. quanta ſit, 176. ejus uſus, 178. inventor, 179.
Periodus Victoriana. Definitio, 167. quot ſit lunationum, *c.* 173. quantum valeat, 171. quamdiu valeat, 174.
Periæci. Definitio, *g.* 178. quinam ſint, 179. quibus nulli ſint, 195. 205. quomodo numerent horas, 204. quomodo ope globi inveniantur, 237.
Peripteros. Definitio, *a.* 236. quale ſit opus, 242.
Peripteros ædes rotunda, 251.
Periſcii. Definitio, *g.* 157. ubinam dentur, 158. quinam ſint dato loco, quomodo inveniantur, 169. 170.
Peryſtilium. Definitio, *a.* 212. genera apud veteres, 236.
Petarde, *p.* 151.
Phamenot, *c.* 106.
Phœnicias qualis ventus, *g.* 215.
Phœnix, ibid.
Photoſciaterica, *ſ.* 2.
Pila. Definitio, *a.* 77.
Pila parietina, ibid.
Plagæ. Definitio, *g.* 207. quot ſint, 208. quomodo indicentur, 210. quomodo determinentur, 217.
Plagæ cardinales. Definitio, 211.
Plagæ collaterales, vel *intermediæ.* Definitio, 211. *ſpecies*, ibid.
Plagæ collaterales primariæ, ibid.
ſecundariæ, ibid.
ſecundariæ primi ordinis, ibid.
ſecundariæ ſecundi ordinis, ibid.
Plinthus, *a.* 104.
Pluvia ignea quomodo efficiatur, *p.* 61.
Pluvia pyrotechnica. Definitio, 33.
Podium. Definitio, *a.* 414.
Poli Telluris. Definitio, *g.* 12.
Polus Terræ antarcticus, ſive *auſtralis*, ibid.
Polus Terræ arcticus, ſive *borealis*, ibid.
Poli elevatio ubi nulla, 125. quomodo inveniatur, 143.
Polygonorum diſtantia in methodo muniendi recentiore quomodo inveniatur, *m.* 209.

Poly-

Polygon-Winckel, m. 52.
Poſtes. Definitio, a. 79.
Poſticum, 236.
Principium anni. Definitio, c. 78. ubi ſtatuendum, 79. 80.
Profunditas Solis quomodo ope globi inveniatur, g. 235.
Projectio ſphæræ. Definitio, g. 269. quomodo fiat, 272. 275.
Projectio orthographica, 270.
ſtereographica, ibid.
Projectura, ſive *Projectio*. Definitio, a. 94.
Pronaus qualis ædes, 236.
Proſtylus. Definitio, 236. quale ſit opus, 240.
Propugnaculum. Definitio, m. 29. forma, 62.
Propugnaculi exterius vallum. Definitio, 101. uſus, 116. 117.
Pſeudodipteros. Definitio, a. 236. quale ſit opus, 243. 244.
Pſeudodipteros ædes. Definitio, 249. qualis ſit, 250.
Pulchritudo. Definitio, a. 10. principia, 11. & *ſeqq.*
Pulvis pyrius. Definitio, p. 4. compoſitio, 24. & *ſeqq.* examen, 29. 30.
Pycnoſtylon opus, a. 225.
Pyropologia, p. 2.
Pyrobolus. Definitio, 69. quomodo conficiatur, 77. qua materia impleatur, 78. quomodo terebretur, 79.
Pyroboli forma quomodo paretur, 75. 76.
Pyrobolus aquaticus quomodo componatur, 94.
Pyrotechnia. Definitio, p. 1.
Pyxis nautica, ſeu *magnetica*. Definitio, 296. quomodo conſtruatur, 297.

Q.

Quadra, a. 104.
Quadrantis horodictici conſtructio, ſ. 157.
Quintilis, c. 88.

R.

Rabia prior, c. 125.
poſterior, ibid.
Rajab, ibid.
Radius major. Definitio, m. 39.
minor, 38.
Rationum ſymptoma, g. 84.
Ravelin, m. 109.
Reductus quomodo delineetur, 224. & *ſeqq.*
Refractio horizontalis Solis quomodo inveniatur, g. 144.
Regula quale membrum in Ordinibus, a. 104.
Regula ad delineandum Ordines atque ædificium utilis quomodo conſtruatur, 175.
Regula Calibræ. Definitio, p. 102. quomodo paretur, 103. uſus, 105. & *ſeqq.* examen, 111.
Rhombus. Definitio, g. 286. quomodo inveniatur, 387. 388. quomodo inveniatur, in quo navigandum, 384. juxta quem facta navigatio, 322. 326.
Roſa nautica. Definitio, 289.
Roſa pyrotechnica quomodo fiat, p. 82. 85.
Ruderatio quomodo fiat, a. 461. & *ſeqq.*

S.

Sabat, ſive *Shebat*, c. 121. 123.
Saccus globi incendiarii quomodo delineetur, p. 49. 51.
Succus pyrotechnicus. Definitio, 36.
Samadan, c. 125.
Saphar, ibid.
Sappa, ſive *ſuffoſſio*. Definitio, m. 242. quomodo paretur, 246.
Säulenſtellungen, a. 213.
Saxa quomodo cædenda, 49.
Saxorum virtutes quomodo cognoſcantur, 48.
Scala. Definitio, a. 502. quomodo conſtruenda, 503. & *ſeqq.* delineanda, 514.
Scalæ conſtructio ad delineandos Ordines neceſſaria, a. 172. quæ errores diſtantiarum in mappis planis corrigat, g. 372.

Scapus columnæ, *a.* 96. quomodo contrahatur, 183.
Scenographia ædium. Definitio, *a.* 527.
Scharis meh, *c.* 113.
Scheere, ſive *Scheer-Werck*, *m.* 109.
Schieſs-Scharten, 109.
Schlangen, *p.* 100.
Schulter-Winckel, *m.* 52.
Sciaterica, *f.* 2.
Sciatericum. Definitio, 3.
Scintillæ pyrotechnicæ quomodo conficiantur, *p.* 87.
Scrupulum Chaldaicum. Definitio, *c.* 40. quomodo in horaria convertatur, 42.
Seculum. Definitio, *c.* 86.
Semidiameter Terræ quanta ſit, *g.* 41. *& ſeqq.* quomodo inveniatur, 30. 32. *& ſeqq.* 38.
September, *c.* 97.
Septentrio. Definitio, *g.* 211.
Septimana. Definitio, *c.* 43.
Serpentinel, *p.* 100.
Sextilis, *c.* 88.
Shaaban, 125.
Shabat, ibid.
Shawal, ibid.
Signorum paralleli quomodo horologiis ſolaribus inſcribantur, *f.* 135. *& ſeqq.*
Sima. Definitio, *a.* 110. delineatio, 119.
Sivan, *c.* 123.
Sol ubinam fiat verticalis, ubinam non, *g.* 93. quando hoc fiat, 94. ubinam dato momento verticalis, quomodo inveniatur, 173. quando in zona torrida loco alicui fiat verticalis quomodo ope globi inveniatur, 242. *& ſeqq.* quando mediam diſtantiam a vertice in zona torrida habeat, quomodo inveniatur, 95. *& ſeqq.* ubinam ter per annum mediam diſtantiam a vertice habeat, 98. ubinam bis, 99. quo momento planum declinans illuſtrare incipiat, quomodo determinetur, *f.* 110. *& ſeqq.* quando in zona torrida appareat retrogradus, *g.* 171. ubinam dato momento oriatur & occidat, quomodo inveniatur, *g.* 175. quando in zona torrida non occidat, quomodo ope globi inveniatur, 248. item quando non amplius oriatur, 249. Solis non occidentis mora ſupra horizontem quomodo inveniatur, 146.
Solis meridiani a vertice diſtantia quanta ſit, *g.* 159.
Solanus quinam ventus, 215. 216.
Soli conditio quomodo exploranda, *a.* 320.
Soliditas Terræ quanta ſit, *g.* 44.
Sphæra obliqua. Definitio, 121. ubinam ſit, 124.
Sphæra parallela. Definitio, 120. ubinam ſit, 123. phænomena ejus, 125. 128. *& ſeqq.*
Sphæra recta. Definitio, 119. phænomena, 125. *& ſeqq.* ubinam ſit, 122.
Spreng-Kugel, *p.* 58.
Statio vallaris. Definitio, *m.* 25.
Stehender Mörſer, *p.* 142.
Stellulæ pyrotechnicæ quomodo conficiantur, 84.
Die Streiche, *m.* 52.
Die ſtreichende Defens-Linie, ibid.
Der Streich-Winckel, ibid.
Structura Græca, *a.* 354.
incerta, 352.
iſodoma, 356.
pſeudiſodoma, 357.
revincta, 359.
reticulata, 349.
Stupæ pyrotechnicæ præparatio, *p.* 59.
Stylobata. Definitio, *a.* 95.
Subſolanus qualis ventus, *g.* 215.
Subſtructio, *a.* 311.
Subveſperus qualis ventus, *g.* 215. 216.
Sud, *c.* 211.
Süd gen Oſten, *g.* 215.
Süd gen Weſten, ibid.
Süd-Oſt, ibid.
Süd-Oſt gen Oſten, ibid.
Süd-Oſt gen Norden, ibid.
Süd-Sud-Oſt, ibid.

Sûd-Sûd-Weſt, *g*. 215.
Sûd-Weſt, ibid.
Sûd-Weſt gen Sûden, ibid.
Sûd-Weſt gen Weſten, ibid.
Suggeſtus mortariorum. Definitio, *m*. 228.
Suggeſtus tormentorum. Definitio, 227. delineatio, 229.
Sulphuris depuratio, *p*. 10. qualitates, 18. 21. 22.
Supercilia, *a*. 104.
Superficies Terræ quanta ſit, 44. quomodo ſe habeat ad zonam frigidam, 88. & *ſeqq*. quomodo ad temperatam, 85. torridam, 80. 81.
Supernas quinam ventus, *g*. 215. 216.
Symmetria quid ſit & in quo conſiſtat, *a*. 24. & *ſeqq*.
Syne, *c*. 111.
Syſtylon opus, *a*. 225.

T.

Tabulæ loxodromicæ. Definitio, *g*. 331. quomodo conſtruantur, 333.
Tænia, *a*. 104.
Tamuz, *c*. 112.
Tebeth, 123.
Tecta quomodo conſtruenda, *a*. 519. & *ſeqq*. 523.
Tegulæ hamatæ, 522.
imbricatæ, ibid.
Tekuphæ quid ſint, *c*. 337. quomodo inveniantur, 348.
Tempeſtates annuæ quomodo ſe habeant ſub æquatore, *g*. 100. & *ſeqq*. quomodo in zona torrida extra æquatorem, 104. & *ſeqq*.
Tempeſtates vagæ. Definitio, *g*. 227. cauſæ, 229.
Templi Cella ſive *Corpus*, *a*. 236.
Temporis momentum quomodo ex altitudine Solis ope globi inveniatur, *g*. 136.
Termini paſchales. Definitio, *c*. 284.
Terminorum paſchalium Tabula Gregoriana quomodo conſtruatur, 309.
Terra cur circumnavigari potuerit, *g*. 5.
Terræ figura qualis ſit, 3. 4.
Terræ figura ſphærica num in Tellure citra errorem ſenſibilem aſſumi poſſit, 10.
Teſtudines. Definitio, *a*. 468.
Tetraſtylon, 214.
Thamuz, *c*. 121. 123.
Thir meh, 113.
Thiſri, 121. 123.
Thot, 106.
Thraſcias qualis ventus, *g*. 215. 216.
Tishrin prior, *c*. 112.
poſterior, ibid.
Tonnen-Gewôlbe, *a*. 469.
Tormentum. Definitio, *p*. 99. ſpecies, 100. delineatio, 115. & *ſeqq*.
Tormentum quomodo oneretur, *p*. 130. dirigatur, 133. 134. cur exploſum retrocedat, 138.
Tormentum inſititium. Definitio, 151. quomodo paretur & oneretur, 152.
Torus, *a*. 105. quomodo delineetur, 113.
Trabeatio. Definitio, *a*. 100. quænam cuilibet intercolumnio conveniat quomodo inveniatur, 227. & *ſeqq*.
Traverſen, *m*. 109.
Trenchéen-Kugel, *p*. 58.
Triacontaëteris Muhammedana. Definitio, *c*. 350.
Triglyphi cum guttis quid ſint, *a*. 133. quomodo delineentur, 179.
Trochilus, *a*. 108. quomodo delineetur, 116.
Tropicus cancri. Definitio, *g*. 17. ſitus, 18.
Tropicus Capricorni. Definitio, 17. ſitus, 18.
Truncus ſtylobatæ, *a*. 95.
Tybi, *c*. 106.
Tykymt, 111.
Tympani altitudo, *a*. 270. 271.
Tyr, *c*. 111.
Tyshas, ibid.

V. *Val-*

V.

Vallum. Definitio, *m.* 13. cur munimentis conveniat, 14. altitudo, 18. 82. declivitas, 19. defenſio qualis eſſe debeat, 53.
Valli operum externorum dimenſiones, 120.
Veadar, *c.* 123.
Ventus. Definitio, *g.* 215. diviſio, 215. qualis ſit, qui per terram continentem ſpirat, 222. 225. qualis, qui per maria ſpirat, 220.
Ventus cardinalis, 215.
collateralis, ibid.
collateralis primarius, ibid.
collateralis ſecundarius primi. vel *ſecundi ordinis*, ibid.
Venuſtas. Definitio, *a.* 10.
Veris initium & finis. Definitio, *g.* 78.
Ver quando ſub æquatore, 103. ubinam bis, 109.
Verſorium. Definitio, 296.
Verſuræ compoſitæ quomodo delineandæ, *a.* 408.
Verſuræ ſimplices quomodo delineandæ, 407.
Vertex objectorum cur iter facientibus prius videatur quam radix & contra, *g.* 8. 9.
Via navis qualis ſit, 339.
Vinea. Definitio, *m.* 243. quomodo paretur, 248.
Viſus diſtantia, quam in ſuperficie maris vel planitie terræ attingit, quomodo inveniatur, *g.* 47.
Umbra meridiana quo die altitudini corporis æqualis, *g.* 166. quando quolibet die, 167. quomodo variet in diverſis locis, 164.
Umbræ ſolſtitiales quomodo ſe habeant in diverſis locis, 164.
Umbræ rectæ ratio ad altitudinem opaci, 160.
Umbræ verſæ ratio ad altitudinem opaci, *g.* 161.
Voluta. Definitio, *a.* 133. quomodo delineetur, 135.
Urnæ pyrotechnicæ. Definitio, *p.* 34.
Utilitas ædificii. Definitio, *a.* 7.
Vulturnus quinam ventus, *g.* 15. 16.

W.

Waffen-Plätze, *m.* 109.
der Wall, *m.* 52.
der Wallgang, ibid.
Weſt, *g.* 212.
Weſt gen Norden, 215.
Weſt gen Süden, ibid.
Weſt-Nord-Weſt, ibid.
Weſt-Süd-Weſt, ibid.
Winckel der Flanck und Cortine, *m.* 52.

Z.

Zephyroboreas qualis ventus, *g.* 215.
Zephyrus, ibid.
Zius, *c.* 121.
Zonæ inter ſe collatæ quoad magnitudinem, *g.* 91. 92.
Zona frigida auſtralis. Definitio, 73. latitudo, 74.
Zona frigida borealis. Definitio, 73. latitudo, 74.
Zonæ temperatæ ratio ad ſuperficiem Terræ, 85. 86. magnitudo, 87.
Zona temperata auſtralis. Definitio, *g.* 70. latitudo, 72.
Zona temperata borealis. Definitio, 70. latitudo, 72.
Zona torrida. Definitio, 66. latitudo, 68. magnitudo, 82. ratio ad ſuperficiem Terræ, 80. 81. quomodo ab æquatore dividatur, 68.
Zophorus. Definitio, *a.* 100. qualis eſſe debeat, 101.
der Zwiſchen-Wall, *m.* 52.

FINIS INDICIS TOMI IV.

VIII.

INDEX

Rerum in Commentatione de Studio Mathematico recte inſtituendo contentarum, quæ legitur Tomo V. Elementorum Matheſeos.

A.

Æquatio ad parabolam quomodo deducatur ex ſectione coni, 205.
Æquatio curvæ particularis quomodo reducatur ad generalem, 197.
Æquationes ad curvam, in qua origo abſciſſarum non eſt in aliquo puncto curvæ, quomodo tractentur, 206.
Æquationis cubicæ & biquadraticæ conſtructio, quod ſupponat inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas, 223.
Æquationum inventio cur ſubinde non uno modo tentanda, 174.
Æquationum uſus in curvis mechanicis oſtenditur, 207.
Aerometriæ ſtudium quomodo inſtituendum, 264. *& ſeqq.*
Agrimenſores an theoriam Geometriæ recte negligant, 129. *& ſeqq.*
Algebra quomodo tractanda, 143. *& ſeqq.* quomodo ad Geometriam applicanda, 173. *& ſeqq.* qualis primum fuerit & quomodo deinceps ulterius perfecta, 165. quouſque perfecta, 188. cur ad tertium cognitionis gradum adſpiranti cognitu neceſſaria, 681. quod ſubinde ſuppeditet abſque ulla ambage conſtructiones problematum veterum, 183.
Algebraicum ſtudium quomodo facilitetur, 166.
Analyſis mathematica quomodo exercenda, 143. *& ſeqq.* cur ad tertium cognitionis gradum adſpiranti cognitu neceſſaria, 81.
Analyſis Diophantea quomodo tractanda, 171. 172.
Analyſis infinitorum quomodo tractanda, 226. *& ſeqq.*
Analyſis Veterum qualis fuerit, 145.
Approximationes quomodo per ſeries infinitas inveniantur, 244. *& ſeqq.*
Architecti militares an theoriam Geometriæ tuto negligant, 129. *& ſeqq.*
Architecturæ civilis ſtudium, 337. *& ſeqq.*
Architecturæ militaris ſtudium, 333. *& ſeqq.* ſcientifica cognitio num profit Architecto militari, 335.
Arithmetica quomodo in uſum Artis inveniendi tractanda, 121.
Arithmetica infinitorum in infinitum extenſa, 251.
Arithmeticæ literalis quomodo tractanda, 146. *& ſeqq.*
Arithmeticæ literalis uſus in inveniendo, 154.
Arithmetica practica quomodo tractanda, 113. *& ſeqq.*
Arithmeticæ practicæ compendium quomodo ex Elementis Autoris exſcribendum, 120.
Arithmetica theoretica quomodo tractanda, 118.
Ars inveniendi quomodo ope Architecturæ civilis exerceatur, 339.
Artificia analytica cur probe notanda, 166. 167. 192. inter ſe conferenda, 192.
Artis characteriſticæ notio quomodo acquiratur,

ratur, 147. uſus in inveniendo, 156.
Artis inveniendi regulæ abſtrahendæ ab Arithmetica communi, 122. a literali, 157. 163. 164.
Artis inveniendi cauſa quomodo Matheſis tractanda, 106.
Artium ſcientiam excolenti quid notaſſe proſit, 329.
Aſtronomiæ ſtudium, 290. *& ſeqq.* cognitio hiſtorica quomodo acquirenda, 293. *& ſeqq.*
Aſtronomia quid conferat ad Artem inveniendi, 302. *& ſeqq.*
Aſtronomia practica quomodo addiſcatur, 297. *& ſeqq.*
Aſymptotos determinandi methodus quo principio nitatur, 231.

C.

C*Alculus algebraicus* a perplexitate liberatus, 187. num theoriam ſupponat in ſolvendis problematis, 145.
de *Calculi differentialis inventore controverſia* quomodo intelligenda, 228.
Calculi integralis notio explicata, 235.
Calculus literalis in Algebra quomodo per numeros explicetur ſervata univerſalitate, 168.
Calculus numeroſus quomodo ad formam univerſalis reducatur, 154. quomodo in locum literalis ſurrogari poſſit, 169.
Calculus ſitus quid ſit, 144. quales ſupponat in Geometria definitiones, 155.
Catoptricæ ſtudium, 274. *& ſeqq.*
Chronologiæ ſtudium, 323. *& ſeqq.*
Circulus cur per æquationem algebraicam definiri poſſit, 195.
Circuli proprietates algebraice erutæ, 193. *& ſeqq.* 206.
Circuli quadratura per ſeries infinitas explicata, 238.
Citationes in demonſtrationibus quem habeant uſum, 45.
Cognitionis humanæ gradus quot dentur, 1. quot non eadem facilitate acquirantur, 2. quomodo acquirantur, 3.
Cogitandi modus naturalis quomodo ſervetur in ſtudio mathematico, 108.
Conchoidis proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 203. conſtructio facillima inde deducta, *ibid.* tangens quomodo ducenda, 232.
Conſtructio æquationum quomodo ad Analyſin Veterum propius adducatur, 181.
Conſtructiones æquationum ſuperiorum quomodo inventæ, 218. 219. cur analyticas dederit Autor, 220.
Conſtructiones geometricæ formularum algebraicarum num pure enunciandæ, 180. an ſemper ſynthetice demonſtrandæ, 177. quodnam inter elegantes & inelegantes intercedat diſcrimen, 185.
Corollaria quid ſibi velint, 58. quomodo expendenda, 59. quomodo ſymbolice repræſentanda eorum demonſtratio, 60.
Curioſitatis gratia quomodo Aſtronomia tractanda, 292.
Curvæ quænam per æquationes algebraicas definiri nequeant, 196. quænam ab Autore conſiderentur in Elementis ſuis, 209. quomodo ad curvas alias referantur, 208. quænam in conſtructione problematis alteri præferenda, 221.
Curvarum doctrina quantum adhuc diſtet a perfectione ſua, 217.
Curvarum proprietates quomodo per æquationes eruantur, 193.
Curvarum quadraturæ a quadratura parabolæ pendentes, 237. quod reducantur ad quadraturam circuli & hyperbolæ, 239.
Cycloidis proprietas ſingularis, 250.

D.

D*Efinitiones* quomodo expendendæ, 5. quomodo expendendæ in uſum Artis inveniendi, 82. *& ſeqq.* cur ab iis incipiendum, 4. cur exemplis & quomodo illuſtrandæ, 5. quo ordine collocandæ & legendæ, 6.
Definitiones arithmeticæ quomodo exem-

plis illuſtrentur, 11. 12. objectio quædam removetur, 16.
Definitiones geometricæ quomodo ad evidentiam ſenſus reducendæ, 13.
Definitiones nominales quales eſſe debeant, 10.
Definitiones reales quomodo inveniantur præſuppoſitis nominalibus, 87. 88. num nominalibus præferendæ, 89.
Definitionum repræſentatio ſymbolica, 11. *& ſeqq.*
Demonſtrandi principia qualia ſupponantur, 71.
Demonſtrationes quando ſint naturales, 62. quales ab Autore exhibeantur, 63. quales vulgo, 64. quomodo reſolvendæ, 31. 38. 40. *& ſeqq.* 47. quomodo faciant ad perficiendum intellectum, 99. *& ſeqq.* 102. *& ſeqq.* quomodo libris inſerantur, 46. quomodo in Hydroſtatica facilitandæ, 263.
Demonſtrationes arithmeticæ cur ſervent univerſalitatem ad exempla applicatæ, 50.
Demonſtrationes aſtronomicæ quatenus recedant a rigore, 301.
Demonſtrationes catoptricæ num ſint ſuperfluæ, 277.
Demonſtrationes dioptricæ quod pluribus modis fieri poſſint, 281.
Demonſtrationes mechanicæ quales ſint, 32. cur in locum cæterarum non ſurrogandæ, 33. quod æquipolleant exemplis numericis, 34. quibusnam ſatisfaciant, 36. quomodo ad tertium cognitionis gradum conducant, 72. 73.
Demonſtrationes problematum quomodo reſolvendæ, 52. quomodo ſymbolice repræſententur, 53. 55.
Demonſtrationes ſyntheticæ num recte negligantur, 101. num ex calculo algebraico erui poſſint, 178. quænam cum iis non confundendæ, 179. cur analyticis miſceantur ab Autore, 260.
Demonſtrationum forma, 31. 37. ſymbolica repræſentatio, 39. 42. quem habeat uſum, 44. 48. 49.
Dioptricæ ſtudium, 280. *& ſeqq.*

E.

Ellipſeos conſtructio ex æquatione elicita, 215. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 200.
Experientiæ ac rationis connubium cur perpetuum eſſe debeat, 312.

F.

Fictionum in calculo algebraico uſus, 189.
Figuræ in Matheſi quales requirantur, 10.
Formulæ algebraicæ quomodo applicandæ, 158. *& ſeqq.*

G.

Geographiæ ſtudium, 317. *& ſeqq.*
Geographiæ hiſtorica cognitio quomodo acquiratur, 318.
Geometria quomodo in uſum Matheſeos reliquæ tractanda, 162. uſus in reliqua Matheſi ſtabilitus, 133. 136. quomodo intellectus perficiendi gratia tractanda, 134.
Geometriæ elementaris ſupplementum in uſum Algebræ conſcribendum, 186.
Geometria practica quomodo tractanda, 122. *& ſeqq.* quomodo ex Elementis Autoris extrahenda, 128.
Gnomonicæ ſtudium, 326. *& ſeqq.*

H.

Hydraulicæ ſtudium quomodo inſtituendum, 267. *& ſeqq.*
Hydrographiæ ſtudium, 322.
Hydroſtaticæ ſtudium, 261. *& ſeqq.* uſus in Philoſophia naturali, 262.
Hyperbolæ conſtructio ex æquatione elicita, 216. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 201. 202.
Hypotheſes quomodo excolendæ, 309. 310. qualibus in Philoſophia locus, 311.

I.

INductio quomodo pariatur, 35.
Integratio differentialium cur ſubinde requirat quantitatem adjiciendam, 236.
Intellectus cur & quomodo ſtudio Matheſeos perficiatur, 92. *& ſeqq.* quomodo perficiatur, ſi ad primum tantummodo cognitionis gradum adſpires, 94. *& ſeqq.*
Intellectus perfectio quænam maxima, 106.
Intellectus perficiendi gratia quomodo in Geographia verſandum, 321.
Intellectui quæ patent quomodo ad evidentiam ſenſus reducantur, 11. *& ſeqq.*
Irrationalium exiſtentia, 225. ad formam rationalium reductio quem habeat uſum, 152.

L.

de *LOcis geometricis* notanda, 210. *& ſeqq.*
Logica genuina unde agnoſcatur, 104.
Logicæ ſtudio quodnam præmittendum, 105.

M.

MAtheſis an in uſum Artis inveniendi tractari poſſit, 314. *& ſeqq.* quomodo in hunc uſum tractetur, 106.
Matheſeos ſtudium quomodo intellectus perficiendi cauſa tractandum, 90.
Matheſeos ſublimioris ſtudioſi quænam ex Mechanicis addiſcere debeant, 259.
Mechanica quantum a Veteribus promota, 252. quantum a Recentioribus, *ibid.* quomodo tractanda in uſum tertii gradus cognitionis, 255. 256.
Mechanicæ praxis quomodo addiſcenda, 253. 254.
Mechanicæ principia ad phænomena naturæ explicanda, utilia, 258.
Mechanicæ ſtudium quomodo tractandum, 252.
Methodus mathematica num Theologiæ Juriſprudentiæ & Medicinæ conveniat, 107.
Methodus de maximis & minimis quo nitatur principio, 234.
Methodus tangentium inverſa quomodo expendenda, 248.

N.

NOtiones ontologicæ quomodo ex Matheſi derivandæ, 340.

O.

OPticæ ſtudium quomodo inſtituendum, 271. *& ſeqq.* quod ad Phyſicam conducat, 272.

P.

PArabolæ proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 198.
Perſpectiva quomodo tractanda, 273.
Philoſophiæ naturalis principia mathematica quænam proprie dicantur, 257.
Philoſophus quomodo verſari debeat in Catoptrica, 276. quomodo in Dioptrica, 282.
Præparatio ad demonſtrationem cur neceſſaria, 74. 75. quomodo ad eam perveniatur, 76.
Præparatio ad tertium gradum cognitionis per ſecundum, 71.
Praxis quomodo reddatur oculata, 140.
Problemata quomodo in theoremata convertantur, 51. 54. quomodo tractanda, ac ſi reſolutio invenienda eſſet, 77. *& ſeqq.*
Problematum ſymbolica repræſentatio, 26. 27.
de *Problematis phyſico-mechanicis* notanda, 257.
Propoſitiones quomodo rite exponendæ, 17. quomodo a nobis enunciatæ, 18. 19. quomodo a Veteribus & Clavio, 20. cur pure enunciandæ, 21. 57.
Pyrotechniæ ſtudium, 330. quid conferat ad artem inveniendi, 332.

Q.

Quadraturæ per ſeries infinitas pendent a quadratura infinitarum Parabolarum, 239.

R.

Radices duæ in contactu æquales, 199.
Rationum doctrina quomodo facilitetur, 160. 161.
Rationum inæqualitatis tractatio ad modum æquationum, 191.
Regreſſus ſerierum explicatur, 241.
Regulæ arithmeticæ cur formulis algebraicis ab Autore non fuerint adſcriptæ, 175.
Reſolutiones problematum quomodo illuſtrandæ, 22. quomodo in poteſtatem redigendæ, 23. quomodo ſola attentione ad theoremata innoteſcant, 80.
Reſolutiones problematum numericæ quomodo exemplis illuſtrandæ, 29.
Reſolutionum ſpuriarum examina quomodo ſubinde inſtituantur, 180.

S.

Saltus in ratiocinando expenditur, 61.
Scientiæ conjunctis viribus excolendæ, 313.
Senſus quid adjumenti afferant intellectui in veritate intelligenda, 7. 8. 9.
Series magis convergentes pro circulo quomodo deducantur ex minus divergentibus, 242. 243.
Sphæricorum ſtudium, 285. & *ſeqq.*
Studium mathematicum quibusnam difficile videatur, 98.
Subnormalium formulæ algebraicæ quomodo geometrice conſtruantur, 230.
Subtangentis notio explicata, 233.
Subtangentium formulæ algebraicæ quomodo geometrice conſtruantur, 229.

T.

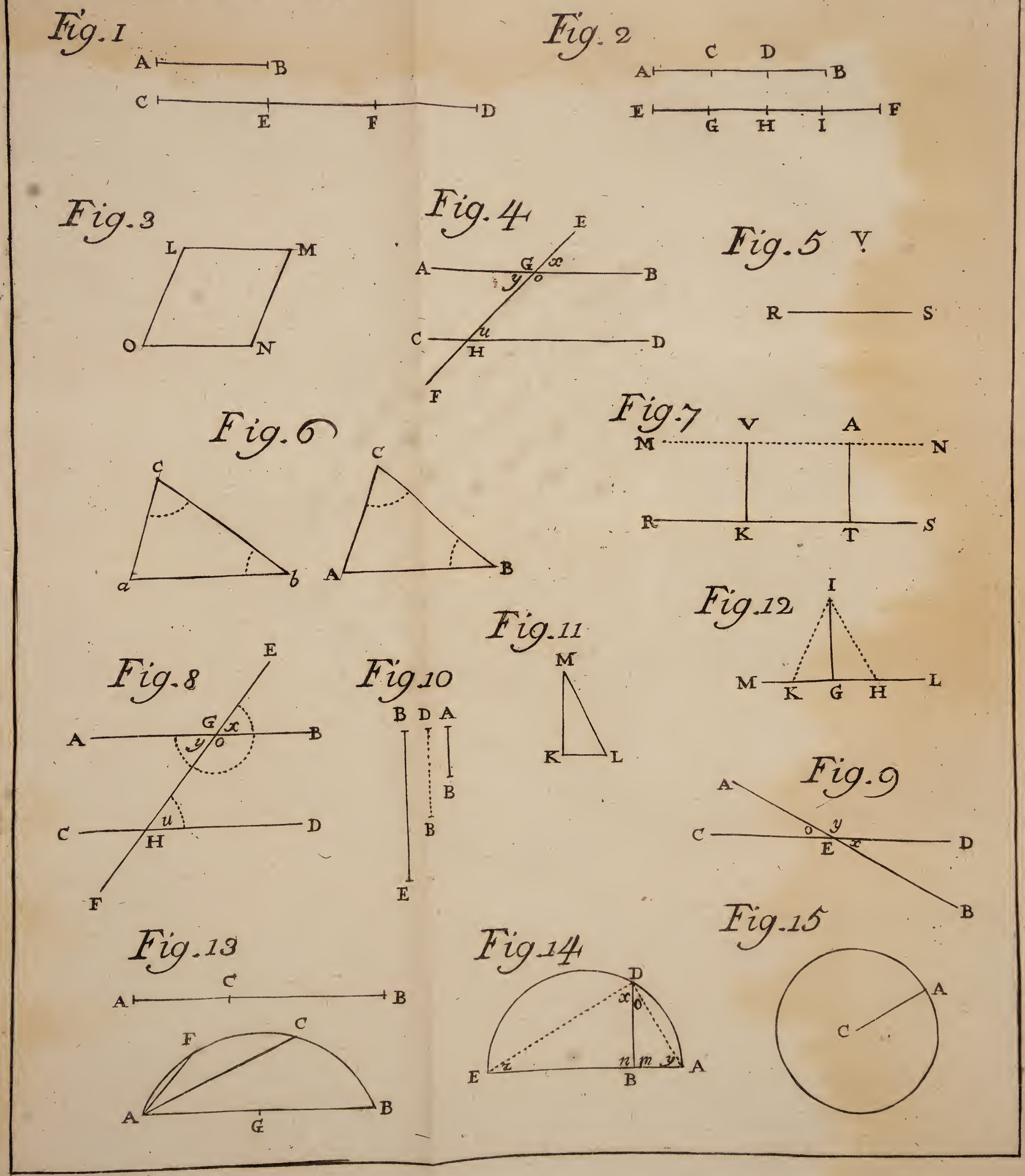
Tabulæ aſtronomicæ expenduntur, 298.
Tangentium methodus Barrowiana, 227. 228. quomodo inde prodeat differentialis, 228.
Theoremata quomodo in uſum Artis inveniendi expendenda, 68. quod eo modo inveniri potuerint, quo demonſtrantur, 70. quomodo in problemata reſolvenda convertantur, 67.
Theorematum ſymbolica repræſentatio, 24. 25.
Theorica Planetarum quomodo ab autore tradita, 309.
Trigonometria in quem uſum primum inventa, 137. quomodo in uſum praxeos tractanda, 138. & *ſeqq.*
Trigonometriæ ſphæricæ ſtudium, 286. & *ſeqq.*

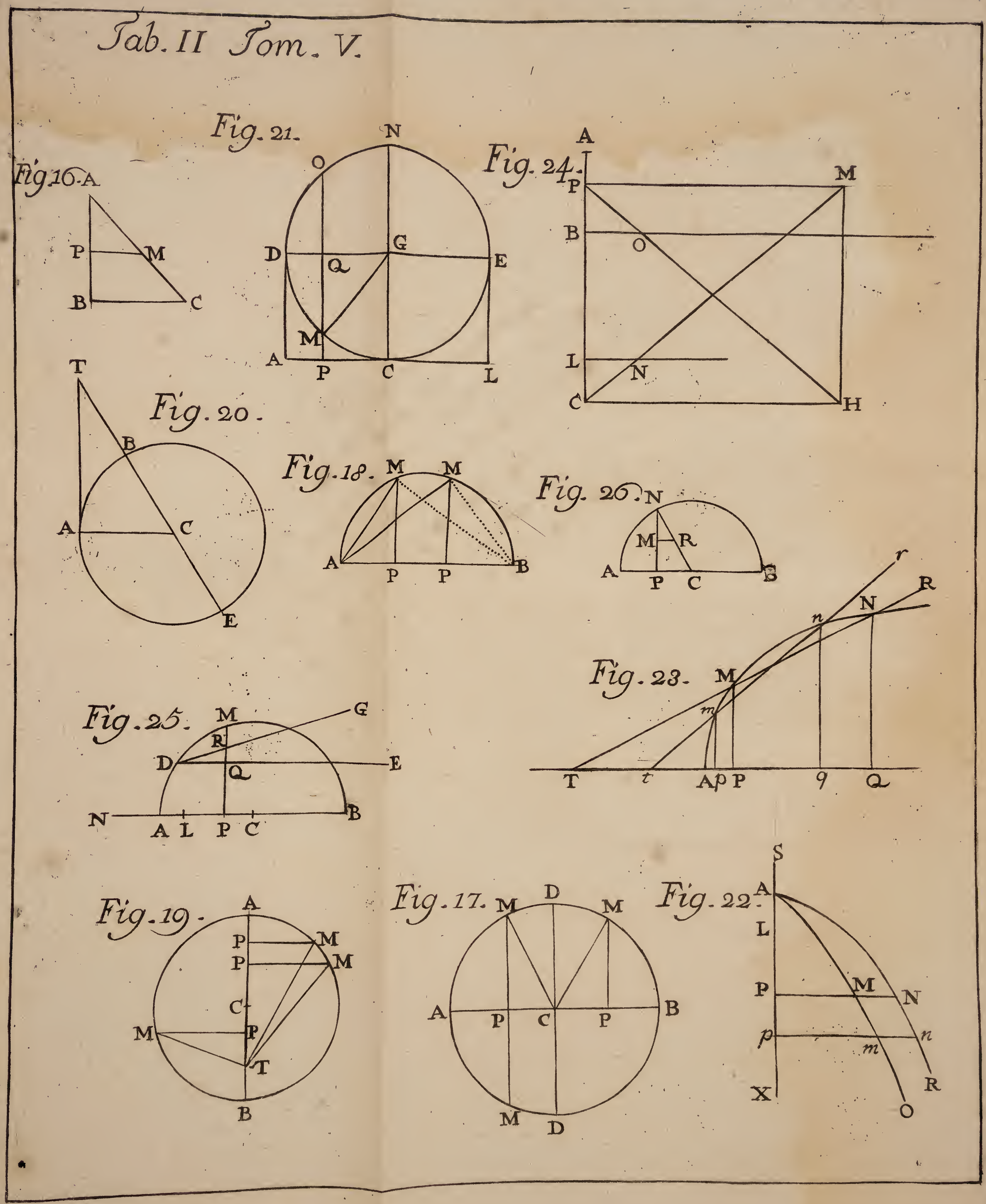
V.

Veritas invenienda quod alias cognitas ſupponat, 71.
Veritatis inveniendæ utilitas cur non attendenda, 176.
Vulgarium meditatio quem habeat uſum, 170.

FINIS TOMI V. ELEMENTORUM MATHESEOS.

Tab. I Tom V.


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15


Tab. II Tom. V.
Fig. 16.
Fig. 21.
Fig. 24.
Fig. 20.
Fig. 18.
Fig. 26.
Fig. 23.
Fig. 25.
Fig. 19.
Fig. 17.
Fig. 22.

Tab. III Tom. V.

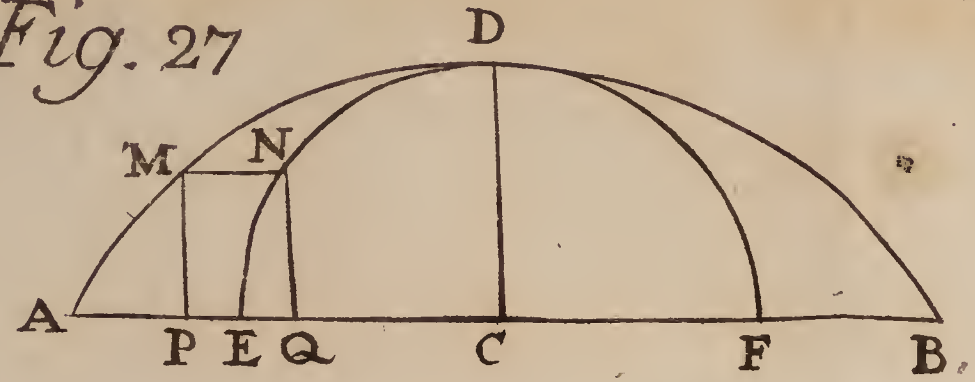


Fig. 27

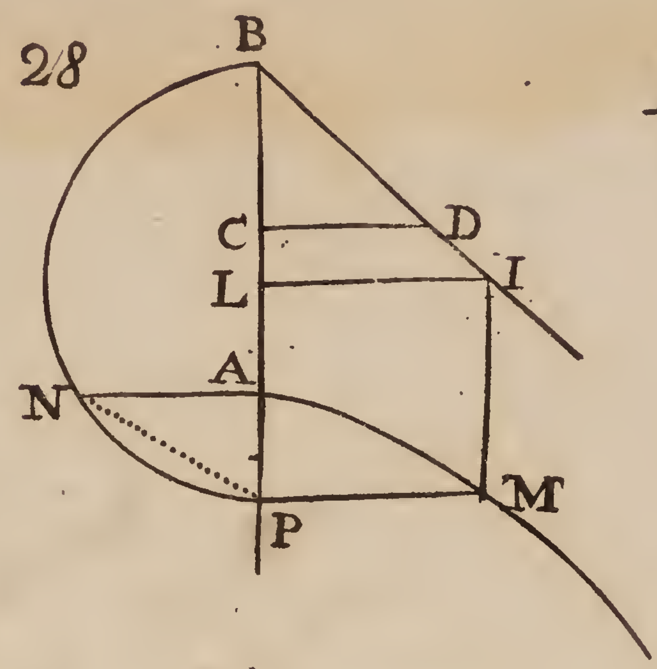


Fig. 28

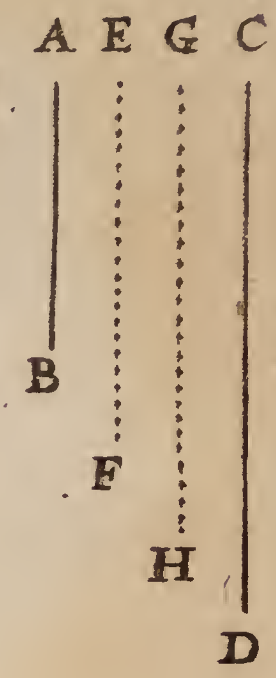


Fig. 29

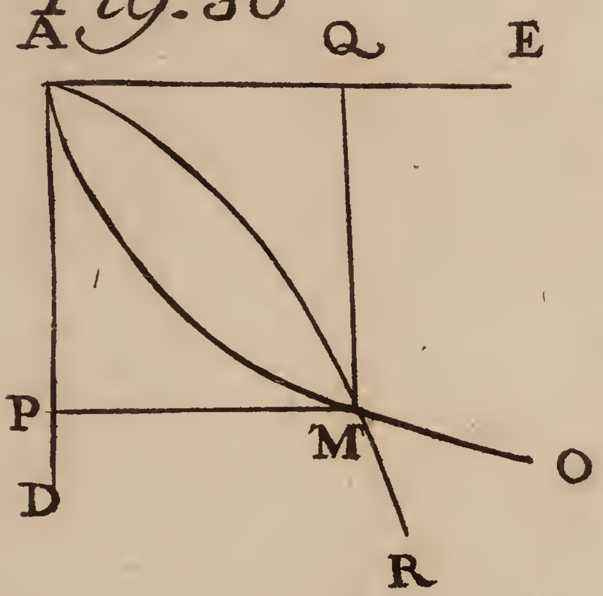


Fig. 30

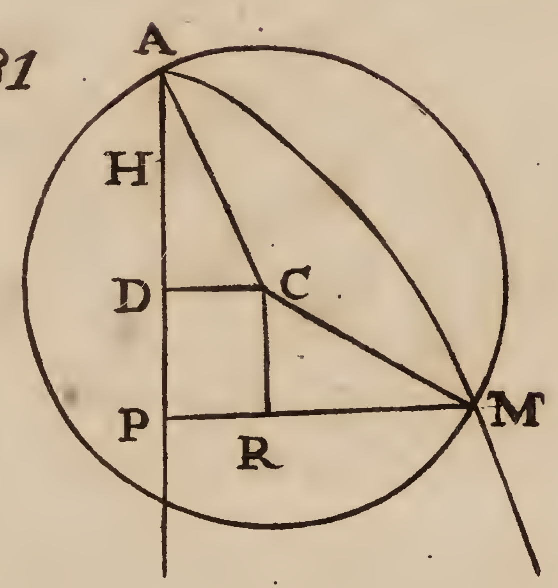


Fig. 31

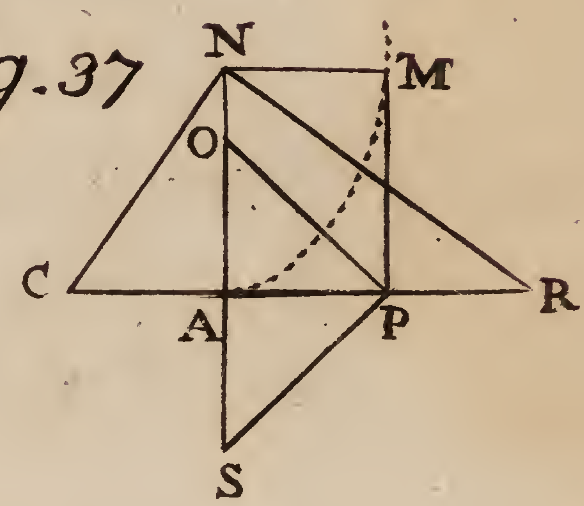


Fig. 37

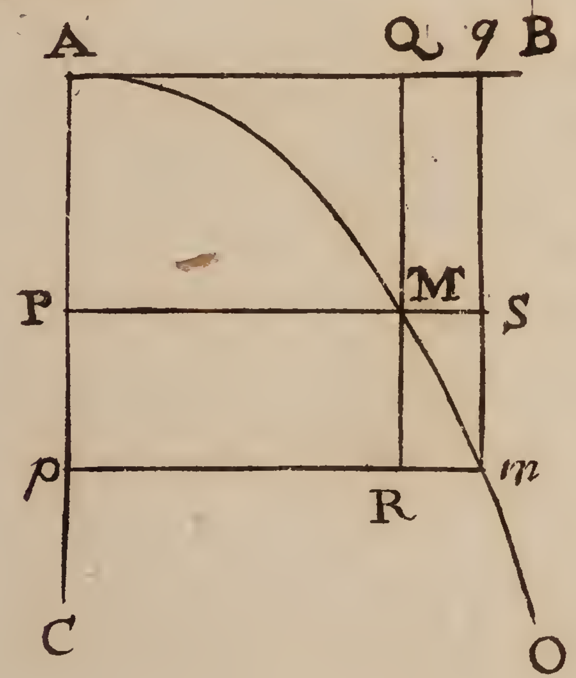


Fig. 33

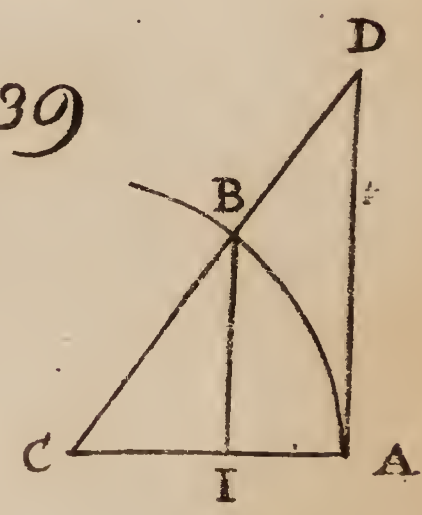


Fig. 39

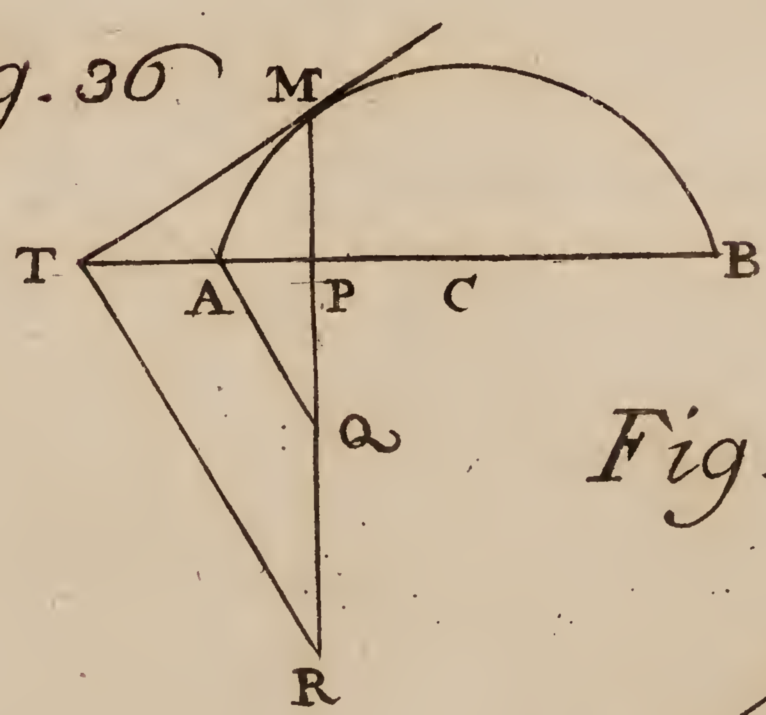


Fig. 36

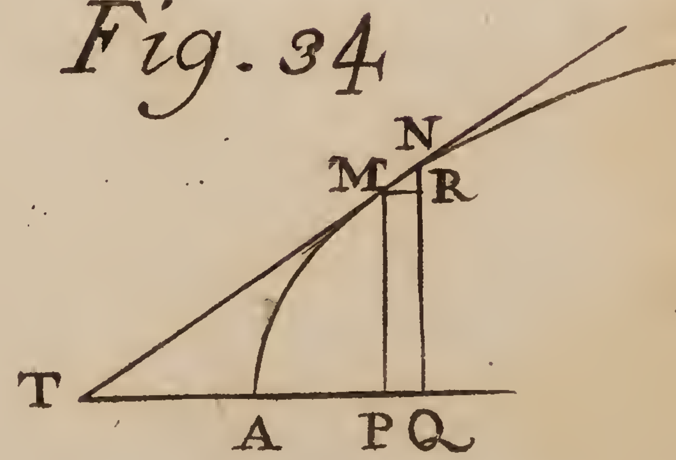


Fig. 34

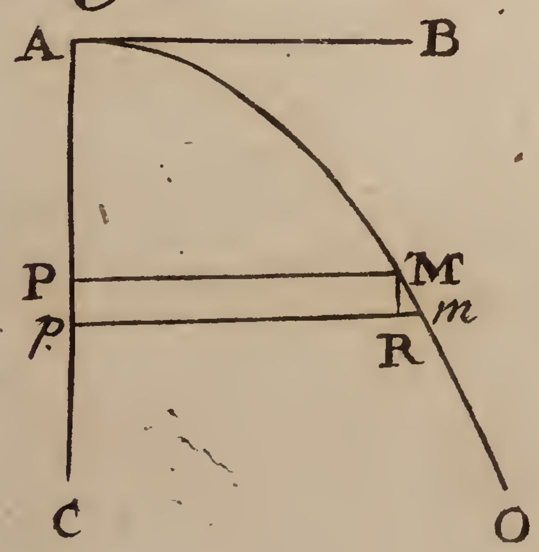


Fig. 32

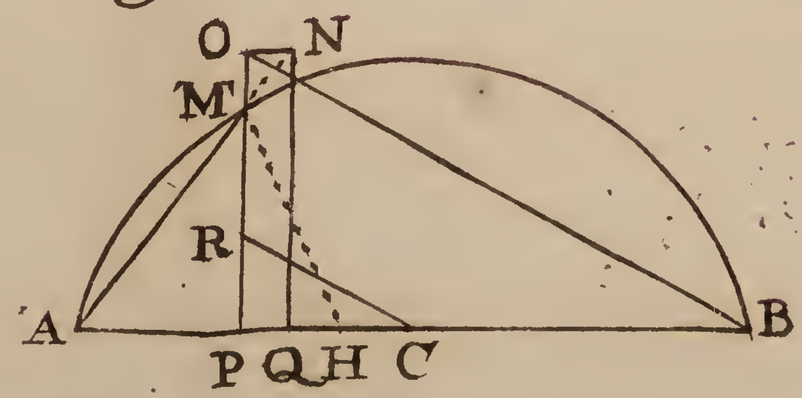


Fig. 38

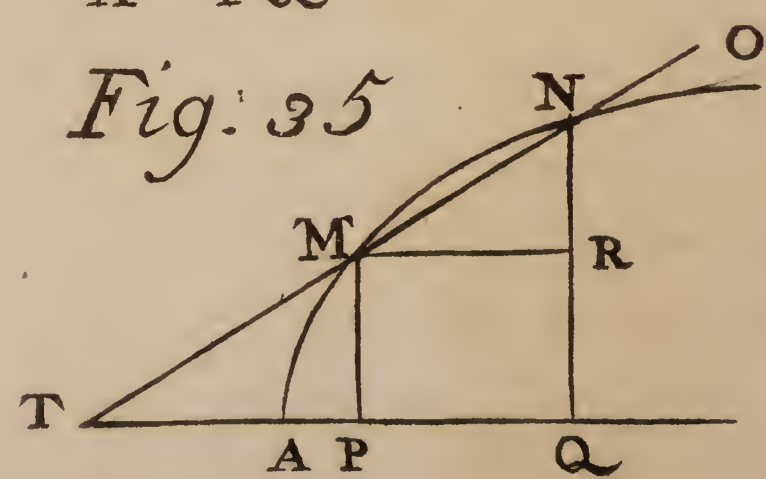


Fig. 35

Tab. IV. Tom. V.

Fig. 40

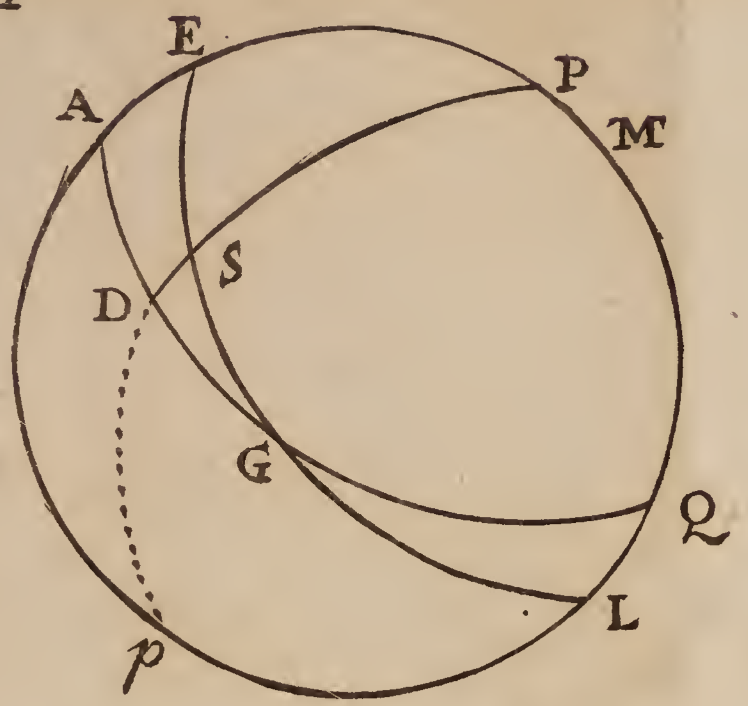


Fig. 43

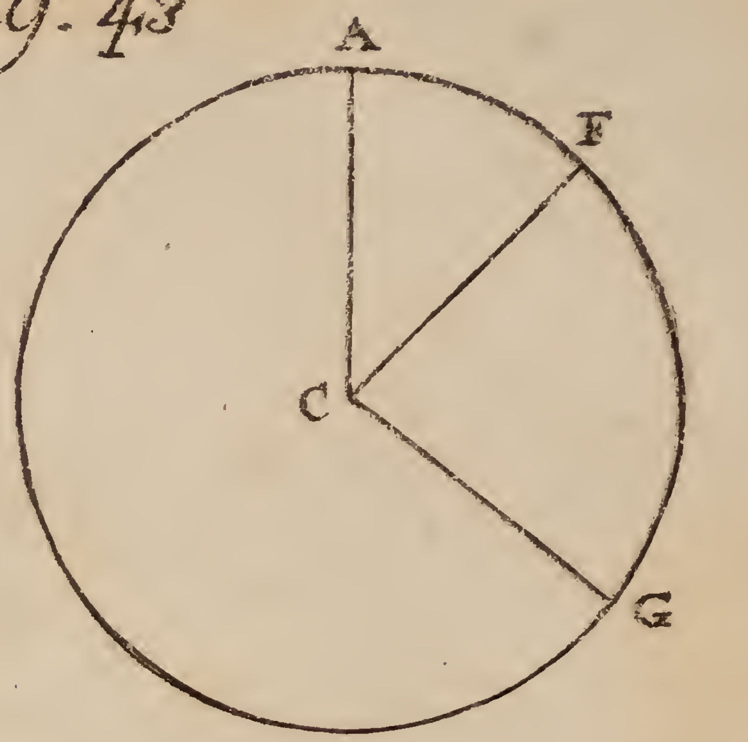


Fig. 41

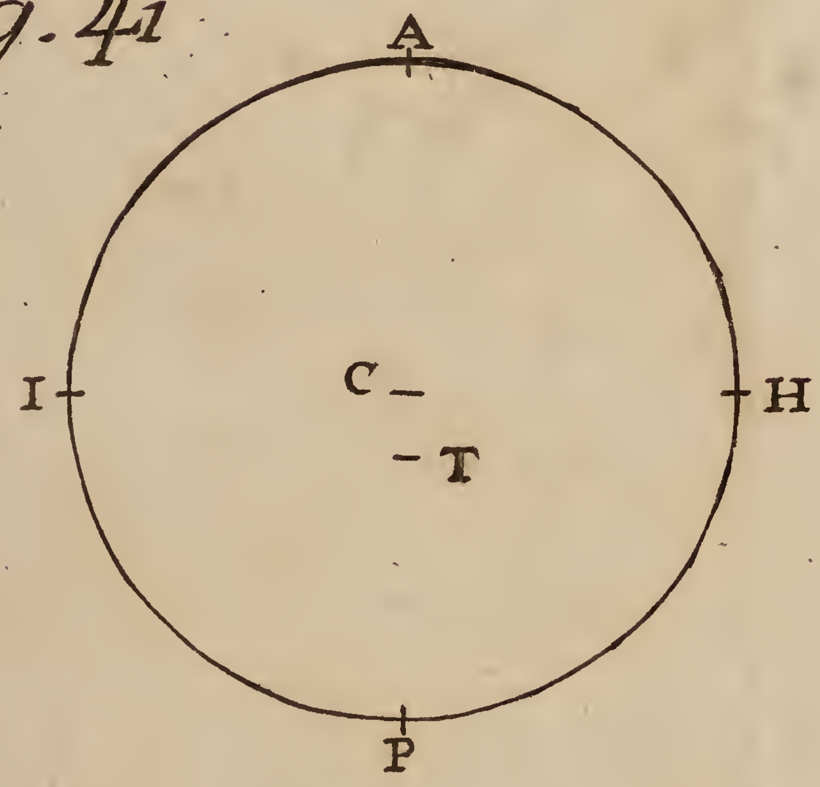


Fig. 44

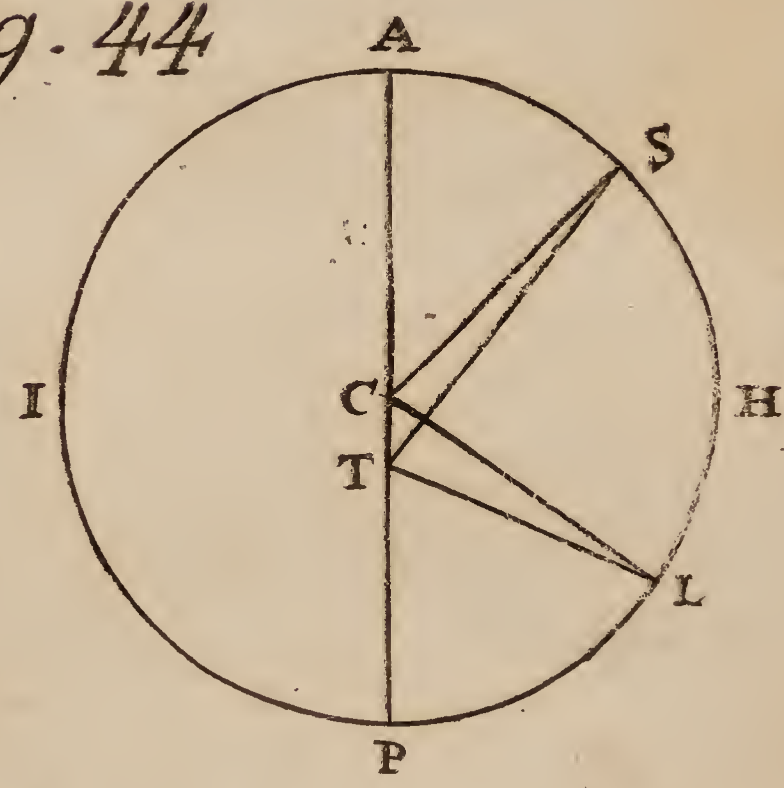


Fig. 42

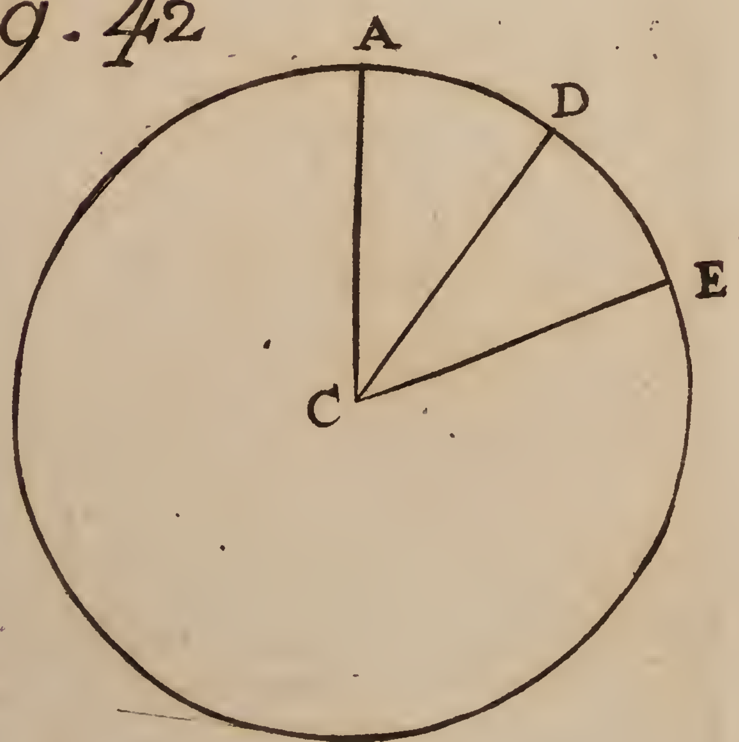


Fig. 45

